Percorsi minimi[1]

Tipologia
Attività laboratoriale di tipo manipolativo, da svolgersi in gruppi composti da 4-5 studenti e con l'utilizzo di schede guidate.

Durata minima: 4 ore
La durata del laboratorio che viene indicata è da intendersi come una stima dato che dipenderà dall'insegnante scegliere se e quali punti dell'attività approfondire. Inoltre il tempo di esecuzione dipende da molti altri fattori tra i quali il livello della classe, l'ambiente di lavoro che si instaura e l'orario scolastico di cui si dispone (alle prime ore i ragazzi sono sicuramente più attivi che nelle ultime).

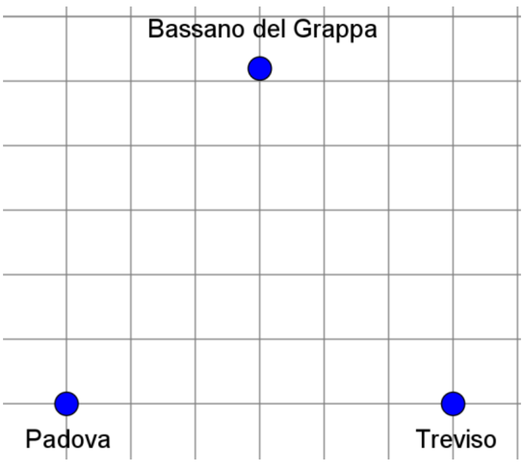
Obbiettivi
Studiare le reti minime che collegano dei punti del piano, lavorare con le figure geometriche piane quali il triangolo e il quadrato e applicare le loro proprietà, confrontare numeri, lavorare con i numeri irrazionali. Oltre agli obbiettivi già elencati si vogliono perseguire anche i seguenti obbiettivi trasversali: stimolare la collaborazione e la condivisione del sapere, esercitarsi nella misura di oggetti, sviluppare un linguaggio matematico appropriato e abituare i ragazzi a comunicare i loro procedimenti risolutivi.

Collocazione nel curricolo
Questo laboratorio è rivolto alle classi terze delle scuole secondarie di primo grado e al primo biennio delle scuole secondarie di secondo grado

Una **rete** è un grafo connesso che passa per i punti fissati del piano. In altre parole, una rete è un modo di collegare tra loro un certo numero di punti, usando delle linee che si possono diramare anche da punti diversi da quelli fissati. Il problema consiste quindi nel determinare, fra tutti i possibili collegamenti, quello di lunghezza complessiva minore, ovvero determinare la **rete minima**.

Fase 1: Triangolo equilatero

In questa fase del laboratorio i ragazzi devono trovare la rete minima che collega tre punti che si trovano ai vertici di un triangolo equilatero. Viene spiegato loro che le città di Bassano del Grappa, Padova e Treviso sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero e che un'azienda deve trovare il percorso più breve per collegare le tre città con una rete di tubi. Gli studenti devono aiutare l'azienda a trovare il percorso più breve.

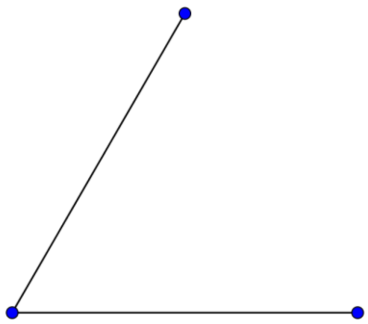


[1] Scritto utilizzando come riferimento il libro: *Domenico Luminati, Italo Tamanini – Problemi di massimo e di minimo - Quaderni di laboratorio - 2009 - Casa Editrice Mimesis*

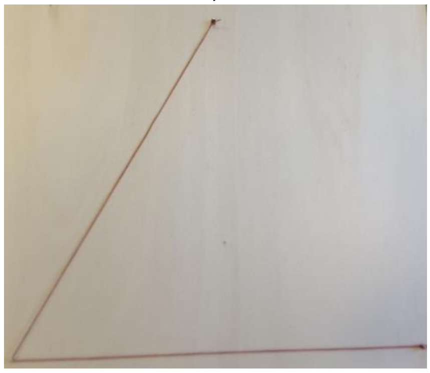
I ragazzi hanno a disposizione un modellino formato da un pezzo di compensato 60 cm * 60 cm con degli occhioli in corrispondenza delle tre città (nel modellino il lato del triangolo equilatero è di 50 cm). Utilizzando una corda gli studenti devono collegare i tre punti in modi differenti e misurare la lunghezza dei percorsi scelti con il fine di trovare il percorso più breve.

