



Il problema della brachistocrona

Una particella è vincolata a muoversi, sotto l'azione della sola forza di gravità, da un punto A a un punto B (più basso). Trovare il percorso per il quale la particella si muova da A a B nel minor tempo possibile, nell'ipotesi che la velocità iniziale in A sia nulla.

In questa parte vogliamo presentare la risoluzione variazionale del problema. Essa consiste nel calcolare la variazione prima del funzionale tempo. Nella prima sezione deriveremo tale funzionale. All'equazione di Eulero corrispondente, cioè alla variazione prima del funzionale, è dedicata la seconda sezione. Nella terza sezione proveremo che la brachistocrona non può essere né il segmento, né l'arco di circonferenza, né l'arco di parabola. Troveremo infine che l'equazione di Eulero è soddisfatta dalla curva cicloide. Nella quarta sezione tratteremo il caso particolare delle cicloidi generalizzate, curve che pur soddisfacendo l'equazione di Eulero non sono soluzione del problema della brachistocrona. Concludiamo mostrando che la cicloide è l'unico punto di minimo per il funzionale tempo.

Il funzionale tempo

Nel corso dell'intera trattazione considereremo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso, cioè concorde con la direzione della forza di gravità. Fissiamo il punto di partenza $A(0, 0)$ nell'origine degli assi e il punto $B(x_B, y_B)$ con $x_B > 0$, $y_B > 0$. Il problema di Bernoulli richiede di trovare una curva che minimizza il tempo per passare da A a B . La famiglia delle "curve ammissibili" che consideriamo qui è costituita dai grafici delle funzioni

$$y : [0, x_B] \longrightarrow \mathbb{R}$$

di classe C^2 e (naturalmente) tali che $y(0) = 0$ e $y(x_B) = y_B$. Indichiamo con G_y il grafico di y e con $T(y)$ il tempo impiegato dalla particella per passare da A

a B percorrendo G_y . Vogliamo calcolare l'espressione di $T(y)$ e successivamente trovare y che minimizza $T(y)$. Dato $x \in [0, x_B]$, indichiamo con $v(x)$ e $\tau(x)$, rispettivamente, la velocità del grave quando questo occupa la posizione $(x, y(x))$ e il tempo impiegato, partendo da A , per raggiungere tale posizione. Allora la velocità $v(x)$ è data da:

$$\begin{aligned} v(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + [y(x+h) - y(x)]^2}}{\tau(x+h) - \tau(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + [y(x+h) - y(x)]^2}}{h} \cdot \frac{h}{\tau(x+h) - \tau(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left[1 + \frac{y(x+h) - y(x)}{h}\right]^2}}{\frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\tau'(x)}. \end{aligned}$$

Da questa espressione ricaviamo

$$\tau'(x) = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x)} \quad (1)$$

e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo l'espressione per il tempo

$$\begin{aligned} T(y) &= \tau(x_B) - \tau(0) = \int_0^{x_B} \tau'(x) dx \\ &= \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x)} dx. \end{aligned} \quad (2)$$

A questo punto vogliamo esprimere anche la velocità in termini di y . Dal bilancio energetico, ricaviamo che la velocità della particella quando transita alla quota $y(x)$ è pari a

$$v(x) = \sqrt{2g} \sqrt{y(x)}.$$

Il problema è ora quello di minimizzare il **funzionale tempo**

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} dx \quad (3)$$

nello spazio delle funzioni ammissibili

$$S := \{y \in C[0, x_B]: y \text{ è } C^2 \text{ a tratti, } y(0) = 0, y(x_B) = y_B, y_{|(0, x_B)} > 0\}.$$

L'equazione di Eulero

In questa sezione cerchiamo una funzione y che minimizzi il funzionale T , seguendo il procedimento inventato da Eulero, allievo di Johann Bernoulli. A questo scopo andiamo a calcolare la variazione prima del funzionale trovato. Supponiamo che y sia una soluzione, cioè un minimo di T . Sia $\varphi \in C_c^2(0, x_B)$ e per $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ consideriamo la nuova funzione

$$y + t\varphi : [0, x_B] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $y + t\varphi \in S$, purché $|t|$ sia sufficientemente piccolo. Poniamo

$$f_\varphi(t) := T(y + t\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y' + t\varphi')^2}{y + t\varphi}} dx, \quad (4)$$

per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tale che questa definizione abbia senso. Osserviamo che f è di classe C^1 e che

$$f_\varphi(t) \geq f_\varphi(0) \quad (\text{per } |t| \text{ sufficientemente piccolo})$$

