



Software “Discretizzazione”

Il secondo software da utilizzare nel percorso sulla brachistocrona rappresenta il processo di discretizzazione e di passaggio al limite. Esso permette di costruire la poligonale che è soluzione per il multistrato.

Per quanto riguarda la costruzione del file, è stato innanzitutto definito uno slider N che indica il numero di strati, di spessore uniforme $d_N = \frac{y_B}{N}$, in cui viene suddivisa la regione di piano compresa tra i punti A e B . Data una particella in caduta fra A e B , supponiamo che in ogni strato la sua velocità si mantenga costantemente uguale a

$$v_i = \sqrt{2g} \sqrt{id_N}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Si parte con la definizione di un punto C sulla retta che separa primo e secondo strato, la cui ascissa si può cambiare con lo slider c . La posizione di C determina l'angolo β_1 , formato dal segmento \overline{AC} e dalla verticale per C , e di conseguenza anche il rapporto $\sin \beta_1 / v_1$. Determiniamo l'angolo β_2 che il secondo segmento della poligonale deve formare con la verticale imponendo che valga la condizione di brachistocrona

$$\frac{\sin \beta_2}{v_2} = \frac{\sin \beta_1}{v_1}$$

cioè

$$\beta_2 = \arcsin \left(\frac{\sin \beta_1}{v_1} v_2 \right).$$

Analogamente, determiniamo l'angolo β_3 che il terzo segmento della poligonale deve formare con la verticale, imponendo che valga la condizione di brachistocrona

$$\frac{\sin \beta_3}{v_3} = \frac{\sin \beta_2}{v_2}$$

cioè

$$\beta_3 = \arcsin \left(\frac{\sin \beta_2}{v_2} v_3 \right).$$

E così via. Alla fine di tale procedura siamo certi che la condizione di brachistocrona lungo la poligonale che vogliamo costruire è soddisfatta. Ora muoviamo c finché l’ultimo segmento della poligonale termina in B : abbiamo così costruito la soluzione per il multistrato.

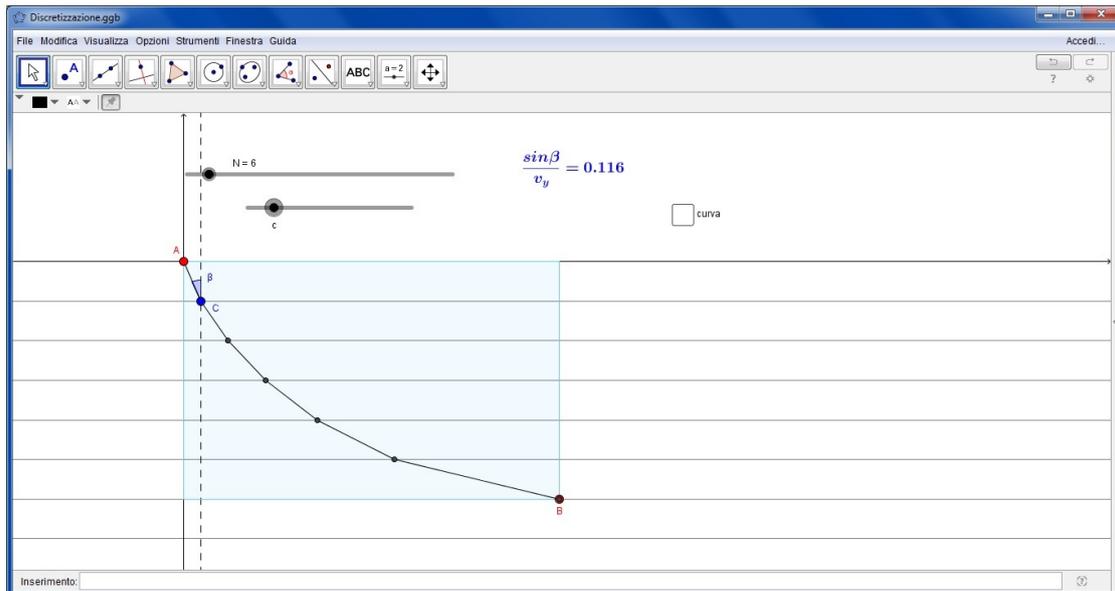


Figura 1: File “discretizzazione”. Problema a 6 strati e relativa soluzione.