I possibili percorsi sono

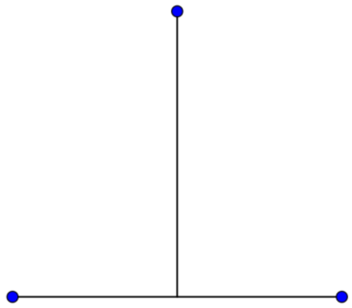
1. L=2l



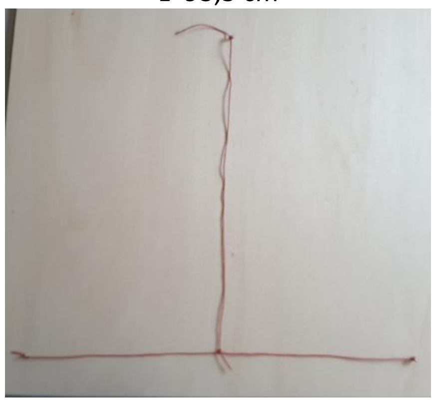
L=99,8 cm



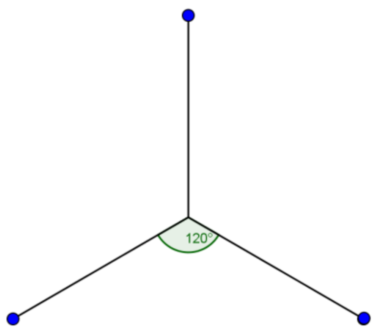
2. $L = l + l\,\frac{\sqrt{3}}{2} = l(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$



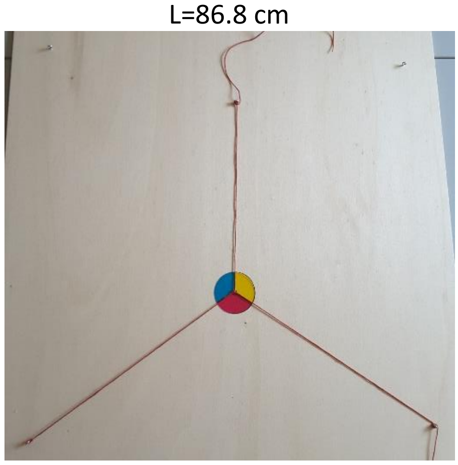
L=93,5 cm



3. $L = 2l\frac{\sqrt{3}}{3} + l\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} = l\,\sqrt{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = l\sqrt{3}$

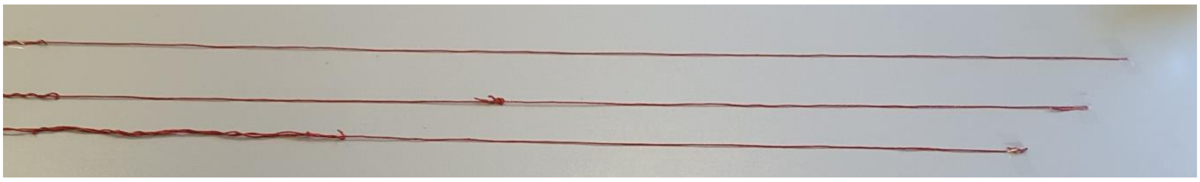


L=86.8 cm



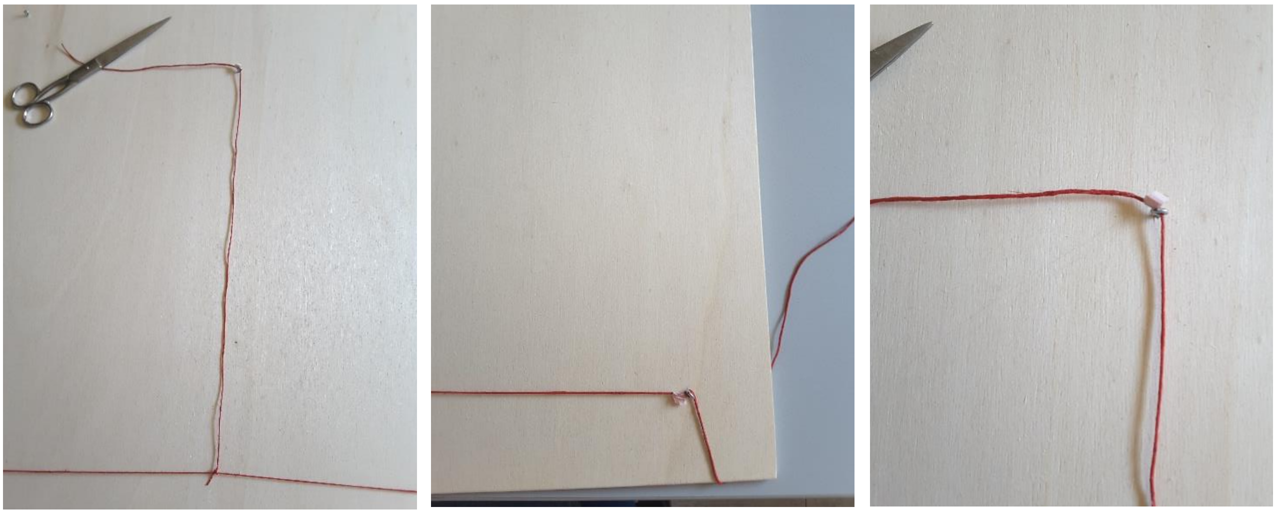
Dopo aver lasciato gli studenti liberi di fare dei tentativi, vengono consegnate ai ragazzi le tre immagini dei percorsi sopra elencati. Viene chiesto loro, nel caso non li avessero già provati in precedenza, di tracciare con la corda i percorsi disegnati e di misurarne la lunghezza. Dalle misure dovrebbero scoprire che il percorso più breve è il terzo, cioè quello che forma angoli di $120°$ collegando un punto dell'altezza del triangolo con i vertici.