quindi

$$f'_\varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^2(0, x_B).$$

Calcoliamo dunque $f'_\varphi(0)$, che è detta **variazione prima** del funzionale T , e poniamola pari a zero:

$$\begin{aligned} 0 = f'_\varphi(0) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{1 + y'^2}} \times \frac{2y'\varphi' - \varphi(1 + y'^2)}{y^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{y}{1 + y'^2}} \left(\frac{2y'\varphi'}{y} - \frac{\varphi(1 + y'^2)}{y^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} 2\sqrt{\frac{y'^2}{(1 + y'^2)y}} \varphi' - \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y^3}} \varphi dx \end{aligned}$$

dunque

$$0 = \int_0^{x_B} 2\sqrt{\frac{y'^2}{(1 + y'^2)y}} \varphi' dx - \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y^3}} \varphi dx. \quad (5)$$

Integriamo per parti il primo integrale:

$$\begin{aligned} &\left(2\sqrt{\frac{y'^2}{(1 + y'^2)y}} \varphi \right)_0^{x_B} - 2 \int_0^{x_B} \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1 + y'^2)y}} \right)' \varphi dx \\ &= -2 \int_0^{x_B} \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1 + y'^2)y}} \right)' \varphi dx \end{aligned} \quad (6)$$

Sostituendo (6) nell'espressione (5) otteniamo che $\forall \varphi \in C_c^2(0, x_B)$ vale

$$0 = \int_0^{x_B} \left[2 \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \right)' + \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} \right] \varphi dx \quad (7)$$

che, per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, equivale a

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \right)' + \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+y'^2)y}{y'^2}} \times \frac{2y'y''(1+y'^2)y - y'^2(2yy'y'' + y' + y'^3)}{(1+y'^2)^2 y^2} + \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}}. \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli troviamo la seguente equazione differenziale

$$2yy'' + y'^2 + 1 = 0 \quad (8)$$

che è detta **equazione di Eulero**.

Osservazione 1. *La soluzione non può avere derivata costante su un sottointervallo I di $[0, x_B]$, altrimenti se*

$$y'|_I = \text{cost} = c$$

allora l'equazione di Eulero nell'intervallo I darebbe

$$c^2 + 1 = 0$$

il che è impossibile.

Grazie all'Osservazione 1 possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'equazione di Eulero per y' con la certezza che questo non modifichi le soluzioni dell'equazione stessa

$$2yy'y'' + y'^3 + y' = 0$$

cioè

$$D[y'^2 y] + y' = 0$$

che equivale a

$$D[y'^2 y + y] = 0$$

e ci permette di concludere che

$$y[1 + y'^2] = \text{costante}. \quad (9)$$

Questa equazione ottenuta dall'equazione di Eulero è detta **condizione di brachistocrona**. Possiamo quindi concludere affermando che le candidate brachistocrona sono da ricercarsi tra le funzioni y continue e C^2 a tratti tali che

$$y(0) = 0 \quad y(x_B) = y_B$$

e che soddisfano l'equazione di Eulero, o, equivalentemente, la condizione di brachistocrona, per tutte le $x \in [0, x_B]$.

Test di esclusione

I matematici contemporanei di Bernoulli, non sapendo risolvere le equazioni differenziali, procedettero per tentativi, verificando se le curve note all'epoca soddisfacevano o meno la condizione di brachistocrona.

Osservazione 2. Per $x \mapsto 0$ abbiamo che $y(x) \mapsto 0$. Dalla condizione di brachistocrona

$$y(1 + y'^2) = \text{costante} = c$$

si ricava che

$$\text{se } x \mapsto 0^+ \quad \text{allora} \quad 1 + y'^2(x) = \frac{c}{y(x)} \mapsto +\infty .$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = +\infty$$

cioè la curva brachistocrona deve avere tangente verticale in $A = (0, 0)$.

Il segmento

L'Osservazione 2 ci permette di scartare subito il segmento dalle candidate brachistocrona (infatti la tangente al segmento in A non è verticale). Alla stessa conclusione si perviene sostituendo

$$y(x) = mx, \quad m = \frac{y_B}{x_B}$$

nell'equazione di brachistocrona. Si ottiene

$$y(x)[1 + y'(x)^2] = mx(1 + m^2) \neq \text{costante}$$

e quindi possiamo concludere che il segmento non è la brachistocrona.

