



La proprietà tautocrona

Prima che Bernoulli le conferisse il titolo di brachistocrona, Huygens aveva reso celebre la cicloide per la sua proprietà tautocrona:

La curva tale che un punto pesante che la percorre nel vuoto arriva alla sua posizione più bassa nel medesimo tempo qualunque sia il punto da cui si diparte è una cicloide ordinaria a base orizzontale concava verso l'alto.

Nella prima sezione di questo capitolo dunque dimostriamo che la cicloide è tautocrona, cioè che se posizioniamo due palline ad altezze diverse lungo un profilo cicloidale e le lasciamo cadere simultaneamente, esse si urtano nel punto più basso della curva. Mostriamo inoltre il ragionamento che portò Huygens a scoprire che la cicloide è una curva tautocrona. La seconda sezione è dedicata alla modellizzazione del pendolo cicloidale. Questo risulterà essere strettamente legato a un'altra importante proprietà della cicloide riguardante il concetto di evoluta, che verrà discusso nella terza sezione.

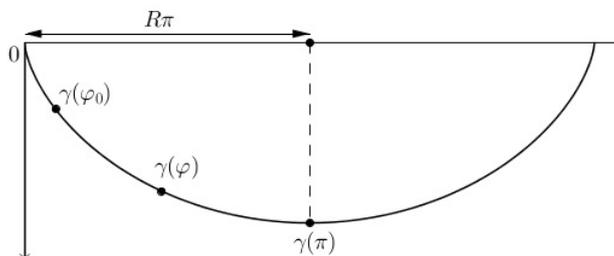
La cicloide è tautocrona

Vogliamo dimostrare in questa parte che la cicloide è tautocrona. Consideriamo ancora una volta un sistema di riferimento cartesiano con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso e la parametrizzazione della cicloide

$$\gamma(\varphi) = (\gamma_1(\varphi), \gamma_2(\varphi)) = (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Consideriamo il punto della cicloide corrispondente al parametro φ_0 , i.e. $\gamma(\varphi_0)$, con $\varphi_0 \in [0, \pi]$. Vogliamo calcolare il tempo impiegato da un grave per passare da $\gamma(\varphi_0)$ a $\gamma(\pi)$ scendendo lungo la cicloide, e dimostrare che esso è indipendente dalla scelta del punto di partenza, i.e. da φ_0 . Indichiamo con $\tau(x)$ il tempo necessario

per percorrere il tratto di cicloide dal punto $\gamma(\varphi_0)$ al generico punto di ascissa x . Inoltre, sia $v(x)$ la velocità del grave quando questo occupa la posizione $(x, y(x))$.



Proposizione 1. *Il tempo $\tau(R\pi)$ non dipende dalla scelta di φ_0 e più precisamente vale*

$$\tau(R\pi) = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

In particolare l'oscillazione del grave lungo la cicloide ha periodo costante.

Dimostrazione. Con lo stesso ragionamento utilizzato per ricavare il funzionale tempo (cfr. Il problema della brachistocrona) otteniamo

$$\tau'(x) = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x)}. \quad (1)$$

Dall'identità

$$y(\gamma_1(\varphi)) = \gamma_2(\varphi)$$

otteniamo

$$y'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi) = \gamma_2'(\varphi).$$

Allora, se $x \in [0, 2\pi R]$ e se $\varphi \in [0, 2\pi]$ è tale che $\gamma_1(\varphi) = x$, possiamo sostituire in (1) e trovare

$$\tau'(\gamma_1(\varphi)) = \frac{\sqrt{1 + y'(\gamma_1(\varphi))^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \quad (2)$$

da cui

$$\begin{aligned}
 (\tau \circ \gamma_1)'(\varphi) &= \tau'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi) \\
 &= \frac{\sqrt{1 + y'(\gamma_1(\varphi))^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \gamma_1'(\varphi) \\
 &= \frac{\sqrt{\gamma_1'(\varphi)^2 + [y'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi)]^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \\
 &= \frac{\sqrt{\gamma_1'(\varphi)^2 + \gamma_2'(\varphi)^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \\
 &= \frac{\|\gamma'(\varphi)\|}{v(\gamma_1(\varphi))}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Ricordando le formule di bisezione