Per verificare la differenza di lunghezza tra un percorso ed un altro, si può chiedere di attaccare in linea retta sul banco con dello scotch la corda che era stata utilizzata per tracciare le varie reti e confrontarne le lunghezze come mostra l'immagine riportata.

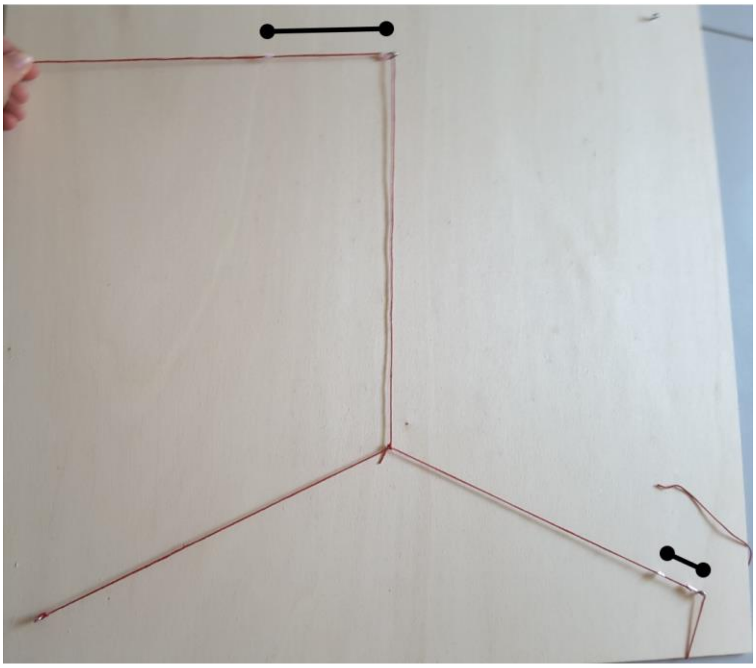


Per convincere i ragazzi che la rete minima è quella che forma angoli di $120°$ collegando un punto dell'altezza del triangolo con i vertici, si può procedere con una costruzione pratica.

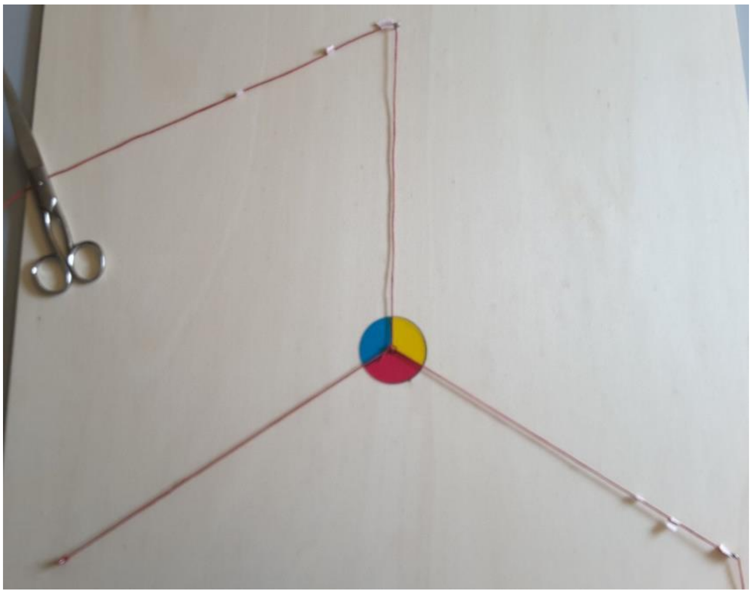
Si costruisce la rete che collega un lato e l'altezza lasciando due dei vertici non fissati con del filo in eccesso e si segna con un pezzo di post-it il punto dove si trova il filo nei due vertici liberi come mostrano le figure.



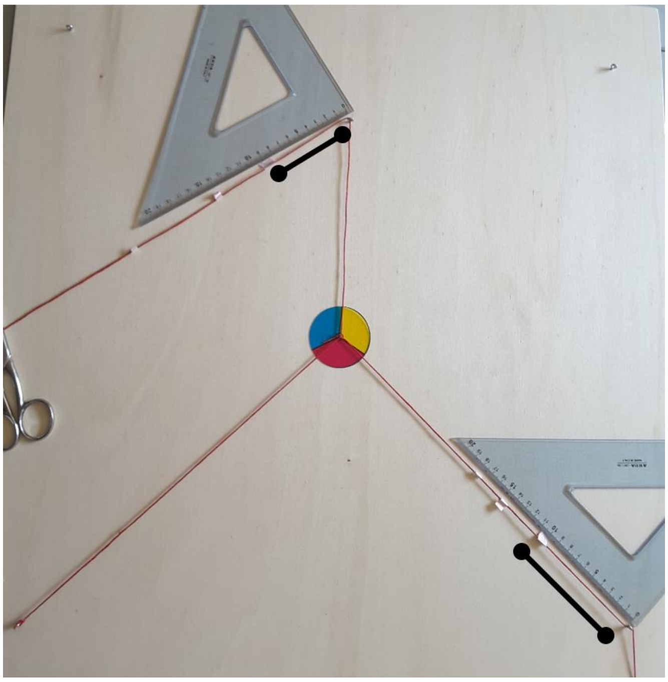
Tirando il vertice da dove parte l'altezza si può notare che il filo guadagnato dal percorso nuovo è minore del filo che è stato perso e quindi il nuovo percorso è migliore (= più breve) del percorso precedente.