La circonferenza

Sulla base dell'Osservazione 2 possiamo considerare la circonferenza passante per $A = (0, 0)$ e B , tangente all'asse y in $A = (0, 0)$. Se indichiamo con R il suo raggio, abbiamo

$$y(x) = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

Allora otteniamo

$$\begin{aligned} y(x)[1 + y'(x)^2] &= \sqrt{2Rx - x^2} \left[1 + \left(\frac{2R - 2x}{2\sqrt{2Rx - x^2}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{R^2}{\sqrt{2Rx - x^2}} \end{aligned}$$

e tale quantità non è costante. Dunque neanche la circonferenza è la brachistocrona.

La curva α -Hölderiana (con $\alpha \in (0, 1)$)

Sempre sulla base dell'Osservazione 2, possiamo considerare anche

$$y(x) = mx^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha \in (0, 1), \quad m = \frac{y_B}{x_B^\alpha}.$$

In tal caso abbiamo

$$\begin{aligned} y(x)[1 + y'(x)^2] &= mx^\alpha [1 + (m\alpha x^{\alpha-1})^2] \\ &= mx^\alpha (1 + m^2 \alpha^2 x^{2\alpha-2}) \end{aligned}$$

e tale quantità non risulta costante, quindi il grafico di tale funzione non è la brachistocrona.

La soluzione del problema: la cicloide

Tra le curve note vi era anche la cicloide, che era stata studiata da Huygens nelle sue ricerche sui pendoli ideali e per questo aveva acquisito il titolo di tautocrona. Scriviamo dunque la parametrizzazione della cicloide e verifichiamo che tale curva soddisfa la condizione di brachistocrona. Consideriamo la cicloide rovesciata generata da una circonferenza di raggio R che rotola sull'asse delle ascisse come nella Figura 1.

Allora una parametrizzazione di un arco liscio massimale è data da

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

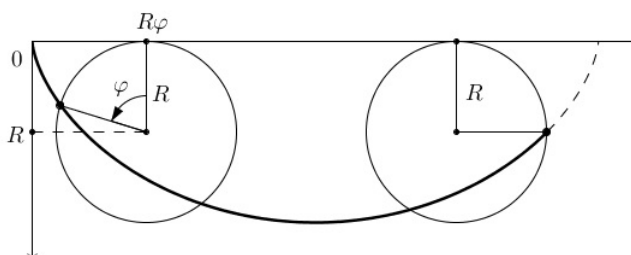


Figura 1: *Costruzione di una cicloide.*

con

$$\gamma(\varphi) := (\gamma_1(\varphi), \gamma_2(\varphi)) = (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi). \quad (10)$$

Se $x \mapsto y(x)$ è la funzione di cui è grafico questa cicloide, allora abbiamo

$$y(\gamma_1(\varphi)) = \gamma_2(\varphi)$$

e quindi

$$y'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi) = \gamma_2'(\varphi).$$

Allora, se $x \in [0, 2\pi R]$ e se $\varphi \in [0, 2\pi]$ è tale che $\gamma_1(\varphi) = x$, vale

$$\begin{aligned} y(x)[1 + y'(x)^2] &= \gamma_2(\varphi) \left[1 + \frac{\gamma_2'(\varphi)^2}{\gamma_1'(\varphi)^2} \right] \\ &= \gamma_2(\varphi) \frac{\|\gamma'(\varphi)\|^2}{\gamma_1'(\varphi)^2} \\ &= (R - R \cos \varphi) \frac{2R^2 - 2R^2 \cos \varphi}{(R - R \cos \varphi)^2} \\ &= 2R \\ &= \text{costante}. \end{aligned} \quad (11)$$

Abbiamo così provato che ogni cicloide (anche se non passa per B) soddisfa la condizione di brachistocrona.

Osservazione 3. *Se indichiamo con $\alpha(y)$ l'angolo formato dalla verticale con la tangente alla cicloide nel punto di ordinata y , abbiamo*

$$\alpha(\gamma_2(\varphi)) = \frac{\varphi}{2}. \quad (12)$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 \cos[\alpha(\gamma_2(\varphi))] &= \frac{\gamma'(\varphi) \cdot (0, 1)}{\|\gamma'(\varphi)\|} \\
 &= \frac{\gamma'_2(\varphi)}{\|\gamma'(\varphi)\|} \\
 &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi)}} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \\
 &= \cos \frac{\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

da cui effettivamente segue (12).