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \\
 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}
 \end{aligned}$$

possiamo calcolare $\|\gamma'(\varphi)\|$:

$$\gamma'(\varphi) = (R - R \cos \varphi, R \sin \varphi),$$

dunque

$$\begin{aligned}
 \|\gamma'(\varphi)\| &= \sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos \varphi} \\
 &= 2R \sin(\varphi/2).
 \end{aligned}$$

Dal bilancio energetico tra la quota di $\gamma(\varphi_0)$ e la quota di $\gamma(\varphi)$

$$\frac{1}{2}mv(\gamma_1(\varphi))^2 + mg(H - \gamma_2(\varphi)) = \frac{1}{2}m \underbrace{v(\gamma_1(\varphi_0))^2}_{=0} + mg(H - \gamma_2(\varphi_0))$$

ricaviamo la velocità

$$\begin{aligned}
 v(\gamma_1(\varphi)) &= \sqrt{2g\sqrt{\gamma_2(\varphi) - \gamma_2(\varphi_0)}} \\
 &= \sqrt{2g\sqrt{R(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}} \\
 &= \sqrt{2g\sqrt{2R(\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2)}} \\
 &= 2\sqrt{Rg}\sqrt{\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2}.
 \end{aligned}$$

Allora sostituendo in (3) otteniamo

$$(\tau \circ \gamma_1)'(\varphi) = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\sin \varphi/2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2}}. \quad (4)$$

A questo punto dimostriamo che $\tau(R\pi)$ non dipende da φ_0 . Osserviamo che

$$\tau(R\pi) = (\tau \circ \gamma_1)(\pi) - (\tau \circ \gamma_1)(\varphi_0) \quad (5)$$

e per il teorema fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned} \tau(R\pi) &= \int_{\varphi_0}^{\pi} (\tau \circ \gamma_1)'(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{\varphi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\sin \varphi/2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\frac{\sin \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}\right)^2}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{R}{g}} \left[-2 \arcsin \left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2} \right) \right]_{\varphi_0}^{\pi} \\ &= 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \arcsin 1 \\ &= \pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \end{aligned}$$

□

La scoperta di Huygens

Proponiamo ora il ragionamento che portò Huygens a scoprire la cicloide come curva tautocrona. L'obiettivo principale di Huygens era la realizzazione di un pendolo perfettamente isocrono. A questo scopo consideriamo un sistema di riferimento con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso. Consideriamo ora una traiettoria tautocrona di un grave (soggetto alla sola forza peso) descritta da una mappa periodica $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^2 , funzione del tempo t , tale che

$$\gamma(0) = (0, 0), \quad \gamma'(0) = (0, 0).$$

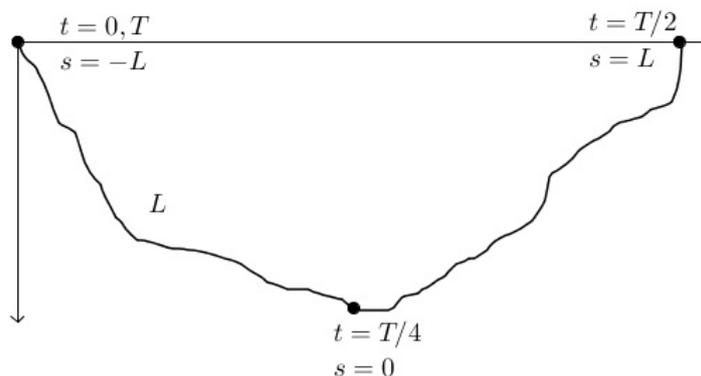


Figura 1

Tale γ è ciò che vogliamo determinare.

