Capitolo 1

Contenuti matematici

In questo primo capitolo sono presenti alcuni contenuti teorici sulle isometrie che l'insegnante che si accinge ad intraprendere un percorso didattico su questo argomento dovrebbe conoscere. Il docente dovrebbe, infatti, presentare, oltre ad altre competenze, anche le competenze disciplinari e di didattica della disciplina che includono sia una approfondita e aggiornata conoscenza della materia insegnata, dei linguaggi, dei nuclei fondamentali, sia le metodologie didattiche specifiche della disciplina.

In questa tesi ci limiteremo a fornire una trattazione-base delle isometrie, cioè viene proposto il minimo indispensabile che consente di affrontare gli argomenti tradizionali inclusi nella programmazione didattica per la Scuola Secondaria di primo grado.

Dopo una prima parte in cui vengono proposte delle definizioni e delle osservazioni importanti riguardanti le isometrie in generale, si passa alla trattazione specifica delle isometrie del piano sia seguendo un approccio geometrico che analitico. Lo studio di queste è fondamentale, in quanto, le proposte didattiche sviluppate e sperimentate riguardano per lo più le isometrie di $\mathbb{R}^2$ vedi 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4. Si passa successivamente a considerare brevemente le isometrie dello spazio per concludere, poi, il capitolo analizzando i gruppi di simmetria dei poligoni regolari e dei solidi platonici. Per quanto riguarda quest'ultima parte, sono stati sviluppati dei laboratori concernenti le simmetrie dei poliedri regolari 4.2.4 e i piani di simmetria del cubo 4.2.5 fruibili dagli studenti della Scuola Secondaria di primo grado.

Per la stesura di questo capitolo si è fatto principalmente riferimento alle seguenti fonti [13], [17], [18].

1.1 Le isometrie: definizione

Iniziamo la trattazione delle isometrie proponendo alcune definizioni ed alcune considerazioni importanti relative al caso generale, ovvero considerando come ambiente di lavoro $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1. Un'*isometria* è una corrispondenza $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che conserva le distanze cioè per qualsiasi coppia di punti P, $Q \in \mathbb{R}^n$ vale $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$.

Si può facilmente verificare che una tale applicazione è biunivoca e che la composizione di isometrie è ancora una isometria. Esiste, inoltre, l'applicazione identica, che funge da elemento neutro del gruppo, e per ogni isometria si riesce a trovare l'inverso che è anche esso una isometria. Segue, quindi, che le isometrie formano un gruppo rispetto all'operazione di composizione che viene indicato con $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$. Vedremo più avanti cosa si intende per gruppo di simmetrie e quali sono i gruppi di simmetria dei poligoni regolari 1.4 e dei poliedri regolari 1.5.

È possibile anche provare che le isometrie sono delle affinità ovvero delle mappe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ del tipo

$$f(X) := AX + b$$

$\forall X \in \mathbb{R}^n$ ove $b \in \mathbb{R}^n$ e A è una matrice quadrata di ordine n detta matrice associata alla trasformazione.

Si dimostra che la richiesta di conservare le distanze e, dunque, gli angoli coincide con il chiedere che venga preservato il prodotto scalare standard e che, quindi, la matrice A sia una matrice ortogonale. Una matrice A è ortogonale se ${}^tAA = 1$ e per sua stessa definizione è invertibile. Poiché $\det({}^tA) = \det(A)$ allora $\det(A)^2 = \det(I_n)$ da cui $\det(A) = \pm 1$. Le isometrie che presentano $\det A = 1$ si dicono *dirette* mentre quelle con $\det A = -1$ *inverse*.

1.2 Le isometrie del piano

Dopo aver definito in generale che cosa è una isometria, ci soffermiamo ora al caso del piano. Una isometria di $\mathbb{R}^2$ è una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che conserva le distanze, ovvero, $d(P_1, P_2) = d(f(P_1), f(P_2))$ per ogni $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ con d distanza euclidea.

Presentiamo di seguito alcune proprietà immediate delle isometrie del piano:

(1) Una retta viene trasformata in una retta, un segmento in un segmento della stessa lunghezza, un angolo in un angolo della stessa ampiezza, una qualunque figura in una figura congruente.

(2) Rette parallele vengono trasformate in rette parallele.

Vediamo ora quando si può parlare di figure isometriche. Una figura è un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Due figure F_1 e F_2 sono isometriche se esiste una isometria f tale che $F_2 = f(F_1)$. Come verrà ripreso in seguito, una isometria diretta conserva l'orientazione di ogni figura mentre una isometria inversa inverte l'orientazione di ogni figura.

Dopo aver introdotto brevemente cosa si intende per isometria in $\mathbb{R}^2$ e aver presentato alcune conseguenze immediate, proponiamo alcuni esempi mettendo in evidenza di volta in volta alcune proprietà.

1.2.1 Esempi di isometrie e proprietà

Di seguito presentiamo e analizziamo dal punto di vista geometrico le isometrie del piano. Faremo vedere successivamente nella trattazione analitica che ogni isometria è una di queste 4 esposte e che sono verificate tutte le proprietà indicate, alcune non semplici da provare per via geometrica.

