

### Scheda di lavoro 3: file Discretizzazione

Lo slider  $N$  indica il numero di strati, di spessore uniforme  $d_N = y_B / N$ , in cui viene suddivisa la regione di piano compresa tra i punti  $A$  e  $B$ . Data una particella in caduta fra  $A$  e  $B$ , supponiamo che in ogni strato la sua velocità si mantenga costantemente uguale a  $v_i = (2g i d_N)^{1/2}$  per  $i = 1, \dots, N$ .

Definiamo un punto  $C$  sulla retta che separa primo e secondo strato, la cui ascissa si può cambiare con lo slider  $c$ . La posizione di  $C$  determina l'angolo  $\beta_1$  formato dal segmento  $AC$  e dalla verticale per  $C$ , e di conseguenza anche il rapporto  $\sin \beta_1 / v_1$ . Determiniamo l'angolo  $\beta_2$  che il secondo segmento della poligonale deve formare con la verticale imponendo che valga la condizione di brachistocrona tra primo e secondo strato:

$$\sin \beta_1 / v_1 = \sin \beta_2 / v_2 \quad \text{cioè} \quad \beta_2 = \arcsin (v_2 * \sin \beta_1 / v_1).$$

Analogamente, determiniamo l'angolo  $\beta_3$  che il terzo segmento della poligonale deve formare con la verticale, imponendo che valga la condizione di brachistocrona tra secondo e terzo strato:

$$\sin \beta_2 / v_2 = \sin \beta_3 / v_3 \quad \text{cioè} \quad \beta_3 = \arcsin (v_3 * \sin \beta_2 / v_2).$$

E così via. Alla fine di tale procedura siamo certi che la condizione di brachistocrona lungo la poligonale che vogliamo costruire è soddisfatta.

1. Aumenta il numero di strati  $N$  e muovi  $C$  per costruire la poligonale che congiunge  $A$  e  $B$ .
2. All'aumentare di  $N$  la poligonale che si forma approssima sempre meglio la curva brachistocrona che è soluzione del problema continuo. In base al profilo definito dalla poligonale, quali curve puoi scartare dall'essere soluzione del problema continuo?

---

---

3. Per  $N$  grande osserva come si dispone la poligonale nel punto di partenza.

---

---

Sulla base della risposta precedente, puoi fare qualche ipotesi sulle caratteristiche della soluzione continua nel punto di partenza?

---

---

4. Seleziona con il cursore la *curva*: la poligonale sta approssimando questa curva rossa. Hai qualche idea sull'identità di questa curva?

---

---

Con  $\alpha$  è stato indicato l'angolo formato dalla tangente alla curva rossa in un suo punto con la verticale. In rosso trovi il rapporto tra il seno di questo angolo e la velocità nel punto considerato.

5. Cambia il numero di strati e la posizione di C ed osserva come variano il rapporto blu e il rapporto rosso.

---

---