Indichiamo poi con T il periodo di γ , con L un quarto della lunghezza di $\gamma|_{[0,T]}$ e definiamo l'ascissa curvilinea

$$s(t) := \int_0^t \|\gamma'\| - L \quad (t \in [0, +\infty))$$

(vedi Figura 1). Allora se imponiamo che s soddisfi l'equazione del moto armonico

$$s'' + ks = 0 \tag{6}$$

avremo che il periodo di oscillazione non dipende dall'ampiezza. Infatti, ricordando che la soluzione generale di (6) è

$$\phi(t) = c_1 \sin(\sqrt{kt}) + c_2 \cos(\sqrt{kt}) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

e poiché deve essere $s(0) = -L$, otteniamo

$$s(t) = -L \cos(\sqrt{kt}), \tag{7}$$

e dunque il periodo di oscillazione è

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Osserviamo che è possibile scrivere le componenti di $\gamma'(t)$ come

$$\begin{cases} \gamma'_1(t) = \|\gamma'(t)\| \sin \frac{\theta(t)}{2} \\ \gamma'_2(t) = \|\gamma'(t)\| \cos \frac{\theta(t)}{2} \end{cases} \tag{8}$$

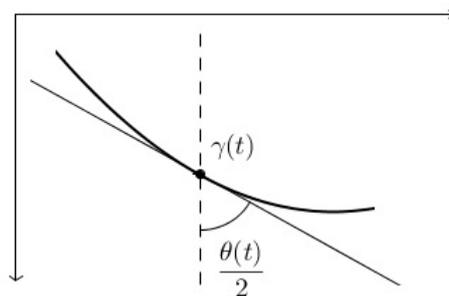


Figura 2

dove $\theta(t)$ indica il doppio dell'angolo formato dalla verticale con la tangente $\gamma'(t)$ nel punto $\gamma(t)$ (vedi Figura 2).

Ora, ricordando che il grave è soggetto alla sola forza peso e proiettando sulla tangente al moto all'istante t , otteniamo

$$s''(t) = g \cos \frac{\theta(t)}{2}$$

e quindi, tenendo conto di (6),

$$\cos \frac{\theta(t)}{2} = \frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}). \quad (9)$$

Osserviamo inoltre che

$$\|\gamma'(t)\| = s'(t) = L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}).$$

Dalla seconda uguaglianza di (8) troviamo allora

$$\begin{aligned} \gamma_2'(t) &= L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}) \frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \\ &= \frac{k\sqrt{k}L^2}{2g} \sin(2\sqrt{kt}) \end{aligned}$$

e integrando quest'ultima espressione ricaviamo

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(t) &= \int_0^t \frac{k\sqrt{k}L^2}{2g} \sin(2\sqrt{k}\rho) d\rho \\
 &= -\frac{L^2k}{4g} (\cos(2\sqrt{kt}) - 1) \\
 &= -\frac{L^2k}{2g} (\cos^2(\sqrt{kt}) - 1) \\
 &= -\frac{L^2k}{2g} \left(\frac{g^2}{k^2L^2} \cos^2 \frac{\theta(t)}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{L^2k}{2g} - \frac{g}{2k} \left(\frac{1 + \cos \theta(t)}{2} \right) \\
 &= \frac{L^2k}{2g} - \frac{g}{4k} - \frac{g}{4k} \cos \theta(t).
 \end{aligned}$$

Se poniamo

$$R := \frac{g}{4k}$$

otteniamo infine

$$\gamma_2(t) = \frac{L^2}{8R} - 2R + R[1 - \cos \theta(t)]. \quad (10)$$

Ora calcoliamo $\gamma_1(t)$. Dalla prima uguaglianza di (8) sappiamo che vale

$$\begin{aligned}
 \gamma_1'(t) &= L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}) \sin \frac{\theta(t)}{2} \\
 &= L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}) \sqrt{1 - \left[\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \right]^2}
 \end{aligned}$$

e integrando possiamo trovare $\gamma_1(t)$.