A. **La traslazione**
Chiameremo traslazione di vettore $\vec{v}$ quella applicazione $\tau_{\vec{v}}$ del piano che ad ogni punto P del piano associa $P' = \tau_{\vec{v}}(P)$ tale che il segmento di primo estremo P e secondo estremo P' rappresenti il vettore $\vec{v}$.

Proprietà

(a) È una isometria diretta.
(b) Non ha punti fissi.
(c) Sono unite tutte le rette che hanno la direzione della traslazione.
(d) Trasforma rette in rette ad esse parallele.

B. **La rotazione**
Chiameremo rotazione di centro O e angolo orientato[1] α quella applicazione $\rho_{O,\alpha}$ del piano in sé che ad ogni punto P associa il punto $P' = \rho_{O,\alpha}(P)$ tale che:

$$d(O,P) = d(O,P') \qquad \text{e} \qquad P\widehat{O}P' = \alpha$$

Proprietà

(a) È una isometria diretta.
(b) Ha un solo punto fisso, il centro O, a meno che $\alpha = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. In questo caso si ha come isometria l'identità che fissa ogni punto.
(c) Non ha alcuna retta unita ad eccezione delle seguenti rotazioni particolari:

[1]Con il termine 'angolo orientato' si vuole indicare che si è fissato un ordinamento tra i lati dell'angolo in modo tale da poter stabile quale sia il primo e quale il secondo

$\alpha = 2k\pi$ che fissa ogni punto e quindi sono unite tutte le rette.

$\alpha = (2k+1)\pi$ per cui sono unite tutte le rette che passano per il centro O. Questa è la simmetria centrale che viene esposta nel dettaglio di seguito.

(d) È caratterizzata da un angolo di rotazione α, da un centro di rotazione O e da un verso di rotazione.

(e) È uguale alla composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti che si incontrano nel centro O e formano un angolo pari alla metà di quello di rotazione, vedi 1.2.

Un caso particolare di rotazione è la **simmetria centrale** definita nel seguente modo: dato un punto O, centro di simmetria, la simmetria centrale è l'isometria che fa corrispondere ad ogni punto P del piano il punto P' tale che il segmento PP' contenga O e sia diviso da esso in due parti uguali. La simmetria centrale corrisponde, quindi, a una rotazione di π intorno al centro di rotazione ovvero è $\rho_{O,\pi}$.

C. **La riflessione o simmetria assiale**

Chiameremo riflessione (o simmetria assiale o simmetria bilaterale) rispetto ad una retta r l'applicazione σ_r che ad ogni punto del piano, con $P \neq r$ associa il punto $P' = \sigma_r(P)$ appartenente al semipiano individuato dalla retta r non contente P, tale che r sia asse del segmento PP'. Se $P \in r$, allora $\sigma_r(P) = P$, quindi tutti i punti della retta r sono mandati tramite la riflessione σ_r in se stessi.

Proprietà

(a) È una isometria inversa.

(b) Sono fissi tutti i punti dell'asse.

(c) Le rette unite sono l'asse e le rette perpendicolari all'asse.

(d) Rette parallele all'asse vengono trasformate in rette parallele all'asse.

(e) La composizione di una simmetria assiale con se stessa dà l'identità.

D. **La glissosimmetria**

Un ultimo esempio di isometria è la glissosimmetria detta anche glissoriflessione o riflesso-traslazione. Questa è data dalla composizione di una riflessione con una traslazione diversa dall'identità nella direzione dell'asse di simmetria.

Proprietà

(a) È una isometria inversa.

(b) Non ha punti fissi.

(c) Ha come direzione invariante quella dell'asse di simmetria.

1.2.2 La classificazione in base ai punti fissi

Studiamo ora le isometrie del piano viste in precedenza ma dal punto di vista analitico.
Abbiamo visto che una trasformazione del piano in sé è una isometria se e soltanto se è una affinità ovvero una applicazione del tipo $Y = AX + b$ con A matrice ortogonale 2×2 e $b \in \mathbb{R}^2$. Vogliamo ora analizzare i vari casi di isometria in base alla matrice A e alla varietà dei punti fissi.

Poiché si richiede che la matrice A sia ortogonale, allora i vettori colonna di A devono essere ortogonali tra di loro e di modulo 1. Quindi, una affinità nel piano risulta essere una isometria se e solo se la matrice che la caratterizza ha una delle due forme seguenti:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{opppure} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Nel primo caso si ha che $\det A = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ mentre nel secondo $\det A = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$ Prendiamo prima in esame il caso in cui la matrice A ha determinante pari ad 1 ovvero le isometrie dirette. Le possibilità che ci si presentano sono:

- $A = I$
- $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{per} \qquad \alpha \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nel primo caso stiamo considerando la situazione $Y = X + b$. Questa trasformazione è l'identità se $b = 0$ altrimenti è la traslazione di vettore b. L'identità ha tutti i punti fissi mentre nelle traslazioni nessun punto è fisso. Nel secondo caso si ha che $A \neq I$ e quindi $Y = AX + b$. Tale applicazione è una rotazione di angolo α e ha come unico punto fisso il centro della rotazione. Infatti, l'equazione $X = AX + b$ che caratterizza i punti fissi della trasformazione presenta un'unica soluzione. Il polinomio caratteristico di A, $p_A(t) = \det(A - I) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{pmatrix} = (\cos\alpha - t)^2 + \sin^2\alpha$ non presenta radici reali a meno che $\alpha = k\pi$ con $k = 0, 1, \ldots$ e quindi a meno che A sia l'identità o meno l'identità. La matrice $A - I$ ha, quindi, rango 2 e, applicando il teorema di Rouché-Capelli, essendo anche il rango della matrice completa pari a 2, il sistema ammette una sola soluzione e pertanto l'isometria presenta un unico punto fisso.

