UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

Laboratorio sulla brachistocrona in Università

Il problema della brachistocrona viene solitamente introdotto in corsi avanzati di matematica all'università, quali calcolo delle variazioni, ma l'enunciato è comprensibile anche per uno studente di liceo. La strategia risolutiva alla base di questo laboratorio si rifà al metodo di stratificazione dovuto a Johann Bernoulli. Il laboratorio comincia dunque con l'analisi del problema del doppio strato, dal quale ricaviamo la condizione di brachistocrona corrispondente. Poi passiamo al processo di discretizzazione e di passaggio al limite, dal quale ricaviamo la condizione di brachistocrona per il problema originale. Vengono successivamente introdotte le cicloidi generalizzate, che non erano state considerate durante la lezione al Galilei, le quali soddisfano la condizione di brachistocrona ma non sono la soluzione del problema. Concludiamo verificando che alcune curve, ben note agli studenti, non sono soluzione al problema e mostrando evidenze sperimentali del fatto che la cicloide è la brachistocrona. L'uso del calcolo e della sperimentazione (reale e simulata via software) si alternano con lo scopo di far cogliere gli aspetti più profondi di questo interessante problema.

Il percorso così descritto è stato presentato anche all'interno del corso **Laboratory of Didactics of Mathematics**, e il materiale è stato messo a disposizione degli studenti per la preparazione di simulazioni di lezioni e per l'esame finale del corso.

Abbiamo realizzato il percorso completo sulla brachistocrona con alcuni ragazzi del Liceo Galilei di Trento. Il laboratorio si è sviluppato in due incontri, per un totale di quattro ore, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento. Gli incontri hanno previsto l'alternarsi di parti pratiche, gestite da me, e parti teoriche, gestite dal professore Silvano Delladio. Hanno partecipato all'attività 6 ragazzi di classe quarta del liceo Galilei di Trento (4 del liceo scientifico e 2 del liceo scientifico scienze applicate) tutti particolarmente interessati alle discipline scientifiche.

Abbiamo allestito un'aula multimediale in modo da mettere a disposizione di ogni ragazzo un computer. Nei "momenti pratici" i ragazzi erano i primi protagonisti e, grazie ai software, sono giunti a conclusioni sperimentali che sono state successivamente dimostrate con il calcolo teorico.

Primo incontro

Cominciamo il primo incontro con l'introduzione del problema della brachistocrona e qualche cenno storico. Per familiarizzare col problema, sottoponiamo ai ragazzi la **scheda di lavoro 1** riguardante il doppio strato. Seguono i commenti alle risposte dei ragazzi, che possono essere riassunti come segue:

(1) Tutti i ragazzi rispondono correttamente alla prima domanda: il percorso più corto che congiunge i punti A e B è il segmento $\overline{AB}$.

(2) Alla richiesta di scrivere l'espressione del tempo di percorrenza del percorso ASB, quattro ragazzi individuano il tempo di percorrenza della diagonale, e solo due ragazzi scrivono l'espressione del tempo come funzione di x, ascissa del punto di sbarco.

(3) Tutti i ragazzi intuiscono che per minimizzare il tempo di percorrenza conviene percorrere un tratto più corto in mare e un tratto più lungo sulla spiaggia, poiché la velocità in mare è minore. In particolare individuano due percorsi, riportati in Figura 1.