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(t) &= \int_0^t L\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}\rho) \sqrt{1 - \left[\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{k}\rho) \right]^2} d\rho \\
 &= -\frac{g}{k} \int_{\frac{kL}{g}}^{\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt})} \sqrt{1 - x^2} dx
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il seguente cambio di variabile

$$x = \frac{kL}{g} \cos(\sqrt{k}\rho).$$

Ora ponendo

$$x = \sin y$$

troviamo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\int \cos^2 y dy \right]_{y=\arcsin x} \\ &= \left[\int \frac{\cos(2y) + 1}{2} dy \right]_{y=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2y)}{2} + y \right]_{y=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} [\sin y \cos y + y]_{y=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= -\frac{g}{2k} \left[\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \sqrt{1 - \frac{k^2 L^2}{g^2} \cos^2(\sqrt{kt})} + \arcsin \left(\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \right) \right] \\ &\quad + \frac{g}{2k} \left[\frac{kL}{g} \sqrt{1 - \frac{k^2 L^2}{g^2}} + \arcsin \left(\frac{kL}{g} \right) \right] \\ &= -\frac{g}{2k} \left[\cos \frac{\theta(t)}{2} \sin \frac{\theta(t)}{2} + \arcsin \left(\cos \frac{\theta(t)}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{g}{2k} \left[\cos \frac{\theta(0)}{2} \sin \frac{\theta(0)}{2} + \arcsin \left(\cos \frac{\theta(0)}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{g}{2k} \left[\frac{\sin \theta(t)}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta(t)}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta(0) - \frac{\pi}{2} + \frac{\theta(0)}{2} \right] \\ &= R(\theta(t) - \sin \theta(t)) + R \sin \theta(0) - R\theta(0). \end{aligned}$$

In conclusione abbiamo

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = R(\theta(t) - \sin \theta(t)) + R \sin \theta(0) - R\theta(0) \\ \gamma_2(t) = R(1 - \cos \theta(t)) + \frac{L^2}{8R} - 2R \end{cases}$$

che rappresenta una cicloide.

Il pendolo cicloidale

Il primo a occuparsi di orologi a pendolo fu Galileo, che aveva studiato le piccole oscillazioni in un pendolo semplice (cioè circolare) concludendo che queste hanno approssimativamente periodo costante. In realtà il pendolo con periodo “davvero” costante, cioè perfettamente tautocrono, è il pendolo cicloidale. Fu Huygens, dopo aver scoperto la proprietà tautocrona della cicloide, a concepire per primo un pendolo cicloidale, cioè un pendolo in cui il peso attaccato al filo si muove su una traiettoria cicloidale. L’invenzione di Huygens tuttavia non ebbe successo a causa degli errori dovuti a problemi di attrito e si decise di continuare ad usare il pendolo circolare scegliendo oscillazioni sufficientemente piccole.

Procediamo con la costruzione del pendolo cicloidale. Abbiamo dimostrato nella sezione precedente che la cicloide è tautocrona, quindi se immaginiamo di far oscillare il pendolo in modo che il peso descriva un arco di cicloide, le oscillazioni saranno isocrone. A questo scopo è necessario porre dei vincoli sul filo del pendolo, per evitare che esso oscilli liberamente appeso a un punto e che il peso si muova così lungo una traiettoria circolare. Vincoliamo il filo del pendolo a muoversi tra due profili ad arco di cicloide: vogliamo dimostrare che in questo modo la traiettoria percorsa dal peso è una cicloide.

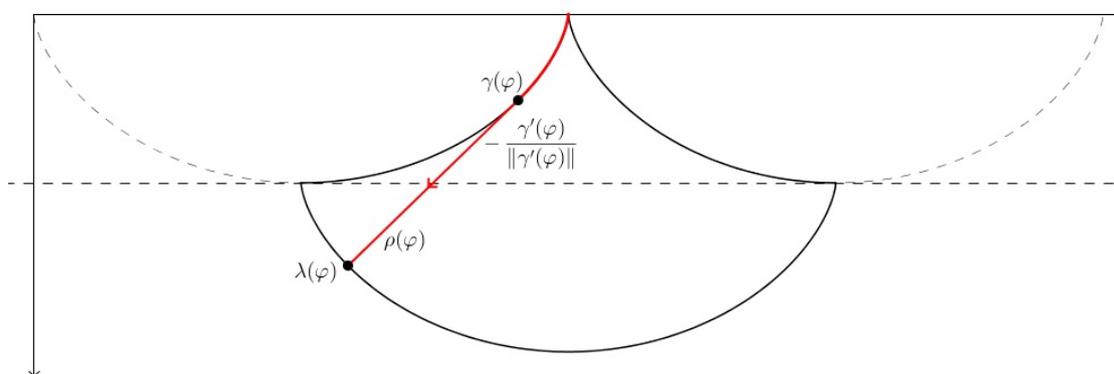


Figura 3: *Pendolo cicloidale*

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano con l’asse delle ordinate rivolta verso il basso, e sia γ la cicloide parametrizzata da