Effettuando un cambio di coordinate consistenti nella traslazione di tale punto fisso nell'origine, si nota che la matrice A è rimasta invariata e che il nuovo b è uguale a 0. Quindi, se $b = 0$ si ha che la rotazione in esame è proprio la rotazione di angolo α attorno all'origine essendo questa fissa e A è la matrice della rotazione di centro O.

Consideriamo, quindi, il caso delle isometrie inverse ovvero quelle in cui la matrice A ha determinante pari a -1. Come visto, A sarà della forma: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. Analizziamo ora la varietà dei punti fissi: a priori è possibile supporre che esistano un piano o una retta di punti fissi, nessun punto fisso oppure $1, 2, \ldots$ punti fissi. Vediamo quale di queste situazioni si possono verificare utilizzando, anche in questo caso, il teorema di Rouché-Capelli. Il polinomio caratteristico di A è $t^2 - 1$, quindi è diagonalizzabile con autovalori 1 e -1, entrambi di molteplicità 1. La matrice $A - I$ ha rango 1. Il rango della matrice completa

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & b_1 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & b_2 \end{pmatrix}$$

può valere 1 o 2 da cui segue che gli unici punti fissi possibili sono dati rispettivamente da una retta del piano oppure dall'insieme vuoto. La trasformazione inversa che presenta una retta di punti fissi è la riflessione mentre l'isometria inversa che non ha punti fissi è la glissosimmetria. Si osserva che la giacitura della retta di riflessione è l'autospazio corrispondente all'autovalore 1. Se l'isometria presenta punti fissi, è possibile effettuare una traslazione che porti uno di questi nell'origine e si ha una isometria che fissa l'origine ma che non è una rotazione. Scomparendo il termine b, si nota che l'isometria in questione è una riflessione essendo l'autospazio di -1 ortogonale a quello di 1 infatti basta osservare che la matrice è simmetrica o è possibile calcolare esplicitamente $(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) + \sin^2\alpha = 0$. Nel caso in cui non siano presenti punti fissi, ci si può sempre ricondurre al caso appena analizzato effettuando una opportuna traslazione per ottenere un punto fisso.

Possiamo quindi esprimere in maniera analitica le isometrie analizzate in precedenza per via geometrica:

(1) Traslazione di vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$:

$$\tau_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \tau \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

In altre parole

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

(2) Rotazione di centro $O = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e angolo α:

$$\rho_{O,\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \rho_{O,\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

In altre parole

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\sin\alpha + y_0 \end{cases}$$

Un caso particolare di rotazione è la simmetria centrale. Se $O = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è il centro di simmetria allora essa può essere espressa come:

$$\rho_{O,\pi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \rho_{O,\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

In altre parole

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

(3) Riflessione rispetto alla retta r passante per un punto P di coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e che interseca l'asse x formando un angolo di $\frac{\alpha}{2}$:

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

In altre parole

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + y_0 \end{cases}$$

(4) La glissosimmetria data dalla composizione della riflessione rispetto alla retta r passante per il punto P di coordinate $O = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tagliante angolo $\frac{\alpha}{2}$ con l'asse delle x e della traslazione di vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} p - x_0 \\ q - y_0 \end{pmatrix}$:

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

In altre parole

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha + p \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + q \end{cases}$$

Queste sono, pertanto, tutte e sole le possibili trasformazioni isometriche del piano. Esse sono state ricavate a partire dalla descrizione analitica delle isometrie come trasformazioni affini. Abbiamo quindi studiato le matrici A che, per il fatto che le isometrie mantengono il prodotto scalare standard, devono essere ortogonali. Si è poi notato che tali matrici potevano essere suddivise in due gruppi: quelle con determinante pari a 1 e quelle con determinante pari a -1. Infine, abbiamo studiato la varietà dei punti fissi dei due casi e abbiamo ottenuto la seguente classificazione:

(1) Se $f(\neq id)$ è diretta e ha un punto fisso, allora f è una *rotazione*;

(2) Se $f(\neq id)$ è diretta e non ha punti fissi, allora f è una *traslazione*;

(3) Se f è inversa e ha punti fissi, allora f è una *riflessione*;

(4) Se f è inversa e non ha punti fissi, allora f è una *glissosimmetria.*

Partendo dalla classificazione esposta in precedenza, possiamo affermare che:

- una isometria con un punto fisso P è composizione di al più due riflessioni e quindi o è la riflessione rispetto ad un asse passante per P o una rotazione di centro P.
- una isometria con due punti fissi $P \neq Q$ è composizione di al più una riflessione e quindi o è l'identità o la riflessione rispetto alla retta passante per i due punti.
- l'isometria con tre punti fissi non allineati è l'identità.