Tale situazione, per cui il percorso nuovo è più breve di quello precedente, continua a ripresentarsi fino ad arrivare alla rete minima.



Continuando a tirare il filo, una volta sorpassata la rete minima, i ruoli si invertono: il filo guadagnato è più lungo del filo perso e quindi il percorso risulta più lungo di quello che forma i 120° che risulta quindi essere la rete minima.



Come ulteriore conferma delle conclusioni ottenute con la corda, viene chiesto ai ragazzi di immergere in acqua saponata una lastrina in plexiglass che ha dei pioli in corrispondenza dei vertici di un triangolo equilatero, e di osservare la forma che assume la lamina di sapone. La lamina di sapone disegnerà nella lastrina un percorso uguale alla rete 3.

Con una discussione, a classe intera, mediata dall'insegnante, si può infatti dimostrare che la rete 3 è la più corta:

- La rete 1 è maggiore della rete 2:

$$2l > l(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$2 > 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

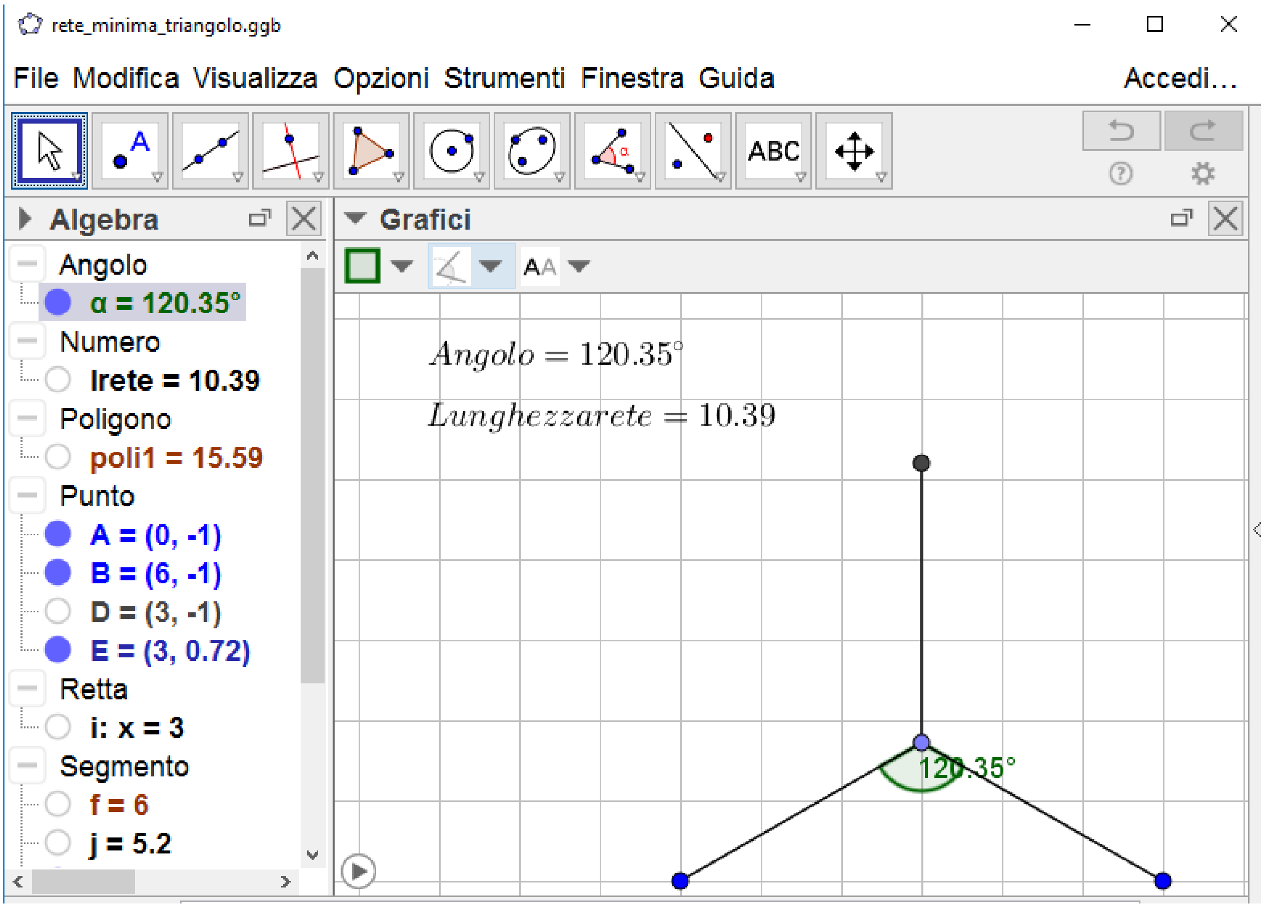
- La rete 2 è maggiore della rete 3:

