UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

Il problema della brachistocrona: la risoluzione di Johann Bernoulli

In questa parte presentiamo la risoluzione del problema della brachistocrona dovuta a Johann Bernoulli, la quale risulta la più semplice e quindi riproponibile a degli studenti del triennio della Scuola Secondaria di secondo grado. Infatti, altre soluzioni coinvolgono le equazioni differenziali ed il calcolo variazionale, dunque non sono adatte a studenti di liceo. Mostreremo dunque la risoluzione di Bernoulli riportando la relazione di una lezione per l'orientamento universitario tenuta dal professore Silvano Delladio presso il Liceo Scientifico Galileo Galilei di Trento.

Contesto:

- Pubblico: 12 ragazzi di classe 4^a e 5^a liceo scientifico, particolarmente bravi ed interessati alla matematica.
- Tempo a disposizione: un'ora e mezza.

Cominciamo con una breve introduzione sul significato di brachistocrona e su alcune note storiche. Affrontiamo poi il problema della brachistocrona per il "doppio strato", una rivisitazione del problema del bagnino. In seguito trattiamo il problema discretizzato seguendo l'approccio di Bernoulli, giungendo finalmente alla condizione di brachistocrona. In chiusura si "effettuano" dei test volti a escludere alcune curve considerate a priori naturali candidate brachistocrona.

Il problema del doppio strato

Consideriamo il seguente problema:

> *Una mamma sta nuotando in mare e sente il suo bimbo, che si trova sulla spiaggia, che piange. Trovare il percorso che permetta alla mamma di raggiungere suo figlio nel minor tempo possibile.*

Schematizziamo il problema alla lavagna come segue. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano tale che

- l'asse delle ascisse coincida con la linea di separazione tra mare e spiaggia;
- la mamma occupi il punto di coordinate $A(0, a)$ con $a > 0$;
- il bimbo occupi la posizione $B(b, -a)$, dunque bimbo e mamma sono equidistanti dalla riva;
- il punto in cui la mamma esce dal mare sia $S(x, 0)$ con $0 < x < b$.

Indichiamo con v_1 la velocità con cui la mamma nuota in acqua e con v_2 la velocità con cui lei corre sulla spiaggia: è naturale supporre che $v_1 < v_2$. A questo punto il problema è quello di trovare tra tutte le spezzate ASB quella che minimizza il tempo. Gli studenti intuiscono che, essendo $v_1 < v_2$, lo spazio percorso con la velocità v_1, cioè il tratto $\overline{AS}$, dovrà essere minore dello spazio percorso con v_2, cioè $\overline{SB}$. Si invitano gli studenti ad osservare anche il seguente fatto: tracciata la diagonale $\overline{AB}$, che corrisponde al percorso con punto di sbarco $C(b/2, 0)$, si possono individuare coppie di percorsi simmetrici ASB e $AS'B$, percorsi cioè i cui punti di sbarco S e S' sono simmetrici rispetto a C. Non è difficile capire che per ogni coppia di percorsi quello migliore è ASB.

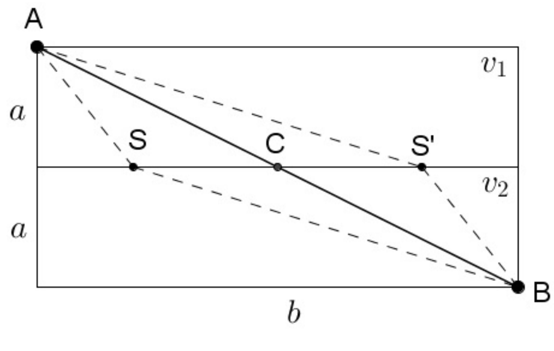


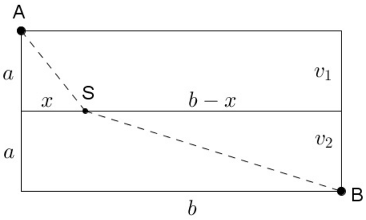
Figura 1: *Percorsi simmetrici.*

Indicata con x l'ascissa del punto di sbarco S si ha:

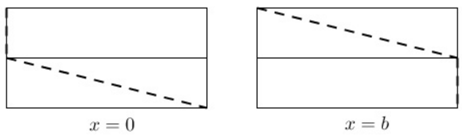
$$\overline{AS} = \sqrt{a^2 + x^2}, \ \overline{SB} = \sqrt{a^2 + (b - x)^2}.$$