Segue, quindi, il seguente risultato che è uno dei più importanti sulle isometrie del piano:

Teorema 1.2. *Ogni isometria f di $\mathbb{R}^2$ è il prodotto di una, due o tre riflessioni.*

È, pertanto, possibile proporre una classificazione alternativa delle isometrie piane. Se f è un isometria data dalla composizione di k isometrie allora:

(1) Se $k = 0$, f è l'identità;

(2) Se $k = 1$, f è una riflessione rispetto ad una retta r.

(3) Se $k = 2$, f è una traslazione se le due riflessioni vengono fatte rispetto ad assi paralleli tra di loro mentre f è una rotazione se essi sono incidenti.

(4) Se $k = 3$, o f è una riflessione oppure ci si può ricondurre alla situazione in cui si effettuano due riflessioni con assi paralleli e una riflessione con asse ortogonale a questi. L'isometria f è, quindi, una glissoriflessione data dalla composizione di una traslazione con vettore $\overrightarrow{v}$ e di una riflessione con asse parallelo a $\overrightarrow{v}$.

Questo teorema porta, quindi, ad un risultato centrale per lo studio delle isometrie, poiché riduce il lavoro di classificazione delle isometrie allo studio delle riflessioni e all'analisi di tutte e sole le possibili composizioni di al più tre riflessioni. Questo risultato è anche utile per la classificazione delle isometrie nello spazio come presentato di seguito.

1.3 Le isometrie dello spazio

Quanto visto per le isometrie in $\mathbb{R}^2$ si può estendere al caso di $\mathbb{R}^3$ spazio euclideo tridimensionale dotato di riferimento cartesiano standard. Generalizzando quanto presente nel teorema 1.2, ogni isometria dello spazio è data dalla composizione di al più 4 riflessioni rispetto ai piani. La dimostrazione risulta analoga a quella delle isometrie del piano. Si ha, inoltre, che ogni isometria dello spazio se ha 1 punto fisso è composizione di al più 3 riflessioni, se ha 2 punti fissi è la composizione di al più 2 riflessioni e se ha 3 punti fissi non allineati è o l'identità o la riflessione rispetto al piano contente i 3 punti. Infine, ogni isometria dello spazio che presenta 4 punti fissi non complanari è l'identità.

Come visto nel paragrafo 1.1, una isometria in $\mathbb{R}^3$ è una affinità ed è della forma $f(X) = AX + b$ con A matrice 3×3 e $b \in \mathbb{R}^3$. Analogamente a quanto presentato in precedenza, se f è una isometria diretta allora o è composizione di 2 riflessioni oppure di 4 riflessioni rispetto a dei piani.
Nel primo caso, $f = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ è la composizione delle riflessioni rispetto ai piani α e β e, quindi, può essere o una **traslazione** se i due piani sono paralleli oppure una **rotazione** intorno alla retta r data dall'intersezione dei due piani se essi sono incidenti. Le traslazioni non presentano punti fissi mentre le rotazioni presentano punti fissi.
Nel secondo caso, $f = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$, ci si può ricondurre alla situazione in cui α e β sono incidenti e $r = \alpha \cap \beta$ mentre γ e δ sono entrambi ortogonali alla retta r. L'isometria f è, quindi, la composizione di una rotazione attorno all'asse r con la traslazione di un vettore parallelo a r. Questa isometria dello spazio viene detta **rototraslazione** o **glissorotazione** e non presenta punti fissi.

Se, invece, f è una isometria inversa allora o è una *riflessione* o è la composizione di 3 riflessioni rispetto ai piani α, β e γ. Anche in questo caso è possibile dimostrare che ci ci può ricondurre al caso in cui il piano α è ortogonale a β e a γ. L'isometria può essere, pertanto, o la composizione della riflessione rispetto al piano α con la rotazione di asse r ortogonale a

α, se β e γ sono incidenti. Oppure può essere data dalla composizione sempre della riflessione rispetto ad α con una traslazione di vettore parallelo al piano α nel caso in cui β e γ sono paralleli. Nel primo caso l'isometria viene detta **riflessione rotatoria** mentre nel secondo caso viene detta **glissoriflessione**.

1.4 Il gruppo di simmetria dei poligoni regolari

In questa sezione analizziamo il gruppo di simmetria di un poligono regolare con n lati e dimostreremo che questo è isomorfo a D_n. Iniziamo considerando alcune definizioni utili.

Definizione 1.3. Sia F una figura piana ovvero un qualsiasi sottoinsieme del piano. Il *gruppo di simmetria* $\mathrm{Iso}(F)$ di una figura F è l'insieme di tutte le isometrie del piano che la fissano cioè

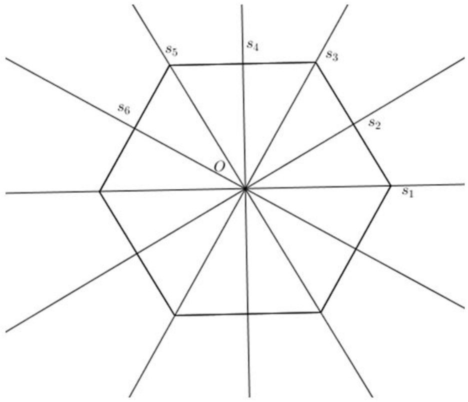
$$\mathrm{Iso}(F) = \big\{ f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) \mid f(F) = F \big\}$$