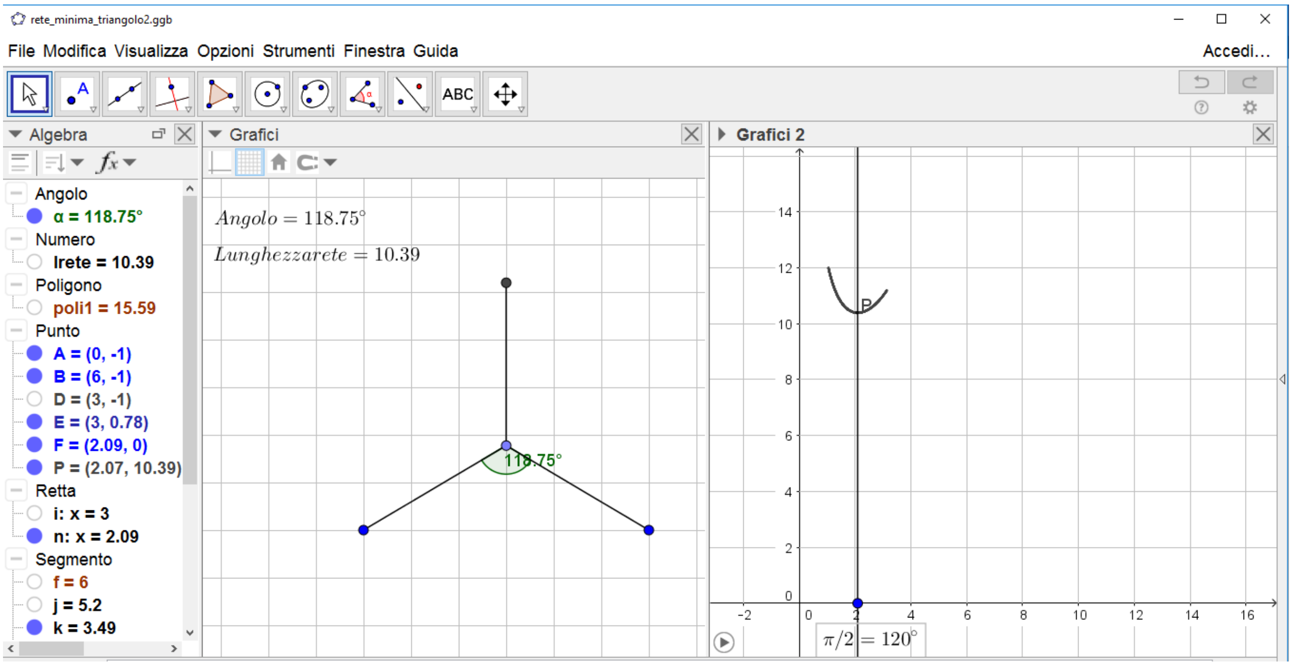
$$l\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > l\sqrt{3}$$

$$1+\frac{\sqrt{3}}{2} > \sqrt{3}$$

$$1 > \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 1 > \frac{3}{4}$$

Infine, con l'utilizzo di un file Geogebra si può mostrare agli studenti che la rete 3 è proprio la migliore dato che tutte le altre risultano essere più lunghe.

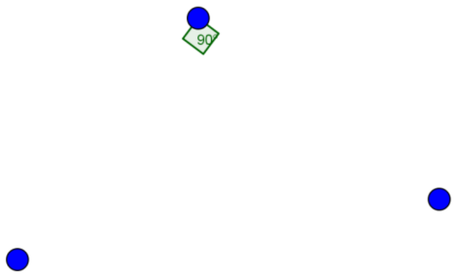




Infatti, come si può notare dall'immagine riportata, tracciando la funzione lunghezza della rete in relazione all'angolo, si ottiene un minimo in corrispondenza di 120˚. Tale file geogebra è di semplice esecuzione e, nel caso l'attività venga svolta nelle scuole secondarie di secondo grado, si può quindi prevedere di farlo costruire direttamente ai ragazzi.

Triangolo rettangolo

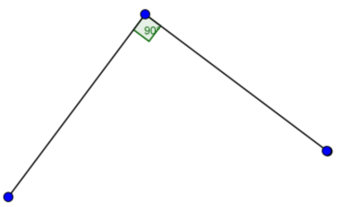
Una volta scoperta la rete minima del triangolo equilatero viene chiesto ai ragazzi di trovare la rete minima del triangolo rettangolo.

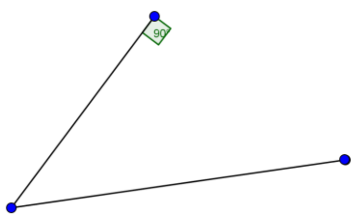


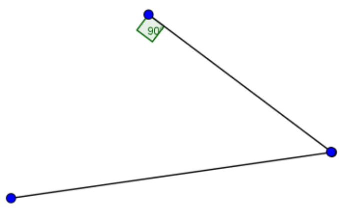
Anche in questo caso costruiscono con una corda le reti possibili e ne misurano la lunghezza.