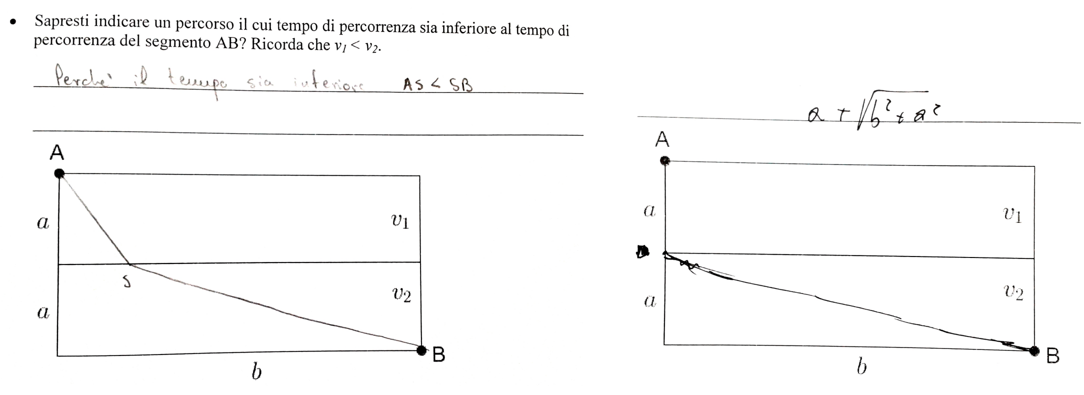


Figura 1: *Scheda di lavoro 1, le risposte di due ragazzi alla richiesta di indicare un percorso con tempo di percorrenza minore della diagonale.*

Successivamente proponiamo il software “doppio strato” e la **scheda di lavoro 2** corrispondente. I ragazzi grazie al software scoprono gli aspetti matematici più interessanti del problema e giungono alla soluzione del doppio strato.

A questo punto segue un momento di discussione collettiva, in particolare troviamo col software il percorso di minimo tempo e discutiamo le sue caratteristiche. Riportiamo brevemente i commenti alle risposte della scheda di lavoro 2:

(1) Tutti i ragazzi osservano che esiste un valore di x per il quale $T(x)$ è minimo. Uno di loro afferma che il tempo risulta minimo quando la retta tangente al grafico di $T(x)$ è orizzontale.

(2) Tutti i ragazzi descrivono in modo corretto il segno della pendenza della retta tangente al variare dell'ascissa di sbarco x. Riportiamo come esempio la risposta data da uno studente in Figura 2

(3) Anche in questo caso tutti i ragazzi rispondono correttamente: la pendenza della retta tangente è pari a zero per il valore di x che minimizza $T(x)$.

(4) Grazie alle conclusioni sperimentali viste fino a questo punto, i ragazzi possono affermare che il punto di sbarco ottimale è unico poiché la pendenza della retta tangente è crescente ed è pari a zero per un solo valore di x.ù

(5) I due rapporti risultano evidentemente uguali solo quando $T(x)$ è minimo.

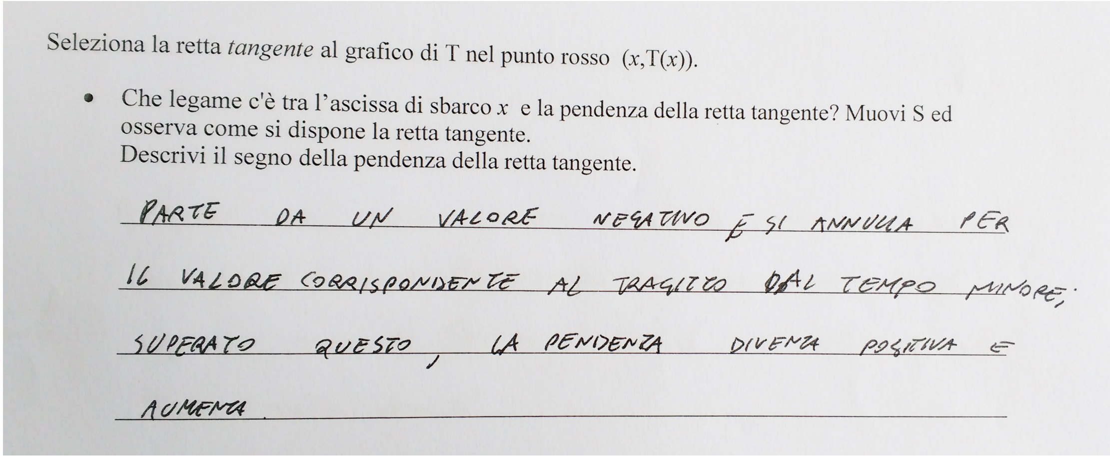
Facciamo infine osservare ai ragazzi che possiamo escludere dall'essere soluzione il secondo percorso riportato in Figura 1.