A questo punto è facile scrivere la funzione di x che dà il tempo impiegato per percorrere ASB:

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a^2 + (b - x)^2}}{v_2}.$$



(a) *Problema a due strati.*



(b) *Casi $x = 0$ e $x = b$.*

Figura 2

Rappresentiamo il percorso nei casi $x = 0$ e $x = b$: intuitivamente si ha che $T(0) < T(b)$, poiché $v_1 < v_2$.
Ora per trovare il minimo della funzione $T(x)$, e quindi il percorso più conveniente, andiamo a studiare la pendenza del grafico della funzione T nel suo punto di ascissa x, al variare di x in $[0, b]$. Definiamo la funzione pendenza:

$$p : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p(x) := \text{pendenza del grafico di } T \text{ nel punto } (x, T(x)).$$

Come calcolare la pendenza di un grafico? Facciamo un esempio abbastanza semplice.

Esempio 1.

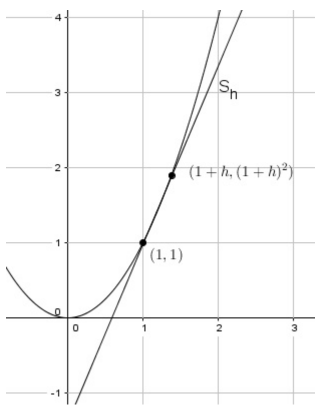


Figura 3: *Grafico di $x \mapsto x^2$.*

Consideriamo la funzione

$$x \mapsto x^2$$

e disegniamo il suo grafico. Prendiamo due punti del grafico, $(1,1)$ e $(1+h,(1+h)^2)$, e tracciamo la secante S_h al grafico passante per questi due punti. Calcoliamo la pendenza della secante S_h:

$$\frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h.$$

Otteniamo la pendenza del grafico nel punto $(1,1)$ facendo tendere $h \longrightarrow 0$. Troviamo così che

$$p(1) = 2.$$

In generale la secante passante per i punti (x,x^2) e $(x+h,(x+h)^2)$ ha pendenza

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

e con lo stesso ragionamento di prima, mandando $h \to 0$, otteniamo che

$$p(x) = 2x.$$

Ora passiamo a calcolare la pendenza $p(x)$ del grafico di T nel suo punto di ascissa x. La pendenza della retta secante passante per i punti $(x, T(x))$ e $(x+h, T(x+h))$ è:

$$\begin{aligned}\frac{T(x+h)-T(x)}{h} &= \left(\frac{\sqrt{a^2+(x+h)^2}}{v_1} - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}\right)\frac{1}{h}+ \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{a^2+(b-x-h)^2}}{v_2} - \frac{\sqrt{a^2+(b-x^2)}}{v_2}\right)\frac{1}{h}.\end{aligned}$$

Svolgiamo i calcoli per il primo addendo dell'espressione sopra, poi per risparmiare tempo lasciamo agli studenti il compito di svolgere i calcoli del secondo termine.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sqrt{a^2+(x+h)^2}}{v_1} - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}\right)\frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{v_1 h}\left(\sqrt{a^2+(x+h)^2} - \sqrt{a^2+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{v_1 h}\frac{a^2+(x+h)^2-a^2-x^2}{\sqrt{a^2+(x+h)^2}+\sqrt{a^2+x^2}} \\ &= \frac{1}{v_1 h}\frac{x^2+h^2+2xh-x^2}{\sqrt{a^2+(x+h)^2}+\sqrt{a^2+x^2}} \\ &= \frac{1}{v_1}\frac{2x+h}{\sqrt{a^2+(x+h)^2}+\sqrt{a^2+x^2}}\end{aligned}$$

e facendo tendere $h \to 0$ otteniamo l'espressione

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Procedendo in maniera analoga per il secondo termine e sommando i due risultati otteniamo la seguente espressione della pendenza:

$$p(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{v_2\sqrt{a^2+(b-x)^2}}. \tag{1}$$

Indichiamo con $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, rispettivamente, gli angoli formati dai segmenti AS e SB con la direzione verticale (vedi Figura 4).