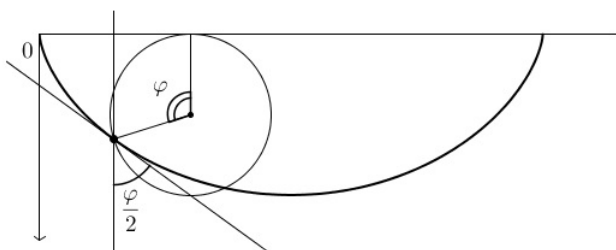


Figura 2: Rappresentazione della relazione (12).

Osservazione 4. La lunghezza della cicloide generata da una circonferenza di raggio R è pari a $8R$. Infatti da (10) abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi &= R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi \\
 &= R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \\
 &= 4R \left[-\cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= 8R.
 \end{aligned}$$

Le cicloidi generalizzate

Abbiamo visto che le soluzioni del problema della brachistocrona sono da ricercarsi tra le curve che soddisfano l'equazione

$$y[1 + y'^2] = \text{costante}. \quad (13)$$

Abbiamo anche dimostrato che la cicloide soddisfa tale condizione. Tuttavia si possono costruire altre curve che soddisfano la condizione di brachistocrona. Si tratta di funzioni ottenute combinando cicloidi e funzioni costanti, e per tale motivo noi le chiameremo cicloidi generalizzate. Vediamo come costruire tali funzioni.

Consideriamo i punti $A = (0, 0)$ e $B = (x_B, y_B)$. Disegniamo il fascio di cicloidi aventi origine in A , come nella Figura 3. Ogni cicloide del fascio è univocamente identificata dal raggio r del suo cerchio generatore. Indichiamo dunque con C_r la cicloide di raggio r e con γ_r la sua parametrizzazione

$$\gamma_r(\varphi) = (r\varphi - r \sin \varphi, r - r \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (14)$$

Possiamo affermare che esiste un'unica cicloide del fascio passante per il punto B : sia R tale che $B \in C_R$.

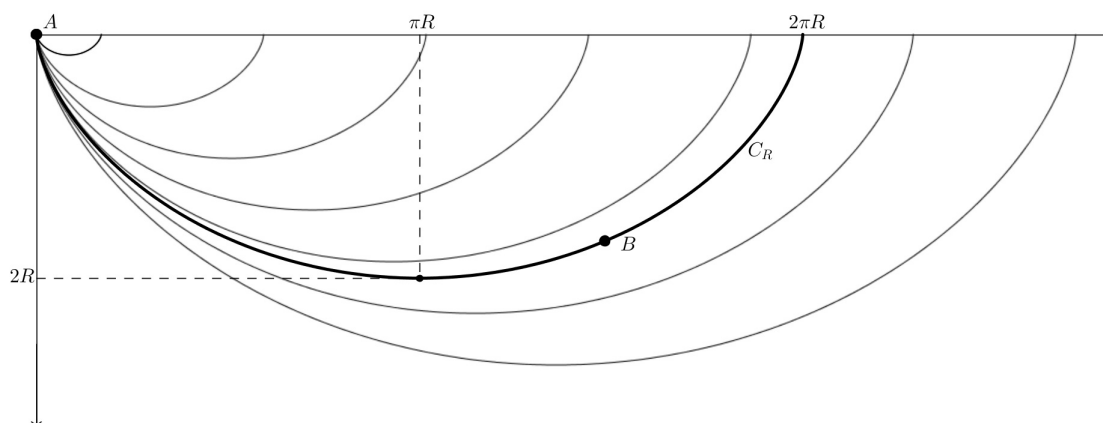


Figura 3: Con la linea più nera è indicata C_R , la cicloide del fascio passante B .

Ora proseguiamo con la costruzione delle cicloidi generalizzate. Cominciamo con la cicloide generalizzata più semplice, che indichiamo con CS poiché è formata da una cicloide e da un segmento. Consideriamo la cicloide C_r che è tangente alla retta $y = y_B$ nel punto $\gamma_r(\pi)$. Allora deve valere

$$r = \frac{y_B}{2}.$$

Componendo la semicicloide $\gamma_{y_B/2}([0, \pi])$ e il segmento che unisce i punti $(\frac{\pi}{2}y_B, y_B)$ e B otteniamo la curva CS , rappresentata in rosso nella Figura 4.

Più in generale per ogni $y_0 \in [y_B, 2R]$ possiamo costruire una cicloide generalizzata unendo i seguenti tre archi di curva (vedi Figura 4):

Notiamo che, ovviamente, $F_{y_0/2}$ è di classe C^1 e C^2 a tratti. In seguito indicheremo tale cicloide generalizzata con CSC_{y_0} .