Per capire come trovare la condizione di brachistocrona segue una parte teorica, di calcolo, riguardante la pendenza del grafico del tempo, simile alla parte svolta durante la lezione al Galilei (cfr. La risoluzione di Bernoulli). A differenza della lezione al Galilei, dove il rapporto incrementale e la derivata erano stati trattati solo nel caso particolare della funzione T, possiamo qui introdurre in modo più generale queste due importanti nozioni, per due motivazioni principali:

- Gli studenti di questa volta sono più maturi di quelli presenti alla lezione al Galilei, in particolare stanno studiando i limiti.
- Questa attività dura 4 ore e non 2, dunque c'è più tempo a disposizione per approfondire l'argomento.

Giungiamo quindi, attraverso il calcolo, alla condizione di brachistocrona per il doppio strato:

$$\frac{\sin \alpha_1(x)}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2(x)}{v_2}. \tag{1}$$



Seleziona la retta *tangente* al grafico di T nel punto rosso $(x,T(x))$.

- Che legame c'è tra l'ascissa di sbarco x e la pendenza della retta tangente? Muovi S ed osserva come si dispone la retta tangente.
  Descrivi il segno della pendenza della retta tangente.

PARTE DA UN VALORE NEGATIVO E SI ANNULLA PER IL VALORE CORRISPONDENTE AL TRAGITTO DAL TEMPO MINORE; SUPERATO QUESTO, LA PENDENZA DIVENTA POSITIVA E AUMENTA.

Figura 2: *Scheda di lavoro 2, risposta alla domanda sull'andamento della pendenza della retta tangente al grafico.*

Per concludere il primo incontro ritorniamo a lavorare sul software "doppio strato", dove è possibile osservare l'andamento monotono della pendenza e verificare che la condizione di brachistocrona è soddisfatta solo dal percorso di tempo minimo.

Commenti
Alla fine del primo incontro vengono fatte alcune riflessioni insieme agli studenti:

- La parte di teoria è necessaria per trovare la condizione di brachistocrona. Infatti visualizzare semplicemente tale condizione col software risulta didatticamente poco utile, poiché senza una spiegazione non è chiaro come il rapporto che compare nella condizione di brachistocrona sia legato al problema in esame. Per trovare il minimo del tempo basterebbe calcolare la derivata, ma questo è un concetto sconosciuto agli studenti partecipanti al laboratorio. Per questo motivo abbiamo scelto di approfondire il discorso sulla pendenza del grafico, accennando ai concetti di rapporto incrementale e di derivata. Si osserva dunque come questa parte può essere sfruttata per introdurre il concetto di derivata, in particolare utilizzando funzioni semplici quali la parabola.

- Dal punto di vista dei ragazzi la parte di calcolo riguardante la pendenza del grafico, l'esempio della parabola, e il calcolo della derivata del tempo è stata la meno interessante poiché li ha resi solo ascoltatori e non parte attiva nel lavoro. Il ragionamento in base al quale la derivata è la differenza dei rapporti $\sin \alpha_i / v_i$ è risultata invece più apprezzata.
- Sono stati proposti infine alcuni suggerimenti per far risultare la parte teorica più coinvolgente:
  - (i) Far intervenire maggiormente i ragazzi, ponendo loro più domande in modo da renderli attivi;
  - (ii) Avendo a disposizione più tempo, si potrebbe far svolgere i calcoli ai ragazzi (magari facendoli lavorare a coppie), guidandoli verso il risultato finale, in modo che siano maggiormente consapevoli del ragionamento fatto per arrivare alla soluzione;
  - (iii) Dedurre la condizione di brachistocrona per il doppio strato dalla fisica, cioè dalla legge di Snell, favorendo così l'interdisciplinarietà.

Secondo incontro

Cominciamo il secondo incontro ricordando la condizione di brachistocrona (1) per il doppio strato.

Successivamente passiamo al bilancio energetico e, insieme ai ragazzi, troviamo la dipendenza della velocità dalla variabile y.