$$\varphi \mapsto (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi).$$

Imponiamo che il filo del pendolo abbia lunghezza pari a metà della lunghezza di un arco di cicloide, cioè $4R$. Sia $\gamma(\varphi)$ il punto della cicloide nel quale il filo si

stacca dal profilo cicloidale.

Sappiamo che

$$\begin{aligned}\gamma'(\varphi) &= (R - R \cos \varphi, R \sin \varphi) \\ \|\gamma'(\varphi)\| &= R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \varphi}\end{aligned}$$

e quindi la direzione tangente è

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'(\varphi)}{\|\gamma'(\varphi)\|} &= \frac{(1 - \cos \varphi, \sqrt{1 - \cos^2 \varphi})}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \varphi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1 - \cos \varphi}, \sqrt{1 + \cos \varphi}) \\ &= \left(\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le relazioni

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (11)$$

Ora calcoliamo la lunghezza della parte di filo che non aderisce al profilo cicloidale, che è pari alla lunghezza dell'arco di cicloide compreso tra $\gamma(\pi)$ e $\gamma(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \int_{\pi}^{\varphi} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= R\sqrt{2} \int_{\pi}^{\varphi} \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= R\sqrt{2} \int_{\pi}^{\varphi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -4R \cos \frac{\varphi}{2}.\end{aligned} \quad (12)$$

A questo punto possiamo scrivere la traiettoria della massa appesa all'estremo libero del filo come

$$\lambda(\varphi) := \gamma(\varphi) - \frac{\gamma'(\varphi)}{\|\gamma'(\varphi)\|} \rho(\varphi). \quad (13)$$

Svolgiamo i calcoli

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi) &= (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) + 4R \cos \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \left(R\varphi - R \sin \varphi + 4R \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, R - R \cos \varphi + 4R \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= (R\varphi - R \sin \varphi + 2R \sin \varphi, R - R \cos \varphi + 2R(\cos \varphi + 1)) \\ &= (R\varphi + R \sin \varphi, 3R + R \cos \varphi)\end{aligned} \quad (14)$$

da cui, sommando e sottraendo $\gamma(\pi)$, otteniamo

$$\lambda(\varphi) = (R\pi, 2R) + (R(\varphi - \pi) + R \sin \varphi, R + R \cos \varphi). \quad (15)$$

Se definiamo

$$\alpha := \varphi - \pi, \quad \alpha \in [0, \pi],$$

possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) &= (R\pi, 2R) + (R\alpha + R \sin(\pi + \alpha), R + R \cos(\pi + \alpha)) \\ &= (R\pi, 2R) + (R\alpha - R \sin \alpha, R - R \cos \alpha) \\ &= \gamma(\pi) + \gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto che λ parametrizza la cicloide di partenza traslata di $R\pi$ lungo l'asse delle ascisse e di $2R$ lungo l'asse delle ordinate.

L'evoluta di una curva

La costruzione del pendolo cicloidale sfrutta una particolare proprietà geometrica: l'evoluta di una semicicloide è una semicicloide. Ricordiamo alcuni concetti.

Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} e

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

una curva piana regolare di classe C^3 . Indichiamo con T , N e k , rispettivamente, la direzione tangente, la direzione normale e la curvatura indotte da α . Valgono allora le seguenti identità

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{1}{\|\alpha'\|}(\alpha'_1, \alpha'_2) \\ N &= \frac{1}{\|\alpha'\|}(-\alpha'_2, \alpha'_1) \\ k &= \frac{\det(\alpha'|\alpha'')}{\|\alpha'\|^3} = \frac{N \cdot \alpha''}{\|\alpha'\|^2}. \end{aligned}$$

Inoltre si può facilmente verificare che

$$T' = k\|\alpha'\|N, \quad N' = -k\alpha'. \quad (16)$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 1. Sia α una curva piana regolare di classe C^3 , con curvatura non costante e mai nulla. Si definisce evoluta di α il luogo dei centri delle circonferenze osculatrici, cioè la curva data da:

$$\beta := \alpha + \frac{1}{k}N. \quad (17)$$

Osservazione 1. L'evoluta di una curva α regolare di classe C^i , con $i \geq 3$, è una curva piana di classe C^{i-2} , regolare tranne che per i valori del parametro t che sono stazionari per la curvatura k di α ; infatti dalla seconda identità in (16) segue che

$$\beta'(t) = -\frac{k'(t)}{k(t)^2}N(t). \quad (18)$$

Osservazione 2. Le evolute di curve piane regolari (di classe C^3 con curvatura non costante e mai nulla) equivalenti sono curve equivalenti.

Per provare tale affermazione, è sufficiente verificare che se

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

è una curva piana regolare (di classe C^3 con curvatura non costante e mai nulla) e se γ è la curva a velocità unitaria equivalente ad α , allora le evolute di α e di γ sono equivalenti. Infatti, posto

$$\varphi(\theta) := \int_a^\theta \|\alpha'\|, \quad \theta \in [a, b]$$

allora si ha che φ è un diffeomorfismo di classe C^3

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, L]$$

con

$$L := \int_a^b \|\alpha'\| = \varphi(b).$$

Osserviamo che vale l'identità

$$\gamma \circ \varphi = \alpha.$$

Indichiamo con N_α , k_α e N_γ , k_γ la normale e la curvatura indotte rispettivamente da α e da γ . Indichiamo inoltre con β_α e β_γ , rispettivamente, le evolute di α e γ . Allora, $\forall \theta \in [a, b]$, abbiamo che

$$N_\gamma(\varphi(\theta)) = N_\alpha(\theta), \quad k_\gamma(\varphi(\theta)) = k_\alpha(\theta).$$

Segue quindi che

$$\begin{aligned}\beta_\alpha(\theta) &= \alpha(\theta) + \frac{1}{k_\alpha(\theta)} N_\alpha(\theta) \\ &= \gamma(\varphi(\theta)) + \frac{1}{k_\gamma(\varphi(\theta))} N_\gamma(\varphi(\theta)) \\ &= (\beta_\gamma \circ \varphi)(\theta)\end{aligned}$$

per ogni $\theta \in [a, b]$, cioè le evolute di α e γ sono equivalenti.

Come vedremo fra poco, l'evoluta di una curva gode dell'interessante proprietà di essere anche descrivibile come "inviluppo delle rette normali" a tale curva. Per approfondire tale affermazione ricordiamo alcuni fatti.

Siano Ω e I , rispettivamente, un aperto di \mathbb{R}^2 e un intervallo aperto di \mathbb{R} . Consideriamo poi una funzione $F \in C^1(\Omega \times I)$ e, per $t \in I$, indichiamo con F_t la t -sezione di F , i.e.

$$F_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto F(x, y, t).$$

Osserviamo che $F_t \in C^1(\Omega)$ per ogni $t \in I$. Supponiamo che, per ogni $t \in I$, ogni punto di $F_t^{-1}(0)$ sia regolare, cioè che

$$\nabla F_t(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{t.c.} \quad F_t(x, y) = 0. \quad (19)$$

Allora, per il teorema delle funzioni implicite, l'insieme

$$C_t := F_t^{-1}(0)$$

è una curva di classe C^1 in Ω (per ogni $t \in I$).

Osserviamo che, per ogni $(x, y, t) \in \Omega \times I$, le prime due componenti di $\nabla F(x, y, t)$ coincidono con $\nabla F_t(x, y)$. Quindi, per (19), ogni punto di $F^{-1}(0)$ è regolare e di conseguenza (di nuovo per il teorema delle funzioni implicite) l'insieme

$$\Sigma := F^{-1}(0)$$

è una superficie di classe C^1 in $\Omega \times I$.