Vogliamo ora verificare che è ragionevole considerare CSC_{y_0} come candidata soluzione al problema della brachistocrona. Innanzitutto risulta semplice (anche per gli studenti!) capire che la CSC_{y_0} soddisfa la condizione di brachistocrona. Infatti, la condizione (13) è verificata da $F_{y_0/2}$ e, più precisamente, abbiamo che

$$F_{y_0/2}[1 + (F'_{y_0/2})^2] = y_0. \quad (16)$$

Sorge spontanea la questione: la CSC_{y_0} è di classe C^2 ? La seguente osservazione ci mostra che la risposta a tale questione è negativa.

Osservazione 5.

$F_{y_0/2}$ non è di classe C^2 . Infatti:

- Ovviamente vale

$$\lim_{x \rightarrow \pi y_0/2^+} F''_{y_0/2}(x) = 0;$$

- Dalla parametrizzazione (14) della cicloide $C_{y_0/2}$ (indicando per semplicità con ξ la prima componente di $\gamma_{y_0/2}$ e con F la funzione $F_{y_0/2}$), per $\varphi \in (0, \pi)$, abbiamo

$$F(\xi(\varphi)) = \frac{y_0}{2} - \frac{y_0}{2} \cos \varphi$$

e quindi

$$F'(\xi(\varphi))\xi'(\varphi) = \frac{y_0}{2} \sin \varphi$$

cioè

$$F'(\xi(\varphi)) = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

Pertanto abbiamo anche (per $\varphi \in (0, \pi)$)

$$F''(\xi(\varphi))\xi'(\varphi) = \frac{\cos \varphi(1 - \cos \varphi) - \sin^2 \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F''(\xi(\varphi)) &= \frac{\cos \varphi - \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{(y_0/2)(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)^2} \\ &= \frac{2(\cos \varphi - 1)}{y_0(1 - \cos \varphi)^3} \\ &= -\frac{2}{y_0(1 - \cos \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow \pi y_0/2^-} F''_{y_0/2}(x) = \lim_{\varphi \rightarrow \pi^-} F''(\xi(\varphi)) = -\frac{1}{2y_0} \neq 0.$$

Questo ci permette di concludere che la funzione $F_{y_0/2}$ non è $C^2[x_A, x_B]$.

Ora vogliamo provare che le CSC, pur soddisfacendo la condizione di brachistocrona, non sono soluzioni del problema di Bernoulli. Lo studente lo può osservare grazie al software sui test di esclusione, mentre per l'insegnante riportiamo l'articolo di Donald C. Benson "An elementary solution of the brachistochrone problem", dove l'autore dimostra che la cicloide è l'unico punto di minimo per il funzionale tempo.

L'articolo di Benson

Come di consueto consideriamo il piano cartesiano con l'asse delle ordinate rivolta verso il basso e per semplicità supponiamo che il punto di partenza A e di arrivo B abbiano la stessa quota:

$$A = (0, 0), \quad B = (x_B, 0).$$

Il problema della brachistocrona richiede di minimizzare il funzionale tempo (3)

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx. \quad (17)$$

nello spazio delle funzioni ammissibili

$$S := \{y \in C^1[0, x_B]: y \text{ è } C^2 \text{ a tratti, } y(0) = 0, y(x_B) = 0, y_{|(0, x_B)} > 0\}.$$

Poniamo

$$\mathcal{M}(y) := \max_{x \in [0, x_B]} y(x)$$

e

$$M_0 := \frac{x_B}{\pi}. \quad (18)$$

Per $M \leq M_0$ consideriamo la cicloide generalizzata CSC_M .

Osservazione 6.

(i) Per ogni $M \leq M_0$ si ha $F_{M/2} \in S$ e

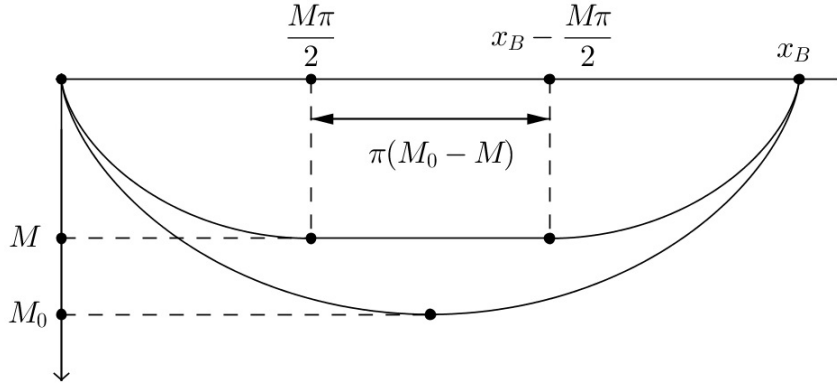


Figura 5: Cicloide generalizzata CSC_M e cicloide $C_{M_0/2}$.

$$\mathcal{M}(F_{M/2}) = M.$$

(ii) Per $M < M_0$ il segmento in CSC_M è proprio. Per $M = M_0$ tale segmento si riduce a un punto e la CSC_{M_0} è congruente alla cicloide $C_{M_0/2}$.