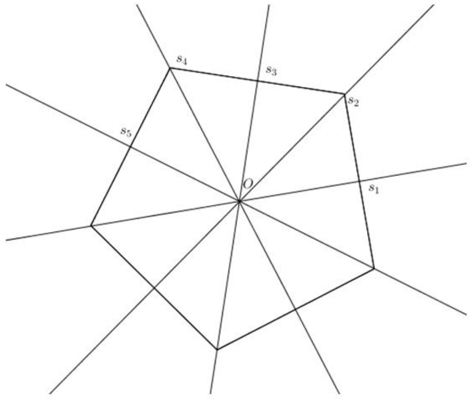
È facile verificare che $\mathrm{Iso}(F)$ è un gruppo, infatti: l'identità appartiene a $\mathrm{Iso}(F)$; qualunque sia F la composizione di due elementi di $\mathrm{Iso}(F)$ appartiene a $\mathrm{Iso}(F)$ e l'inverso di un elemento di $\mathrm{Iso}(F)$ appartiene ancora a $\mathrm{Iso}(F)$.

Definizione 1.4. Un poligono si dice *regolare* se tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali.

Sia quindi F un poligono regolare con n lati, $n \geq 3$. Vogliamo determinare il gruppo di simmetria di F, $G = \mathrm{Iso}(F)$. Indichiamo con O il baricentro del poligono, con $P_1, \ldots, P_n$ i vertici e con l_i i lati di estremi P_{i-1}, P_i. Osserviamo che ogni elemento di G fissa il punto O infatti un'isometria piana che manda un poligono regolare in se stesso deve permutare i vertici e pertanto deve fissare l'unico punto equidistante da essi ovvero il baricentro. Quindi, un tale elemento può essere soltanto o una rotazione di centro O oppure una riflessione rispetto ad una retta passante per O. Nel dettaglio il gruppo di simmetria G è costituita da :

- n rotazioni: id, ρ, ρ^2,..., ρ^{n-1} dove ρ è la rotazione di centro O e angolo $\dfrac{2\pi}{n}$.
- n riflessioni: σ_1, σ_2, ..., σ_n dove σ_i è la riflessione rispetto alla retta s_i tale che:
  - s_i è la retta passante per un vertice e il punto medio del lato opposto se n è dispari;
  - s_i è la retta passante per i punti medi di due lati opposti se n è pari.





Quindi un poligono regolare con n lati è preservato da $2n$ isometrie.

Si può facilmente dimostrare che esiste un isomorfismo tra G, gruppo di simmetria dei poligoni regolari, e D_n, gruppo diedrale. Ricordiamo che:

Definizione 1.5. Il *gruppo diedrale* su n elementi è il gruppo

$$D_n = \langle a, b : a^n = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

Il gruppo diedrale ha $2n$ elementi e precisamente:

$$D_n = \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots a^{n-1}b\}$$

Infatti da $abab = 1$ si ha $ba = a^{-1}b^{-1} = a^{-1}b$ da cui $ba^2 = a^{-1}ba = a^{-2}b$ e quindi $ba^k = a^{-k}b$.
Per verificare direttamente che $G \cong D_n$ basta mandare ρ in a e σ_1 in b. Valgono, infatti, le seguenti relazioni: $\rho^n = \sigma_1^2 = 1$ e $\rho = \sigma_2\sigma_1$ da cui $(\rho\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = 1$.

1.5 Il gruppo di simmetria dei poliedri regolari

In questa sezione viene presentata una breve descrizione dei poliedri regolari e ne vengono studiati i gruppi di simmetria sia dal punto di vista sintetico, individuando esplicitamente le diverse isometrie in ciascuno di questi gruppi, che, in alcuni casi, anche dal punto di vista algebrico, riconducendoli a dei gruppi noti ad essi isomorfi. I poliedri regolari, detti anche solidi platonici, sono particolarmente interessanti poiché sono quei poliedri che presentano la massima simmetria possibile.

Ci soffermiamo, innanzitutto, sulle definizioni di poligono e di poligono regolare. A riguardo si possono formulare diverse definizioni, noi utilizzeremo le seguenti:

Definizione 1.6. Un *poliedro* è una regione di spazio delimitata da un'unione di un numero finito di poligoni, tale che ogni lato di uno di tali poligoni coincida perfettamente con uno ed un solo lato di uno ed un solo altro poligono.

Definizione 1.7. Un poliedro convesso si dice *regolare* se sono verificate le seguenti condizioni:

1. tutte le facce sono poligoni regolari;

2. tutte le facce sono uguali tra loro;

3. tutte le figure al vertice sono poligoni regolari.

Un approccio differente che permette che sviluppare un'altra definizione di poliedro regolare passa attraverso le isometrie dello spazio. Una isometria del poliedro, ovvero una isometria dello spazio che manda il poliedro in se stesso, sposta un vertice su un vertice, uguale o diverso rispetto a quello di partenza, sposta uno spigolo su di uno spigolo e una faccia su di una faccia. Le isometrie del poliedro inducono, pertanto, delle permutazioni sull'insieme dei suoi vertici, sull'insieme dei suoi spigoli e sull'insieme delle sue facce. Queste permutazioni individuano delle classi di equivalenza entro questi insiemi che consentono di distinguere diversi tipi di vertici, spigoli e facce.