Successivamente, all’aumentare di N , osserviamo che la poligonale approssima sempre meglio una curva e, immaginando di far tendere N all’infinito, la poligonale coincide con la curva rappresentata in rosso nel software: la cicloide (vedi Figura 2). Questo permette quindi di approfondire il concetto di passaggio al limite.

Tale software è accompagnato dalla **Scheda di lavoro 3**.

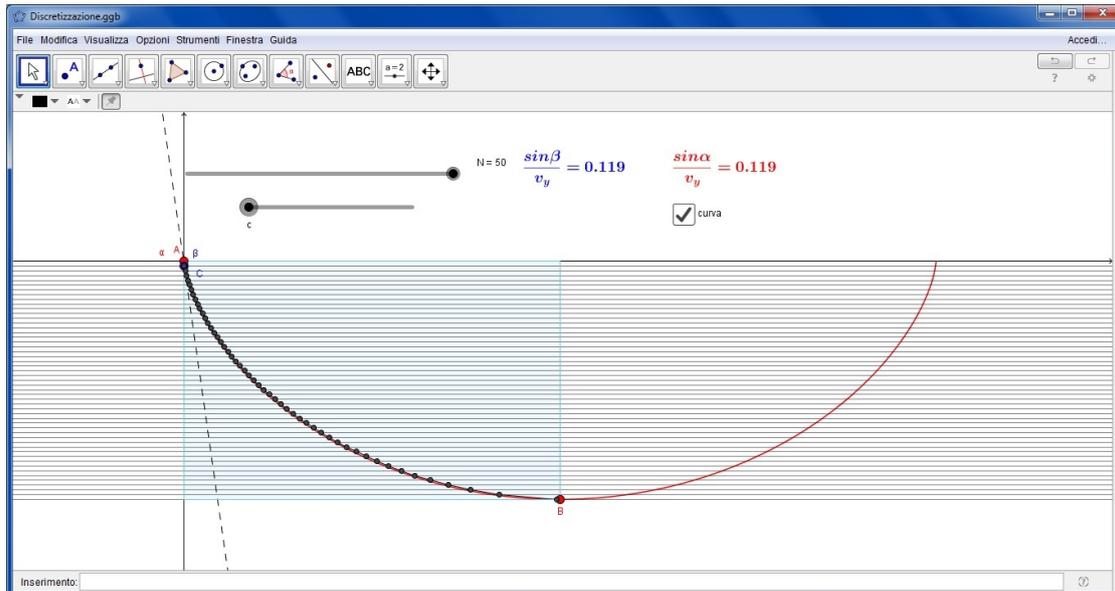


Figura 2: File “discretizzazione”. Aumentiamo il numero di strati: la poligonale aderisce sempre meglio alla cicloide e il rapporto in blu riferito alla poligonale approssima sempre meglio il rapporto di brachistocrona in rosso riferito alla cicloide.

Osservazione 1. L’idea alla base di questo software può essere usata per dimostrare rigorosamente l’esistenza della soluzione del problema a N strati. Per farlo definiamo la funzione f che associa all’ascissa x del punto finale del primo segmento l’ascissa $f(x)$ del punto finale dell’ultimo segmento (vedi Figura 3). Allora è ovvio che f è funzione continua e crescente. Inoltre

- Per x molto piccolo, $f(x) < x_B$;
- Per x grande, $f(x) > x_B$.

Dunque esiste $x \in (0, x_B)$ tale che $f(x) = x_B$, cioè esiste una posizione di C tale che la poligonale termina in B .

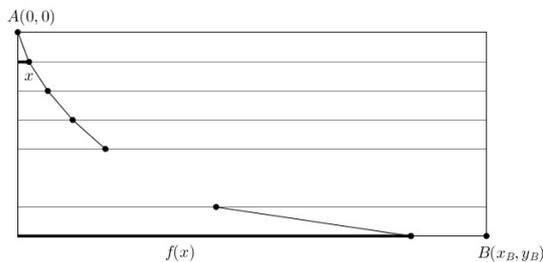


Figura 3