Definiamo la funzione

$$u(x) := \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(x^{-\frac{1}{2}} x_B + \pi x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} (M_0 x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}), \quad x \in (0, +\infty). \quad (19)$$

Osservazione 7.

(i) Studiando il segno di u' si dimostra che M_0 è punto di minimo, cioè

$$u(x) > u(M_0) \text{ per ogni } x \neq M_0.$$

(ii) Per $M \leq M_0$ si ha

$$T(F_{M/2}) = u(M). \quad (20)$$

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} u(M) &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}} (M_0 M^{-\frac{1}{2}} + M^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{M} \left(\frac{M_0}{M} + 1 \right). \end{aligned}$$

Per (15) e (18) otteniamo

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2g} T(F_{M/2}) &= \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + F'_{M/2}(x)^2}{F_{M/2}(x)}} dx \\
 &= \int_0^{M\pi/2} \sqrt{\frac{1 + F'_{M/2}(x)^2}{F_{M/2}(x)}} dx + \int_{M\pi/2}^{x_B - M\pi/2} \frac{1}{\sqrt{M}} dx \\
 &\quad + \int_{x_B - M\pi/2}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + F'_{M/2}(x)^2}{F_{M/2}(x)}} dx \\
 &= \int_0^{M\pi/2} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx + \frac{x_B - M\pi}{\sqrt{M}} \\
 &\quad + \int_{M\pi/2}^{M\pi} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx \\
 &= \int_0^{M\pi} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx + \frac{\pi(M_0 - M)}{\sqrt{M}}.
 \end{aligned}$$

Per la proprietà tautocrona della cicloide abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{M\pi} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx = T(f_{M/2}) = 2\sqrt{\frac{M}{2g}} \pi.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 T(F_{M/2}) &= 2\sqrt{\frac{M}{2g}} \pi + \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\pi(M_0 - M)}{\sqrt{M}} \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \left[2\sqrt{M} + \frac{M_0 - M}{\sqrt{M}} \right] \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{M} \left(\frac{M_0}{M} + 1 \right) \\
 &= u(M).
 \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.

(i) Per ogni $y \in S$ vale

$$T(y) \geq u(\mathcal{M}(y)). \tag{21}$$

(ii) L'identità (21) vale se e solo se il grafico di y è una CSC.

Dimostrazione. (i) Poniamo per semplicità $M := \mathcal{M}(y)$. Grazie alla disuguaglianza di Cauchy

$$|c + bd| = |(1, b) \cdot (c, d)| \leq (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}(c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Posto

$$b := |y'(x)|, \quad c := M^{-\frac{1}{2}}, \quad d := \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}},$$

otteniamo

$$M^{-\frac{1}{2}} + |y'(x)| \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + y'(x)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y(x)^{\frac{1}{2}}} \quad (22)$$

da cui, integrando, segue

$$\begin{aligned} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx &\geq M^{-\frac{1}{2}} \int_0^{x_B} dx + \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &= \frac{x_B}{M^{\frac{1}{2}}} + \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Osserviamo che nella disuguaglianza di Cauchy l'uguaglianza vale se e solo se i vettori $(1, b)$ e (c, d) sono paralleli, cioè se e solo se vale

$$(1, b) \cdot (-d, c) = cb - d = 0.$$

Ciò significa che in (22) l'uguaglianza vale se e solo se è soddisfatta la seguente identità

$$M^{-\frac{1}{2}} |y'(x)| = \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Quindi l'uguaglianza in (23) vale se e solo se (24) è verificata per ogni $x \in [0, x_B]$. Ora andiamo a calcolare l'integrale che compare al secondo membro della (23). A questo scopo definiamo

$$\alpha := \sup\{x \in [0, x_B] : y|_{[0,x]} < M\}, \quad \beta := \inf\{x \in [0, x_B] : y|_{[x,x_B]} < M\}$$

e osserviamo che

$$y(\alpha) = y(\beta) = M. \quad (25)$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx &= \int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\
 &\quad + \int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\
 &\geq \int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx \\
 &\quad + \int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} (-y'(x)) dx \\
 &= \int_0^{y(\alpha)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta - \int_{y(\alpha)}^0 \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \\
 &= 2 \int_0^{y(\alpha)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta
 \end{aligned}$$

e cioè

$$\int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \geq 2 \int_0^M \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta. \quad (26)$$