Si dirà che due vertici (o spigoli o facce) sono *equivalenti* se essi appartengono alla stessa classe di equivalenza, ovvero, se esiste una isometria del poliedro che sposta il primo nel secondo.
Partendo da questo, si può dare la seguente definizione di poliedro regolare:

Definizione 1.8. Un poliedro si dice *poliedro regolare* se ha tutte le facce poligoni regolari equivalenti, tutti gli spigoli equivalenti e tutti i vertici equivalenti.

Possiamo, quindi, descriverli come quei poliedri in cui sia i vertici, che gli spigoli, che le facce, sono indistinguibili rispetto all'azione del gruppo di simmetria.
Si può dimostrare che le due definizioni date sono equivalenti e che entrambe portano ad individuare lo stesso numero di solidi platonici possibili. In particolare si ha il seguente teorema:

Teorema 1.9. *Esistono esattamente cinque solidi platonici a meno di similitudini e questi sono il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.*

Volendosi soffermare principalmente sui gruppi di simmetria dei solidi platonici, si è pensato di tralasciare la dimostrazione di questo risultato importante.

Prima di procedere, è bene richiamare anche la seguente definizione interessante per la trattazione successiva:

Definizione 1.10. Due poliedri P e Q sono *duali* se esiste una corrispondenza biunivoca T fra gli fra gli insiemi di vertici, spigoli e facce di P e di Q che inverte le adiacenze. Più precisamente T associa rispettivamente ad ogni vertice di P una faccia di Q, ad ogni spigolo di P uno spigolo di Q, ad ogni faccia di P un vertice di Q, in modo che una faccia F di P incida su uno spigolo S se e solo se lo spigolo $T(S)$ incide sul vertice $T(F)$ e, viceversa, uno spigolo S incide su un vertice V di P se e solo se la faccia $T(V)$ incide su $T(S)$.

Se P è un poliedro regolare, un duale è ottenuto scegliendo il baricentro di ogni faccia e prendendo il solido convesso con vertici questi punti. Nel caso dei solidi platonici, si può verificare direttamente che:

- il duale di un tetraedro è un tetraedro;
- il cubo e l'ottaedro sono duali;
- il dodecaedro e l'icosaedro sono duali.

Infatti, se costruiamo il duale come inviluppo convesso dei baricentri delle facce, se partiamo da un solido platonico troveremo un altro solido platonico, e se ripetiamo l'operazione due volte troveremo un solido simile a quello di partenza, ma più piccolo.

Analizziamo, quindi, le caratteristiche di simmetria dei poliedri regolari. Come nel caso dei poligoni, definiamo il gruppo di simmetria $\mathrm{Iso}(P)$ di un poliedro regolare P come $\mathrm{Iso}(P) = \{f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3) : f(P) = P\}$. Anticipiamo fin da subito che, come i poligoni regolari sono legati ai gruppi finiti di isometria del piano, così i poliedri regolari sono collegati ai gruppi finiti di isometrie nello spazio.

Si osserva che una tale f lascia fisso il centro O del poliedro regolare cioè $f(O) = O$, pertanto, le isometrie di $\mathrm{Iso}(P)$ possono essere solamente quelle che presentano punti fissi ovvero rotazioni, riflessioni e riflessioni rotatorie.

Prima di analizzare esplicitamente i gruppi di simmetria dei solidi platonici, osserviamo che se P è un poliedro regolare e P' è il suo duale, ogni isometria che fissa P allora fissa anche P' e viceversa quindi i gruppi di simmetria coincidono. É per questo motivo che descrivendo i gruppi di simmetria dei 5 poliedri regolari non si trovano 5 gruppi ma solamente 3. Le isometrie del cubo preservano anche l'ottaedro duale, le quali a loro volta preservano il cubo ad esso duale. Alla stessa maniera dodecaedro e icosaedro presentano lo stesso numero di isometrie. É sufficiente quindi analizzare quali sono le isometrie del tetraedro, del cubo e del dodecaedro. Prima di procedere nell'analisi è importante richiamare il seguente risultato utile per la trattazione successiva.

Proposizione 1.11. *Sia A uno spazio affine su V di dimensione n e $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ due $(n+1)$-ple di punti indipendenti allora esiste una unica affinità $f : A \to A$ tale che $f(P_i) = Q_i \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n$.*

Nel caso quindi di $\mathbb{R}^3$ una affinità viene definita da dove vengono mandati 4 punti indipendenti. Nel caso specifico delle isometrie dei poliedri regolari, come detto, il centro del solido resta fisso, quindi è sufficiente determinare l'immagine di 3 vertici.

Questa proposizione, assieme a delle opportune osservazioni sui vertici dei poliedri, permette di stabilire il numero massimo di elementi contenuti in $\mathrm{Iso}(P)$ per ogni poliedro P. Partendo da questo viene, quindi, dimostrato che, per ogni P, gli elementi di $\mathrm{Iso}(P)$ sono esattamente quel numero massimo individuato in precedenza. Per provare questo si proporrà una elencazione esplicita degli stessi.

1.5.1 Il gruppo di simmetria del tetraedro

Sia T_4 un tetraedro e $\mathrm{Iso}(T_4)$ il suo gruppo di simmetria.
Individuiamo prima di tutto il numero di elementi di tale gruppo. Poiché una isometria del poliedro manda vertici in vertici, essi subiscono una permutazione. Come affermato in precedenza, è sufficiente fissare dove vanno 3 vertici per determinare in maniera univoca l'isometria. Nel caso del tetraedro le isometrie potranno, dunque, essere al più $4! = 24$. Dimostriamo che esse sono esattamente questo numero, trovandole tutte in maniera esplicita.