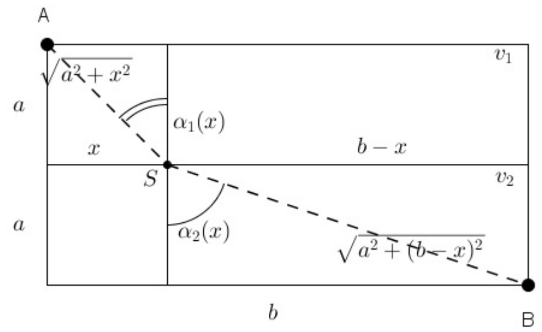


Figura 4: *Problema a due strati.*

Allora l'identità (1) diventa

$$p(x) = \frac{\sin\alpha_1(x)}{v_1} - \frac{\sin\alpha_2(x)}{v_2}. \tag{2}$$

Osserviamo che α_1 è una funzione crescente con

$$\alpha_1(0) = 0, \qquad \alpha_1(b) = \arctan\frac{b}{a}.$$

Analogamente α_2 è una funzione decrescente con

$$\alpha_2(0) = \arctan\frac{b}{a}, \qquad \alpha_2(b) = 0.$$

Poiché la funzione sin è monotona crescente in $[0, \pi/2]$, l'identità (2) esprime p come differenza fra una funzione crescente e una funzione decrescente (vedi Figura 5).

Dunque p è crescente. Inoltre si ha

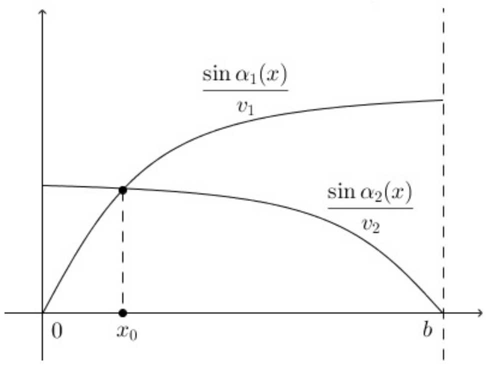


Figura 5: *La pendenza è data dalla differenza tra le due funzioni.*

$$p(0) = -\frac{\sin\alpha_2(0)}{v_2} < 0, \qquad p(b) = \frac{\sin\alpha_1(b)}{v_1} > 0.$$

Tali proprietà indicano chiaramente che il grafico di T è del tipo rappresentato in Figura 6.

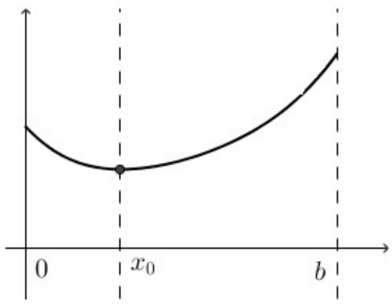


Figura 6: *Andamento del grafico di T.*

In particolare T è minima in x_0 e vale

$$p(x_0) = 0$$

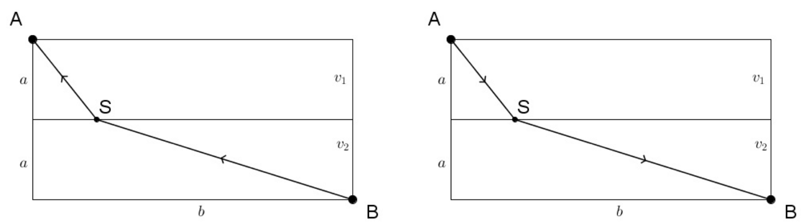
cioè

$$\frac{\sin\alpha_1(x_0)}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2(x_0)}{v_2} \tag{3}$$

riportata in seguito come **condizione di brachistocrona**.

Commenti

- Per interpretare praticamente il problema del "doppio strato" abbiamo preferito il contesto mamma-bambino a quello bagnino-bagnante. La ragione di tale preferenza è dovuta alla direzione del moto che nel caso del contesto mamma-bambino è discendente, contrariamente a quanto avviene nel contesto bagnino-bagnante. Tale carattere "discendente" risulterà coerente con la modellizzazione successiva del problema della brachistocrona.



- Per trovare il minimo di $T(x)$ basterebbe calcolare la derivata $T'(x)$ e studiarne il segno. Tuttavia, considerato il pubblico di studenti a cui è rivolta la lezione, preferiamo non parlare di derivata e di retta tangente al grafico, ma ci limitiamo a calcolare la pendenza del grafico di T.