Proseguiamo con la spiegazione del processo di discretizzazione, analogamente a quanto fatto al liceo Galilei (cfr. La risoluzione di Bernoulli), per giungere alla condizione di brachistocrona per il multistrato:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \cdots = \frac{\sin \alpha_N}{v_N} =: c_N. \tag{2}$$

Segue un'attività pratica con il software "discretizzazione". Presentiamo il funzionamento del software, basato sulla condizione (2), che permette di costruire la soluzione del multistrato. I ragazzi analizzano il problema del multistrato con il software e ne costruiscono la soluzione. Segue un momento di discussione collettiva da cui emergono le seguenti considerazioni:

- La poligonale soluzione del multistrato approssima la soluzione del problema continuo, tanto meglio quanto più grande è il numero N degli strati;
- Si può escludere che il segmento sia soluzione del problema, nel caso discreto come in quello continuo;
- La soluzione discreta parte con pendenza che cresce arbitrariamente al crescere del numero N degli strati, dunque si può ipotizzare che nel caso continuo essa debba partire con pendenza infinita, cioè debba partire verticale;
- La forma delle poligonali ottenute permette di scartare anche la circonferenza dall'essere soluzione. Qualche studente osserva che tale poligonale ricorda il profilo della parabola, che rimane dunque una candidata valida;
- Passando al limite la condizione di brachistocrona per il multistrato, si ottiene la condizione di brachistocrona per il problema continuo.

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = costante; \tag{3}$$

Riveliamo ai ragazzi che la poligonale sta approssimando la cicloide, che è dunque la brachistocrona. Segue un breve riferimento alla storia della cicloide, curva nota ai tempi della formulazione del problema della brachistocrona perché Huygens aveva scoperto alcune sue importanti proprietà durante lo studio degli orologi a pendolo.

Per concludere questa parte torniamo sul software "discretizzazione" affinché i ragazzi possano verificare sperimentalmente che le costanti c_N della condizione (2), indicate in blu, tendono (al crescere di N) alla costante in (3), che nel software è indicata in rosso e corrisponde al rapporto di brachistocrona della cicloide.

Passiamo ad utilizzare il software "campo gara", che permette di verificare che la cicloide è la curva di tempo minimo tra un set di curve note (segmento, ellisse, parabola e circonferenza). Lasciamo ai ragazzi il piacere di scoprire e confrontare i tempi di percorrenza delle varie curve. In particolare alcuni di loro cercano di costruire un percorso più veloce della cicloide, altri un percorso più lento del segmento.

A questo punto segue la verifica rigorosa delle conclusioni sperimentali. In particolare proviamo che:

- La soluzione del problema continuo deve avere tangente verticale nel punto di partenza;

- Il segmento e la circonferenza non soddisfano la condizione di brachistocrona (3).

Definiamo formalmente la curva cicloide e troviamo, assieme ai ragazzi, la sua parametrizzazione. Ci soffermiamo su alcuni punti particolari, quali $\gamma(0)$, $\gamma(\pi)$ e $\gamma(2\pi)$, che i ragazzi trovano facilmente anche senza svolgere i calcoli.
Introduciamo la cicloide generalizzata e facciamo notare che anche questa soddisfa la condizione di brachistocrona. Ritorniamo sul file "campo gara" e invitiamo i ragazzi a confrontare i tempi della cicloide e delle cicloidi generalizzate (CSC). I ragazzi possono vedere che la cicloide è la migliore. Si chiedono perché le CSC, pur soddisfacendo la condizione di brachistocrona, non sono la soluzione. Questo permette di chiarire che la condizione di brachistocrona è una condizione necessaria ma non sufficiente per la soluzione.

In conclusione si mostra ai ragazzi la brachistocrona in legno realizzata dall'Istituto d'arte Vittoria e si esegue il confronto tra segmento e cicloide, sottolineando che anche in un esperimento reale di questo tipo, dove non siamo in condizioni ideali come abbiamo supposto in tutto il percorso, il tempo di percorrenza della cicloide è minore di quello del segmento.

Commenti
Grazie a questo primo laboratorio abbiamo potuto constatare la valenza didattica dei software e delle relative schede, attraverso i quali i ragazzi hanno potuto scoprire in maniera autonoma e sperimentale gli aspetti matematici principali del problema della brachistocrona. Possiamo affermare che, rispetto alla lezione tenuta al Liceo Galilei, il percorso laboratoriale, dove comunque non sono mancati gli approfondimenti teorici, ha realizzato in modo più compiuto l'obiettivo di rendere i ragazzi primi protagonisti delle attività.