I casi sono

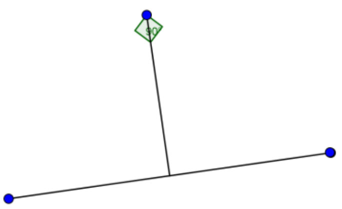
1. $L = C + c$
2. $L = i + c$
3. $L = i + C$

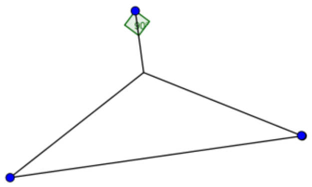






4. 5.

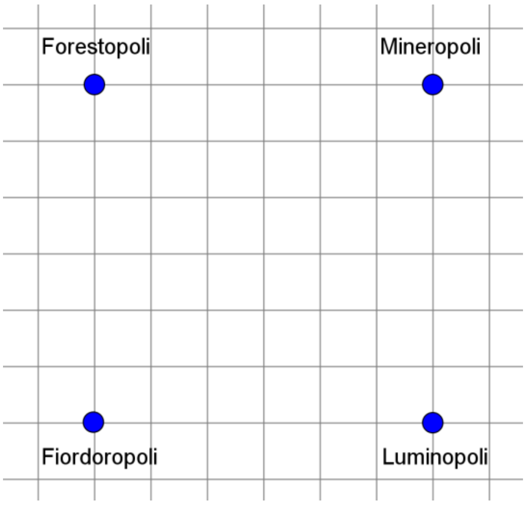




Una volta fatta la loro ipotesi, viene chiesto di verificarla utilizzando le lamine di sapone. Con una discussione mediata si può far notare che la configurazione trovata vale per tutti i triangoli.

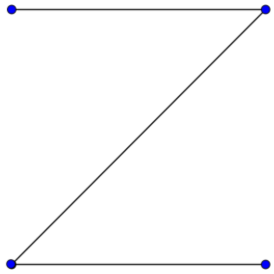
Quadrato

Nell'ultima fase dell'attività viene chiesto ai ragazzi di trovare la rete minima che collega le quattro città di Forestopoli, Mineropoli, Fiordoropoli e Luminopoli che sono poste ai vertici di un quadrato.

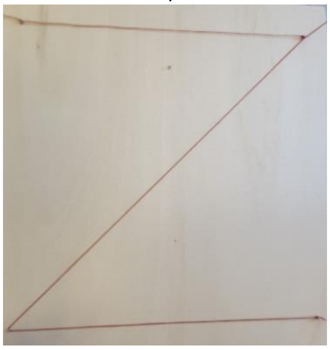


Anche in questo caso i ragazzi, con l'utilizzo di una corda, devono tracciare delle possibili reti e misurarne la lunghezza in modo da trovare quella più corta. Gli sudenti hanno a disposizione un modellino formato da un pezzo di compensato 60 cm * 60 cm con degli occhioli in corrispondenza delle quattro città (nel modellino il lato del quadrato è di 50 cm). I possibili casi sono:

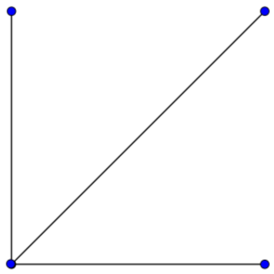
1. $L = 2l + \sqrt{2}l = l(2 + \sqrt{2})$



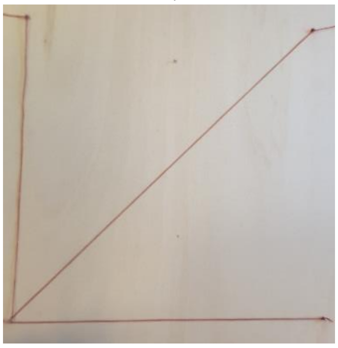
L=171,1 cm



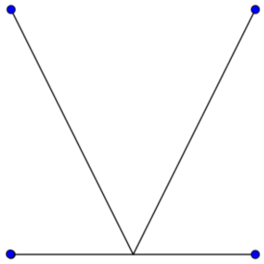
$L = 2l + \sqrt{2}l = l(2 + \sqrt{2})$



L=170,9 cm

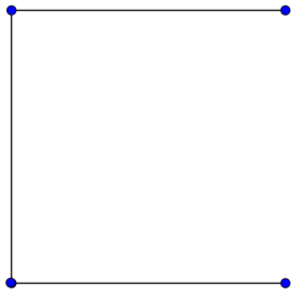


2. $L = l + 2\sqrt{\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2\right)} = l(1 + \sqrt{5})$