Il problema generale

Bilancio energetico

Vogliamo calcolare la velocità della particella in un punto qualsiasi della curva lungo la quale sta scendendo. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse delle ordinate orientato verso il basso e denotiamo con $A(0,0)$ e $B(x_B, y_B)$ gli estremi della curva. Supponiamo che A si trovi alla quota H. Nelle ipotesi del problema, la particella è soggetta alla sola forza di gravità.
Possiamo dunque usare il principio di conservazione dell'energia, per cui vale:

$$mg(H-y) + \frac{1}{2}mv(y)^2 = mgH$$

dove $v(y)$ indica la velocità della particella quando questa ha posizione di ordinata y. Svolgendo i calcoli troviamo:

$$\frac{1}{2}mv(y)^2 - mgy = 0$$

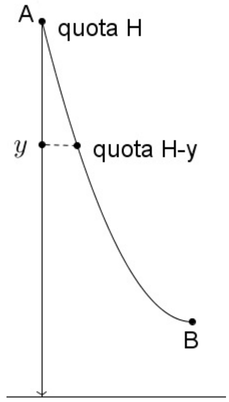


Figura 7: *Bilancio energetico.*

cioè

$$v(y) = c\sqrt{y}, \qquad c := \sqrt{2g}. \tag{4}$$

É interessante notare che la velocità dipende solo dalla quota a cui si trova la particella, e non dalla forma o dalla lunghezza della curva.

Discretizzazione del problema

Seguendo l'approccio di Bernoulli modellizziamo il problema della brachistocrona come segue. Sia N un intero positivo e supponiamo di dividere la regione di spazio compresa tra l'ordinata $y_A = 0$ di A e l'ordinata y_B di B in N strati $s_1, ..., s_N$ di spessore uniforme

$$d_N = \frac{y_B}{N}.$$

Data una particella in caduta fra A e B, supponiamo che in ogni strato s_i la sua velocità si mantenga costantemente uguale a

$$v_i = c\sqrt{id_N}, \qquad i = 1, ..., N$$

A questo punto possiamo considerare il problema di tipo brachistocrona corrispondente a tale discretizzazione: fra tutti i percorsi poligonali, rettilinei negli strati s_i, compiuti da una particella in caduta da A a B tale che la sua velocità in s_i sia v_i, determinare quello di tempo minimo.
Bernoulli sottintendeva il seguente fatto: se indichiamo con Γ_N la brachistocrona del problema appena formulato, allora Γ_N converge (al tendere di N all'infinito) a una curva liscia che è soluzione del problema della brachistocrona originale. Prima di attuare questo processo di limite è opportuno ricavare ulteriori informazioni su Γ_N. A questo scopo, osserviamo che la restrizione della traiettoria Γ_N a una

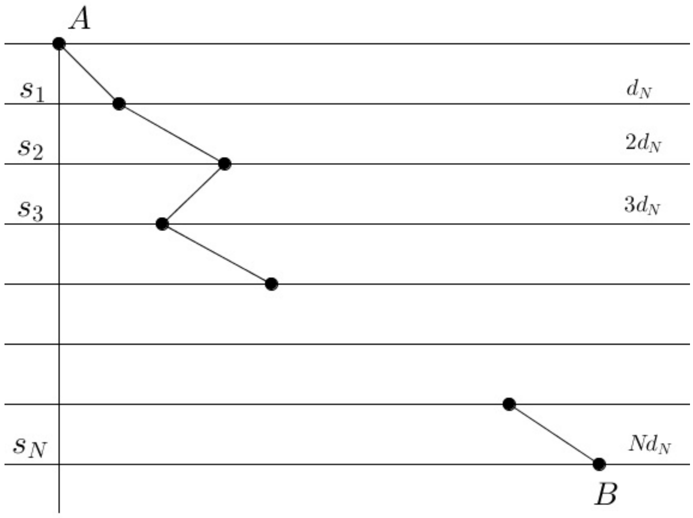


Figura 8: *Percorso poligonale.*

generica coppia di strati contigui s_i e s_{i+1} è soluzione del problema del doppio strato, e quindi deve valere

$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = \frac{\sin \alpha_{i+1}}{v_{i+1}}. \tag{5}$$

Ripetendo questo ragionamento per tutte le coppie di strati contigui otteniamo

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = ... = \frac{\sin \alpha_N}{v_N}$$