Osserviamo che l'uguaglianza in (26) è valida se e solo se

$$y'_{|(0,\alpha)} \geq 0, \quad y'_{|(\alpha,x_B)} \leq 0. \quad (27)$$

Dimostriamo tale affermazione. Se $y'_{|(0,\alpha)} \geq 0$ e $y'_{|(\alpha,x_B)} \leq 0$ è ovvio che in (26) vale l'uguaglianza. Viceversa, se

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx &= \int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx \\
 &\quad - \int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx
 \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
 0 &= \underbrace{\int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} [|y'(x)| - y'(x)] dx}_{=: I_1} \\
 &\quad + \underbrace{\int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} [|y'(x)| + y'(x)] dx}_{=: I_2}. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Osserviamo che gli integrandi di I_1 e I_2 sono non negativi. Questo implica in primis che $I_1, I_2 \geq 0$ e quindi, per (28), vale

$$I_1 = I_2 = 0.$$

Secondariamente e insieme a quest'ultimo fatto, abbiamo che gli integrandi di I_1 e I_2 devono in realtà essere nulli. Quindi

$$y'(x) = \begin{cases} |y'(x)| & \text{se } x \in [0, \alpha] \\ -|y'(x)| & \text{se } x \in [\alpha, x_B] \end{cases}$$

da cui segue subito (27).

Ora sostituendo

$$\eta := -\frac{1}{2}M(\cos \theta - 1)$$

nella (26) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx &\geq 2 \int_0^\pi \left(\frac{M + \frac{1}{2}M \cos \theta - \frac{1}{2}M}{-\frac{1}{2}M^2(\cos \theta - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} M \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{M(1 + \cos \theta)}{M^2(1 - \cos \theta)} \right)^{\frac{1}{2}} M(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= M^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= \pi M^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In conclusione troviamo che:

$$\begin{aligned} T(y) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(M^{-\frac{1}{2}} x_B + \pi M^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= u(M) \\ &= u(\mathcal{M}(y)). \end{aligned}$$

(ii) Se il grafico di y è una *CSC* allora per l'Osservazione 7 vale l'identità (21). Viceversa, dobbiamo dimostrare che se vale

$$T(y) = u(\mathcal{M}(y)) \tag{29}$$

allora il grafico di y è una *CSC*. Dalla discussione delle condizioni per l'uguaglianza effettuata nella dimostrazione di (i) e quindi da (24) e (27) otteniamo che l'uguaglianza (29) è soddisfatta se e solo se valgono le seguenti condizioni

$$y'(x) = \begin{cases} \left(\frac{M}{y(x)} - 1\right)^{\frac{1}{2}} & \text{se } x \in [0, \alpha] \\ -\left(\frac{M}{y(x)} - 1\right)^{\frac{1}{2}} & \text{se } x \in [\alpha, x_B]. \end{cases} \quad (30)$$

Supponiamo dunque che tali condizioni siano verificate. Innanzitutto dimostriamo che

$$x_B \geq M\pi. \quad (31)$$

Per farlo, osserviamo che per (24) vale

$$1 = M^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} |y'(x)|. \quad (32)$$

Se integriamo tale espressione otteniamo

$$\begin{aligned} x_B &= \int_0^{x_B} M^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{M - y(x)}{y(x)M}\right)^{-\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &= \int_0^{x_B} \left(\frac{M - y(x)}{y(x)}\right)^{-\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &= \int_0^{x_B} \left(\frac{y(x)}{M - y(x)}\right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &\geq \int_0^\alpha \left(\frac{y(x)}{M - y(x)}\right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx - \int_\alpha^{x_B} \left(\frac{y(x)}{M - y(x)}\right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx \\ &= 2 \int_0^M \left(\frac{\eta}{M - \eta}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta. \end{aligned}$$

A questo punto sostituendo $\eta = M \cos^2 \theta$ otteniamo

$$\begin{aligned} x_B &\geq \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{M \cos^2 \theta}{M - M \cos^2 \theta}\right)^{\frac{1}{2}} (-2M \cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 4M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= M\pi. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato (31).