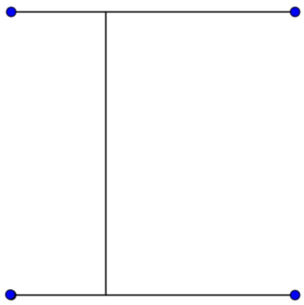
L=162,4 cm

3. $L = 3l$

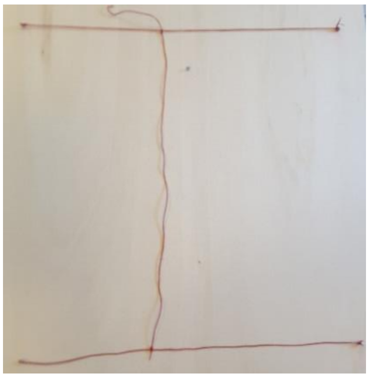


L=149,6 cm

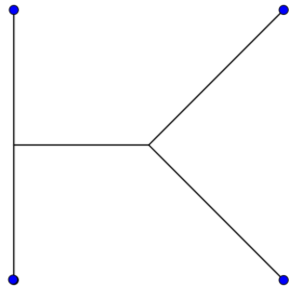
$L = 3l$



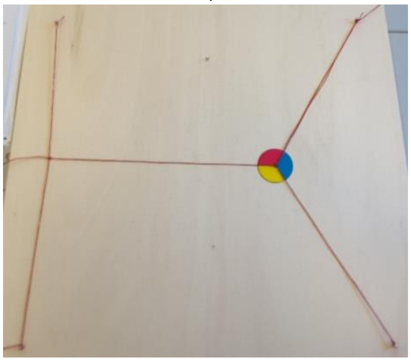
L=151 cm



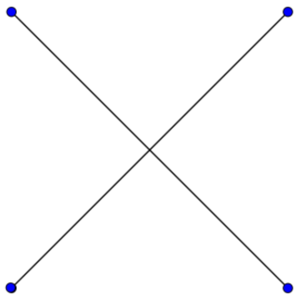
4. $L = l + \frac{l}{2} + l\sqrt{2} = l(\frac{3}{2} + \sqrt{2})$



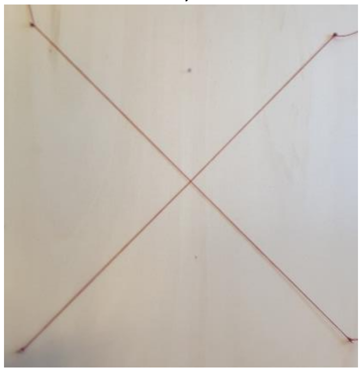
L=141,8 cm



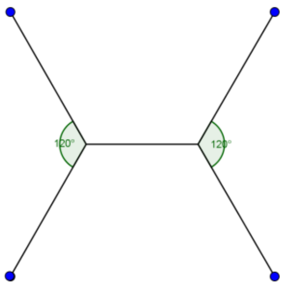
5. $L = 2\sqrt{2}\,l$



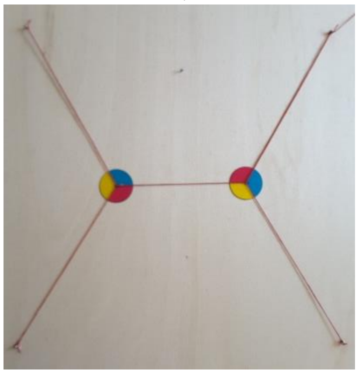
L=140,8 cm



6. $L = 4l\,\frac{\sqrt{3}}{3} + l - 2\,\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} = l(\sqrt{3} + 1)$



L=135,6 cm



Dopo aver lasciato gli studenti liberi di fare dei tentativi, vengono consegnate ai ragazzi le immagini dei percorsi sopra elencati. Viene chiesto loro, nel caso non li avessero già provati in precedenza, di tracciare con la corda i percorsi disegnati e di misurarne la lunghezza. Dalle misure dovrebbero scoprire che il percorso più breve è l'ultimo, cioè quello che forma angoli di 120° collegando due vertici del quadrato e unendosi tra loro nel centro. Come conferma del risultato trovato viene immersa nell'acqua saponata una lastrina con quattro pioli in corrispondenza dei vertici del quadrato.

Dopo aver verificato con le lamine di sapone qual è la configurazione della rete minima, con una discussione a classe intera si può dimostrare che la rete numero 6 è la più corta con i seguenti passaggi.

- La rete 1 è maggiore della rete 2:

$$l(2+\sqrt{2}) > 3l$$

$$2+\sqrt{2} > 3$$

$$\sqrt{2} > 1 \rightarrow 2 > 1$$

- La rete 2 è maggiore della rete 3:

$$l(1+\sqrt{5}) > 3l$$

$$1+\sqrt{5} > 3$$

$$\sqrt{5} > 2 \rightarrow 5 > 4$$

- La rete 3 è maggiore della rete 4:

$$3l > l\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$3 > \frac{3}{2}+\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{2} > \sqrt{2} \rightarrow \frac{9}{4} > 2$$

- La rete 4 è maggiore della rete 5:

$$l\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right) > 2\sqrt{2}l$$

$$\frac{3}{2}+\sqrt{2} > 2\sqrt{2}$$

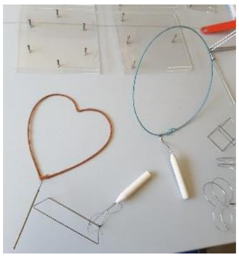
$$\frac{3}{2} > \sqrt{2} \rightarrow \frac{9}{4} > 2$$

- La rete 5 è maggiore della rete 6:

$$2\sqrt{2}l > l(\sqrt{3}+1)$$

$$2\sqrt{2} > \sqrt{3}+1$$

$$8 > 3+1+2\sqrt{3} \rightarrow 4 > 2\sqrt{3} \rightarrow 16 > 12$$



Per concludere l'attività si può far vedere con le lamine di sapone qual è la rete minima che collega i vertici di un pentagono, di un esagono e nel caso ci siano quattro pioli che formano una "T"; per poi passare ad osservare cosa succede nel caso tridimensionale con un cubo e una piramide. Infine si può provare a fare delle bolle di sapone con dei sostegni circolari, quadrati e a forma di cuore ed osservare che la bolla che ne risulta è sempre sferica.