Ricordiamo che $(\nabla F)|_\Sigma$ è un campo ortogonale a Σ , per cui se $(x_0, y_0, t_0) \in \Sigma$ allora

$$[(x, y, t) - (x_0, y_0, t_0)] \cdot \nabla F(x_0, y_0, t_0) = 0$$

è l'equazione del piano tangente $T_{(x_0, y_0, t_0)}\Sigma$.

Consideriamo ora un punto $(x_0, y_0, t_0) \in \Sigma$ tale che

$$D_3F(x_0, y_0, t_0) = 0$$

cioè

$$T_{(x_0, y_0, t_0)}\Sigma \text{ è verticale.} \quad (20)$$

Ora, è intuitivamente evidente che da (20) segue la seguente proprietà:

Per t vicini a t_0 , le curve C_t (NB: C_t coincide con la proiezione in \mathbb{R}_{xy}^2 di $\Sigma \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$) si concentrano in (x_0, y_0) .

Questa proprietà spiega intuitivamente la ragione per cui se si tracciano le curve C_t (per esempio con una matita colorata), la traccia risulta più “marcata” nei punti (x_0, y_0) per i quali esiste t_0 tale che $D_3F(x_0, y_0, t_0) = 0$. Queste considerazioni intuitive sono la base per la seguente definizione.

Definizione 2. Si definisce “inviluppo della famiglia $\{C_t\}_{t \in I}$ ” l’insieme

$$\mathcal{I}_F := \{(x, y) \in \Omega \mid \exists t \in I \text{ t.c. } F(x, y, t) = 0, D_3F(x, y, t) = 0\}. \quad (21)$$

In vista della prossima proposizione, consideriamo una curva piana regolare

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

di classe C^3 (con I intervallo aperto di \mathbb{R}) con curvatura non costante e mai nulla, e osserviamo che la retta normale ad α nel punto generico $\alpha(t)$ è data da

$$[(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) = 0. \quad (22)$$

Quindi, se definiamo la seguente funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2 \times I)$,

$$F(x, y, t) := [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) \quad (23)$$

allora $C_t = F_t^{-1}(0)$ è la normale ad α in $\alpha(t)$ di equazione (22).

Vale il seguente risultato.

Proposizione 2. *Sia F la funzione definita in (23). Allora l’inviluppo delle rette normali $\{F_t^{-1}(0)\}_{t \in I}$ coincide con l’evolva di α .*

Dimostrazione. Per (23) e per la prima identità di (16) abbiamo

$$\begin{aligned} D_3F(x, y, t) &= -\alpha'(t) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} + [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T'(t) \\ &= -\|\alpha'(t)\| + k(t)\|\alpha'(t)\|(x, y) - \alpha(t)] \cdot N(t) \end{aligned}$$

per ogni $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$. Allora l'involuppo \mathcal{I}_F delle rette normali ad α è l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali esiste $t \in I$ tale che

$$\begin{cases} [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) = 0 \\ k(t)[(x, y) - \alpha(t)] \cdot N(t) - 1 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Verifichiamo innanzitutto che \mathcal{I}_F risulta una curva in \mathbb{R}^2 . A tale scopo consideriamo la funzione $G = (G_1, G_2) \in C^2(\mathbb{R}^2 \times I, \mathbb{R}^2)$ con

$$\begin{aligned} G_1(x, y, t) &:= F(x, y, t) = [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) \\ G_2(x, y, t) &:= D_3F(x, y, t) = k(t)[(x, y) - \alpha(t)] \cdot N(t) - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che la matrice

$$DG(x, y, t) = \begin{pmatrix} T_1(t) & T_2(t) & D_3F(x, y, t) \\ k(t)N_1(t) & k(t)N_2(t) & D_{33}F(x, y, t) \end{pmatrix}$$

ha rango 2, poiché

$$\det \begin{pmatrix} T_1(t) & T_2(t) \\ k(t)N_1(t) & k(t)N_2(t) \end{pmatrix} = k(t) \det \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

in quanto $T(t)$ e $N(t)$ sono ortogonali e quindi linearmente indipendenti. Dunque, per il teorema delle funzioni implicite, l'equazione