Ora proviamo che il grafico di y è una *CSC*. Per $x \in [0, \alpha)$ vale

$$1 = \left(\frac{M}{y(x)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} y'(x)$$

e integrando per $\xi < \alpha$ otteniamo

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^\xi \left(\frac{M}{y(x)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} y'(x) dx \\ &= \int_0^{y(\xi)} \left(\frac{M}{\eta} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &= \int_0^{y(\xi)} \left(\frac{\eta}{M - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta. \end{aligned}$$

Ora, tramite la sostituzione

$$\eta = \frac{M(1 - \cos \theta)}{2} \tag{33}$$

e ponendo

$$\Theta(\xi) := \arccos \left(1 - \frac{2y(\xi)}{M} \right), \tag{34}$$

troviamo, per ogni $\xi \in [0, \alpha]$

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^{\Theta(\xi)} \left(\frac{M(1 - \cos \theta)/2}{M - M(1 - \cos \theta)/2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{M}{2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{M}{2} \int_0^{\Theta(\xi)} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{M}{2} \int_0^{\Theta(\xi)} (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{M}{2} (\Theta(\xi) - \sin \Theta(\xi)). \end{aligned} \tag{35}$$

Segue che $\forall x \in [0, \alpha]$

$$x = \frac{M}{2} (\Theta(x) - \sin \Theta(x)) \tag{36}$$

e dalla (34) ricaviamo

$$y(x) = \frac{M}{2} (1 - \cos \Theta(x)). \tag{37}$$

Osserviamo che x può assumere valori da 0 a α , $y(x)$ varia da 0 a M e Θ varia da 0 a π . Se indichiamo la parametrizzazione della prima semicicloide che compone la CSC_M con

$$\gamma(\Theta) = (\gamma_1(\Theta), \gamma_2(\Theta)) = \left(\frac{M}{2}(\Theta - \sin \Theta), \frac{M}{2}(1 - \cos \Theta) \right) \quad \Theta \in [0, \pi] \quad (38)$$

allora abbiamo

$$x = \gamma_1(\Theta(x)), \quad y(x) = \gamma_2(\Theta(x)).$$

Possiamo quindi concludere che il grafico della funzione

$$x \mapsto y(x) \quad x \in [0, \alpha]$$

è la prima semicicloide di raggio $M/2$. In maniera analoga si dimostra che il grafico della funzione

$$x \mapsto y(x) \quad x \in (\beta, x_B]$$

è la seconda semicicloide di raggio $M/2$. Rimane da verificare che

$$y(x) = M \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (39)$$

A questo scopo, ricordiamo che

$$y'_{|[\alpha, \beta]} \leq 0$$

per (30), per cui la funzione $y_{|[\alpha, \beta]}$ è non crescente. Ricordando anche (25), per ogni $x \in [\alpha, \beta]$ si ottiene

$$M = y(\alpha) \geq y(x) \geq y(\beta) = M$$

cioè

$$y_{|[\alpha, \beta]} = M.$$

□

Teorema 1. *La cicloide è l'unico punto di minimo per il funzionale T , cioè:*

(i) per ogni $y \in S$

$$T(y) \geq u(M_0) = T(F_{M_0/2}). \quad (40)$$

(ii) *L'uguaglianza vale se e solo se*

$$y = F_{M_0/2}$$

cioè il grafico di y è la cicloide $C_{M_0/2}$.

Dimostrazione. (i) La disuguaglianza è semplice da verificare. Infatti per la Proposizione 1 sappiamo che $\forall y \in S$ vale

$$T(y) \geq u(\mathcal{M}(y))$$

e per il punto (i) dell'Osservazione 7

$$u(\mathcal{M}(y)) \geq u(M_0). \quad (41)$$

(ii) Se $y = F_{M_0/2}$ allora per il punto (ii) dell'Osservazione 7 vale

$$T(F_{M_0/2}) = u(M_0).$$

Viceversa, se in (40) vale l'uguaglianza, allora

$$T(y) = u(M_0) \leq u(\mathcal{M}(y)) \leq T(y) \quad (42)$$

per (i) di Osservazione 7 e (i) di 21. Quindi otteniamo

$$T(y) = u(\mathcal{M}(y)) = u(M_0). \quad (43)$$

Dalla prima uguaglianza di (43) e da (ii) di 21 segue che

$$y = F_{\mathcal{M}(y)/2}.$$

Dalla seconda uguaglianza di (43) e da (i) in Osservazione 7 segue d'altra parte che

$$\mathcal{M}(y) = M_0.$$

Possiamo quindi concludere che

$$y = F_{M_0/2}.$$

□