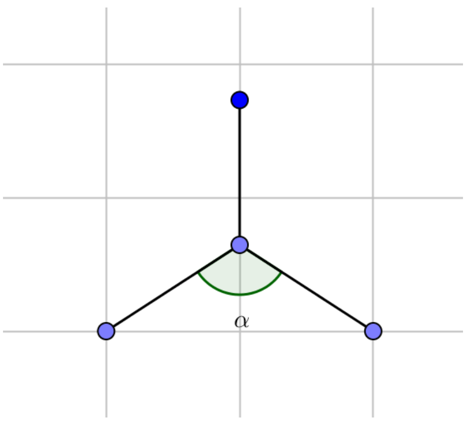
Materiali

- Schede guida per lo studente (una copia per ragazzo)
- Modellino di compensato 60 cm* 60 cm con occhioli ai vertici di un triangolo equilatero e di un quadrato
- Corda: circa 20 metri per gruppo di lavoro
- 1 bacinella per gruppo di lavoro
- 1 lastrina trasparente con 3 perni a triangolo equilatero per gruppo di lavoro
- 1 lastrina trasparente con 4 perni a quadrato per gruppo di lavoro
- 1 lastrina trasparente con 4 perni a "T" per gruppo di lavoro
- 1 righello plastificato per gruppo di lavoro
- 2 indicatori di angoli a 120° per gruppo di lavoro
- 1 serie di 4 tessere sulle possibili reti del triangolo equilatero (gialle) per gruppo di lavoro
- 1 serie di 9 tessere sulle possibili reti del quadrato (rosse) per gruppo di lavoro
- File geogebra per la rete minima del triangolo
- Stecca da 50 cm, squadre, matite, post-it e cancelleria varia

Osservazioni

Svolgendo quest'attività al quinto anno della scuola secondaria di secondo grado si può far scrivere la funzione lunghezza della rete e calcolarne il minimo. La funzione lunghezza della rete può essere scritta in due modi differenti.

1. In funzione dell'angolo che si forma collegando i vertici con un punto dell'altezza del triangolo.



Se chiamiamo α l'angolo e che il lato del triangolo sia di lunghezza fissata l la funzione lunghezza della rete L è

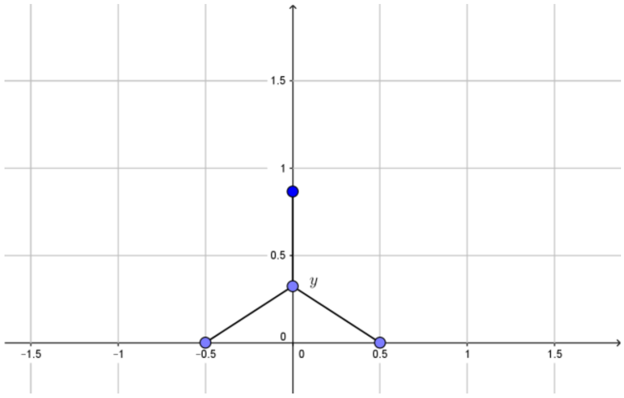
$$L(\alpha) = \frac{l}{\sin {}^{\alpha}/_{2}} + l\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{l}{2\tan {}^{\alpha}/_{2}} = \frac{l\left(2 - \cos {}^{\alpha}/_{2}\right)}{2\sin {}^{\alpha}/_{2}} + l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Che ha derivata

$$L'(\alpha) = \frac{l(1 - 2\cos {}^{\alpha}/_{2})}{4(\sin {}^{\alpha}/_{2})^2}$$

Il minimo è quindi $\alpha = 120°$.

2. In funzione della coordinata y del punto considerato sull'altezza



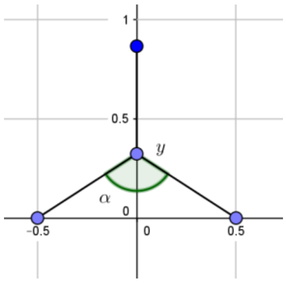
Supponendo che il lato del triangolo sia lungo 1 cm la funzione lunghezza L è

$$L(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} - y + 2\sqrt{\frac{1}{4} + y^2}$$

Che ha derivata

$$L'(y) = -1 + \frac{4y}{\sqrt{4y^2 + 1}}$$

Il minimo è quindi $y = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Se chiamiamo α l'angolo che si forma collegando i due vertici alla base con y abbiamo che

$$\frac{1}{2\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \rightarrow \quad \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 60° \quad \rightarrow \quad \alpha = 120°$$

Bibliografia

Domenico Luminati, Italo Tamanini – Problemi di massimo e di minimo - Quaderni di laboratorio - 2009 - Casa Editrice Mimesis