Esiste dunque un numero ρ_N, indipendente da i (ma dipendente da N), tale che

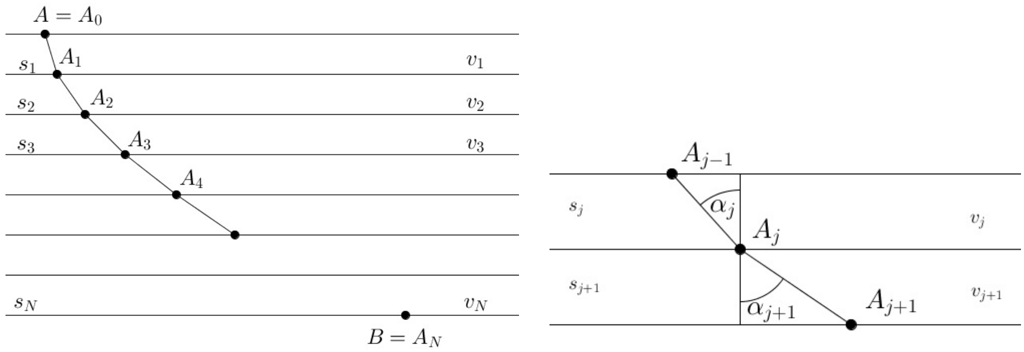
$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = \rho_N, \qquad i = 1, 2, ..., N. \tag{6}$$

A questo punto facciamo tendere all'infinito il numero N degli strati e indichiamo con ρ il limite delle costanti ρ_N. Col passaggio al limite si ottiene la condizione a cui deve soddisfare la soluzione del problema originale, cioè:

$$\frac{\sin \alpha(y)}{v(y)} = \rho \tag{7}$$

dove $\alpha(y)$ è l'angolo formato dalla verticale con la tangente alla curva nel punto di ordinata y. Infine per quanto visto sul bilancio energetico sappiamo che la velocità è data da $v(y) = c\sqrt{y}$ e quindi possiamo riscrivere la condizione di brachistocrona come segue:

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = costante. \tag{8}$$



(a) *Percorso minimo* Γ_N.

(b) *Restrizione di* Γ_N *a due strati contigui.*

Figura 9

Commenti

- Nella trattazione del problema abbiamo supposto che una soluzione ci sia, cioè che esista un percorso di tempo minimo tra tutti i percorsi ammissibili. Per dimostrare che ciò effettivamente è vero, definiamo la funzione continua $\tau : [0, x_B]^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$\tau(x_1, ..., x_{N-1}) := \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + d_N^2}}{v_i} \qquad (x_0 := 0).$$

  Osserviamo che il valore di τ in $(x_1, ..., x_{N-1})$ è il tempo corrispondente al percorso poligonale con vertici

$$A_0 = (0, 0), A_1 = (x_1, d_N), ..., A_N = (x_B, y_B).$$

  Per il teorema di Weierstrass, esiste un minimo di τ in $[0, x_B]^{N-1}$.

- La condizione di brachistocrona (8) è coerente con la condizione che si ottiene dall'equazione di Eulero. Per dimostrarlo consideriamo una curva che possa essere rappresentata come grafico di una funzione $f \in C^1([0, x_B])$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x_B) = y_B$. Indichiamo con $\alpha(y)$ l'angolo formato dalla verticale con la tangente alla curva nel suo punto di ordinata y. Allora

$$f'(x) = \frac{\cos \alpha(f(x))}{\sin \alpha(f(x))}$$

da cui si ricava (omettendo per semplicità la x)

$$\sin(\alpha \circ f) = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}.$$

Sostituendo in (8) otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\frac{1}{\sqrt{f}} = costante$$

e dunque la condizione di brachistocrona (8) è equivalente a

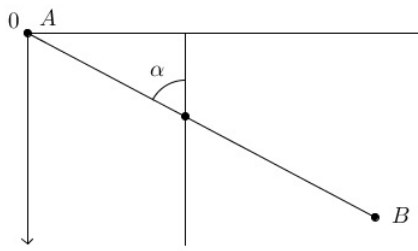
$$f[1+(f')^2] = costante$$

che è l'equazione che si ricava dalla risoluzione variazionale del problema.