Iniziamo analizzando le isometrie dirette di $\mathrm{Iso}(T_4)$. Visto che esse devono fissare il centro del poliedro regolare possono essere solamente delle rotazioni con asse passante per il centro del tetraedro. I possibili assi di rotazione sono quindi di due tipi:

- assi passanti per i punti medi di due spigoli opposti e sono assi con periodo di rotazione 2. Esistono 3 rette di questo tipo e per ognuna di esse si ha una sola rotazione diversa dall'identità;
- assi passanti per un vertice e il centro della faccia opposta che producono rotazioni di angolo $\pm\frac{2}{3}\pi$ che fissano il tetraedro. Esistono 4 rette di questo tipo che contribuiscono ognuna con 2 rotazioni diverse dall'identità.

In totale si hanno, quindi, $1 + 3 + 8 = 12$ isometrie dirette contando anche l'identità.

Tra le isometrie inverse annoveriamo 6 riflessioni rispetto a piani passanti per uno spigolo e per il punto medio dello spigolo opposto. Avendo trovato una isometria inversa e in precedenza 12 isometrie dirette, è possibile comporle tra loro ottenendo 12 isometrie inverse. Da questo è possibile dedurre che, visto che il numero massimo di isometrie del tetraedro sono

24, esse sono esattamente questo numero di cui 12 inverse e 12 dirette. Si hanno, quindi, ulteriori 6 isometrie inverse, oltre alle riflessioni, che sono delle riflessioni rotatorie date dalla composizione di una rotazione di angolo $\pm\frac{\pi}{2}$ con la riflessione rispetto ad un piano ortogonale all'asse di rotazione e passante per il centro del tetraedro.

Abbiamo, quindi, trovato tutte e 24 le isometrie di $\mathrm{Iso}(T_4)$.

Vogliamo ora dimostrare che il gruppo di simmetria del tetraedro è isomorfo a S_4 ovvero il gruppo formato dall'insieme delle permutazioni dei primi 4 interi $1, 2, 3, 4$. Sia $G = \mathrm{Iso}(T_4)$. Ad ogni isometria $g \in G$ associamo la permutazione che essa induce sui vertici del tetraedro. Si ha un omomorfismo di gruppi che è iniettivo in quanto se g fissa tutti e 4 i vertici allora g è l'identità ed è anche suriettivo, infatti, la riflessione rispetto ad un piano che contiene lo spigolo s e il punto medio dello spigolo opposto s' fissano i due vertici di s e scambiano tra loro i due vertici di s'.

1.5.2 Il gruppo di simmetria del cubo

Sia C_6 un cubo e $\mathrm{Iso}(C_6)$ il suo gruppo di simmetria. Ricordiamo che le isometrie del cubo preservano anche l'ottaedro ad esso duale, le quali a loro volta preservano il cubo ad esso duale.

Indaghiamo prima di tutto qual è la dimensione di $\mathrm{Iso}(C_6)$. Visto che una isometria di un poliedro deve mandare vertici in vertici, spigoli in spigoli e facce in facce; nel caso specifico del cubo deve permutare le 6 facce e quindi $\mathrm{Iso}(C_6)$ avrà al più $6! = 720$ elementi. Questo numero è eccessivo, infatti, ricordando la proposizione 1.11 e quanto osservato in precedenza, è sufficiente fissare 3 vertici del cubo essendo il centro fisso. L'isometria deve, inoltre, mandare facce opposte in facce opposte e facce adiacenti in adiacenti. Con questa limitazione restano quindi accettabili solamente $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ permutazioni delle facce del cubo.

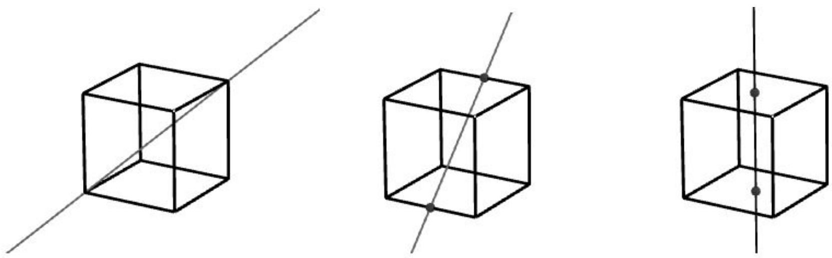
Abbiamo quindi trovato che le isometrie del cubo sono al più 48, proviamo ora che sono esattamente questo numero trovandole tutte. Iniziamo analizzando le isometrie dirette di $\mathrm{Iso}(C_6)$. Come già detto in precedenza, poiché gli elementi di $\mathrm{Iso}(C_6)$ fissano il centro del cubo O, non possono essere che le rotazioni di asse una retta che passa per O.