Test di esclusione

Per concludere la lezione "testiamo" due curve candidate, il segmento e la circonferenza, provando che esse non risolvono il problema. Infine riveliamo la soluzione.

Segmento



Poiché l'angolo $\alpha(y)$ è uguale a una costante α_0 lungo il segmento $[A;B]$ mentre y varia si ha

$$\frac{\sin\alpha(y)}{\sqrt{y}} = \frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{y}} \neq costante$$

e possiamo perciò affermare che il $[A;B]$ non è la brachistocrona.

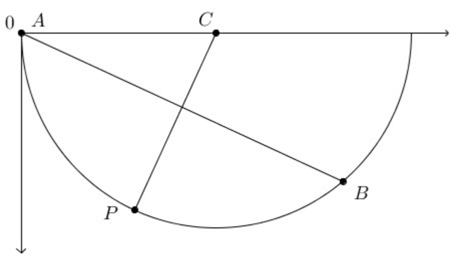
Osservazione 1. *La condizione di brachistocrona*

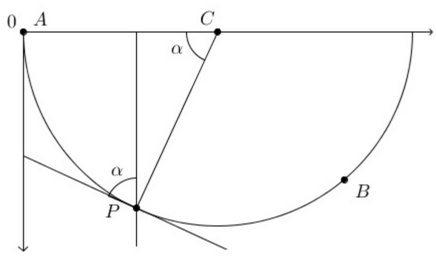
$$\frac{\sin\alpha(y)}{\sqrt{y}} = costante$$

implica che per $y \to 0$ si ha $\sin\alpha(y) \to 0$ e quindi anche $\alpha(y) \to 0$. Questo significa che la retta tangente alla brachistocrona nel punto A deve coincidere con l'asse y.

Circonferenza

L'osservazione appena fatta porta a considerare come candidata a titolo di brachistocrona la circonferenza passante per $A(0,0)$ e $B(x_B, y_B)$ tangente all'asse y in A. Costruiamo per prima cosa tale circonferenza. Indichiamo con C il centro della circonferenza. La condizione di tangenza in A osservata prima implica che C deve stare sull'asse x. Inoltre C deve appartenere all'asse di $[A; B]$, in quanto tale segmento è corda della circonferenza.Dunque il centro C risulta univocamente determinato.





Ora verifichiamo che tale circonferenza non è brachistocrona. Se P è il punto della circonferenza avente ordinata y, osserviamo che $\alpha(y)$ è uguale all'angolo $\widehat{ACP}$. Allora, indicando con R il raggio della circonferenza, troviamo che

$$\sin\alpha(y) = \frac{y}{R}$$

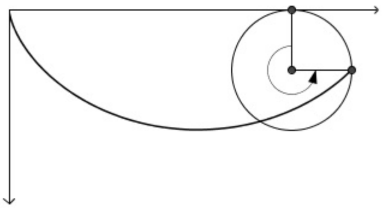
e quindi

$$\frac{\sin\alpha(y)}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{R} \neq costante$$

cioè la circonferenza non è brachistocrona.

Cicloide

A questo punto vogliamo svelare agli studenti la soluzione al problema della brachistocrona. La brachistocrona è la curva generata da un punto di una circonferenza che ruota senza strisciare lungo una retta: questa curva è detta cicloide.



Commenti
Non abbiamo il tempo per trovare le equazioni parametriche della cicloide, e per verificare che essa soddisfa la condizione di brachistocrona. Ci limitiamo a disegnare la curva alla lavagna in modo che gli studenti possano visualizzarla e capire come è fatta.

In realtà, nota la parametrizzazione della cicloide

$$\gamma(\varphi) = (\gamma_1(\varphi), \gamma_2(\varphi)) = R(\varphi - \sin\varphi, 1 - \cos\varphi),$$

è molto semplice verificare che essa soddisfa la condizione (8). Infatti, la cicloide gode della seguente proprietà (dimostrata nelle note per il docente riguardanti la risoluzione variazionale del problema della brachistocrona):

$$\alpha(y) = \alpha(\gamma_2(\varphi)) = \frac{\varphi}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha(y)}{\sqrt{y}} &= \frac{\sin(\varphi/2)}{\sqrt{R}\sqrt{1-\cos\varphi}} \\ &= \frac{\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sqrt{2R}\sqrt{1-\cos\varphi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2R}} \\ &= \textit{costante}\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione $\cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2\varphi$.