L'asse di rotazione deve intersecare la superficie del cubo in due punti, antipodali, che possono essere soltanto o due vertici opposti, o i punti medi di due spigoli opposti, oppure i centri di due facce opposte. Se ciò non accadesse, se quindi per esempio l'asse intersecasse la superficie del cubo in un punto P appartenente ad uno spigolo s, diverso da un suo vertice, la rotazione manderebbe s in sé stesso e quindi, se non si considera l'identità, P deve essere il punto medio di s. Infatti l'immagine di s deve essere uno spigolo del cubo e deve contenere il punto P che è fisso per la rotazione: ma s è l'unico spigolo che contiene P. Un ragionamento analogo viene applicato al caso in cui il punto P è un punto interno a una faccia. Distinguiamo quindi i seguenti casi:

- le rette passanti per 2 vertici opposti sono assi di una rotazione di angolo $\pm\frac{2}{3}\pi$ che fissa il cubo. Esistono 4 rette di questo tipo e per ognuna di esse si hanno $3 - 1 = 2$ rotazioni diverse dall'identità. Le rotazioni di questo tipo sono quindi in tutto 8;

- le rette per i punti medi di due spigoli opposti sono assi di una rotazione di angolo π che fissa il cubo. Esistono 6 rette di questo tipo per ognuna delle quali si può individuare una sola rotazione diversa dall'identità. Quindi ci sono 6 rotazioni di questo tipo;

- le rette passanti per i centri di due facce opposte sono assi di una rotazione di ordine 4 che fissa il cubo. Le rette di questo tipo sono 3 e per ognuna di esse si hanno 3 rotazioni diverse dall'identità quindi in totale 9 rotazioni di angoli π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$.



Abbiamo quindi $1 + 8 + 6 + 9 = 24$ rotazioni del cubo includendo anche l'identità.

Passando alle isometrie inverse, queste possono essere o riflessioni rispetto a un piano che passa per il centro O del cubo oppure rotoriflessioni, cioè composizioni della rotazione intorno ad un asse r con la riflessione rispetto a un piano α ortogonale a r come visto nel caso del tetraedro. Per quanto spiegato in precedenza, r e α si devono incontrare nel centro O del cubo.

Le riflessioni sono 9 di cui 3 rispetto a piani paralleli a due facce opposte del cubo e 6 rispetto a piani che contengono due spigoli opposti del cubo.

È stata, quindi, trovata anche in questo caso un isometria inversa e sono state individuate 24 isometrie dirette. Componendo una isometria inversa con quelle dirette si ottengono 24 isometrie inverse di cui 9 sono, come visto, delle riflessioni. Si può concludere che, essendo il numero massimo di isometrie del cubo 48, le isometrie sono 24 dirette e 24 inverse e che è necessario individuare le restanti 15. Queste ultime sono le riflessioni rotatorie che però non sono così semplici da descrivere.

Le 48 isometrie del cubo sono quindi 24 rotazioni compresa l'identità , 9 riflessioni e 15 riflessioni rotatorie. Per l'ottaedro troviamo lo stesso gruppo di simmetria con la differenza che le facce sono scambiate con i vertici: per esempio, gli assi di rotazione di ordine 3 non sono quelli passanti per due vertici opposti ma per i centri di due facce opposte mentre gli assi di ordine 4 sono quelli passanti per due vertici opposti.

1.5.3 Il gruppo di simmetria del dodecaedro

Sia D_{12} un dodecaedro e $\mathrm{Iso}(D_{12})$ il suo gruppo di simmetria. Per quanto affermato in precedenza, questo gruppo coincide con il gruppo di simmetria dell'icosaedro $\mathrm{Iso}(I_{20})$ essendo il suo duale.

Procedendo con un ragionamento di tipo combinatorio analogo a quello per il cubo, si ottiene che la dimensione di $\mathrm{Iso}(D_{12})$ è al massimo $12 \cdot 5 \cdot 2 = 120$.

Partiamo dalle isometrie dirette che, come abbiamo visto, possono essere solo rotazioni con asse passante per il centro O del poliedro. Si possono distinguere i seguenti casi:

- rette passanti per due vertici opposti che sono assi di ordine 3 che fissano il dodecaedro. Ci sono 20 vertici e quindi 10 assi di questo tipo e per ognuna di esse si hanno due rotazioni diverse dall'identità di angoli $\pm\frac{1}{3}\pi$ e $\pm\frac{2}{3}\pi$. Ci sono, quindi, 20 rotazioni di questo tipo;
- rette che uniscono i centri di due facce opposte che sono assi di ordine 5 che fissano il dodecaedro. Le facce del dodecaedro sono 12 e quindi abbiamo 6 assi di questo tipo ognuno dei quali ammette 4 rotazioni diverse dall'identità di angoli $\pm\frac{2k\pi}{5}$ con $k = 1, 2, 3, 4$. Abbiamo, pertanto, descritto 24 rotazioni differenti;
- rette passanti per i punti medi di due spigoli opposti e rotazioni pari all'angolo piatto. Essendo 30 gli spigoli del dodecaedro, esistono 15 assi di questo tipo ognuno dei quali contribuisce con una rotazione diversa dall'identità. Si hanno quindi in totale 15 rotazioni di angolo π.

Abbiamo quindi $1+20+24+15 = 60$ rotazioni che fissano il dodecaedro. Le restanti 60 sono isometrie inverse che si ottengono componendo la simmetria centrale per il baricentro del dodecaedro con le 60 rotazioni individuate in precedenza. Tra queste 15 sono isometrie rispetto ad un piano.