$$G(x, y, t) = 0$$

definisce una curva regolare Λ di classe C^2 in $\mathbb{R}^2 \times I$. Osserviamo che \mathcal{I}_F coincide con la proiezione di Λ nel piano \mathbb{R}_{xy}^2 . Se indichiamo con $\Lambda^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) le componenti connesse di Λ , allora possiamo considerare una parametrizzazione regolare di $\Lambda^{(i)}$

$$\lambda^{(i)}(\rho) := (\lambda_1^{(i)}(\rho), \lambda_2^{(i)}(\rho), \lambda_3^{(i)}(\rho)), \quad \rho \in I_i$$

dove I_i è un intervallo chiuso di \mathbb{R} , e porre anche

$$\lambda_*^{(i)}(\rho) := (\lambda_1^{(i)}(\rho), \lambda_2^{(i)}(\rho)). \quad (25)$$

Allora l'identità

$$G(\lambda^{(i)}(\rho)) = 0, \quad \rho \in I_i$$

equivale a

$$\begin{cases} [\lambda_*^{(i)}(\rho) - \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho))] \cdot T(\lambda_3^{(i)}(\rho)) = 0 \\ k(\lambda_3^{(i)}(\rho))[\lambda_*^{(i)}(\rho) - \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho))] \cdot N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) - 1 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

$\forall \rho \in I_i$. Ricordando che $T(\lambda_3^{(i)}(\rho))$ e $N(\lambda_3^{(i)}(\rho))$ sono ortogonali, segue dalla prima identità di (26) che esiste $c(\rho)$ tale che

$$\lambda_*^{(i)}(\rho) - \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho)) = c(\rho)N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) \quad (27)$$

per ogni $\rho \in I$. Sostituendo quest'ultima nella seconda uguaglianza del sistema (26) otteniamo

$$-1 + k(\lambda_3^{(i)}(\rho))[c(\rho)N(\lambda_3^{(i)}(\rho))] \cdot N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) = 0 \quad (\rho \in I_i)$$

da cui ricaviamo

$$c(\rho) = \frac{1}{k(\lambda_3^{(i)}(\rho))} \quad (\rho \in I_i)$$

e quindi, sostituendo in (27),

$$\lambda_*^{(i)}(\rho) = \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho)) + \frac{1}{k(\lambda_3^{(i)}(\rho))}N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) \quad (\rho \in I_i). \quad (28)$$

Tale identità prova che

- $\lambda_3^{(i)'} \neq 0$ per ogni $\rho \in I_i$. Infatti, se esistesse $\rho \in I_i$ tale che $\lambda_3^{(i)'}(\rho) = 0$, allora derivando la (28) otterremmo anche $\lambda_*^{(i)'}(\rho) = 0$. Quindi sarebbe $\lambda^{(i)'}(\rho) = 0$ che è impossibile per la regolarità di $\lambda^{(i)}$.
- La proiezione di Λ_i in \mathbb{R}_{xy}^2 (essendo parametrizzata da $\lambda_*^{(i)}$) è una curva in \mathbb{R}_{xy}^2 parametrizzata da

$$t \mapsto \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t), \quad t \in \lambda_3^{(i)}(I_i).$$

La conclusione segue dal fatto che \mathcal{I}_F è l'unione delle proiezioni in \mathbb{R}_{xy}^2 delle Λ_i . \square

L'evoluta della cicloide

A questo punto data la cicloide parametrizzata da

$$\alpha(t) = (Rt - R \sin t, R - R \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

vogliamo trovare la sua evoluta

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

A questo scopo calcoliamo la direzione normale $N(t)$ e la curvatura $k(t)$:

$$N(t) = \frac{1}{R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}(-R \sin t, R - R \cos t)$$

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t)|\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{-1}{2R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}.$$

Segue che l'evolvente della cicloide è data da

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (Rt - R \sin t, R - R \cos t) - 2(-R \sin t, R - R \cos t) \\ &= (Rt + R \sin t, R \cos t - R) \\ &= \alpha(t + \pi) - \alpha(\pi). \end{aligned}$$

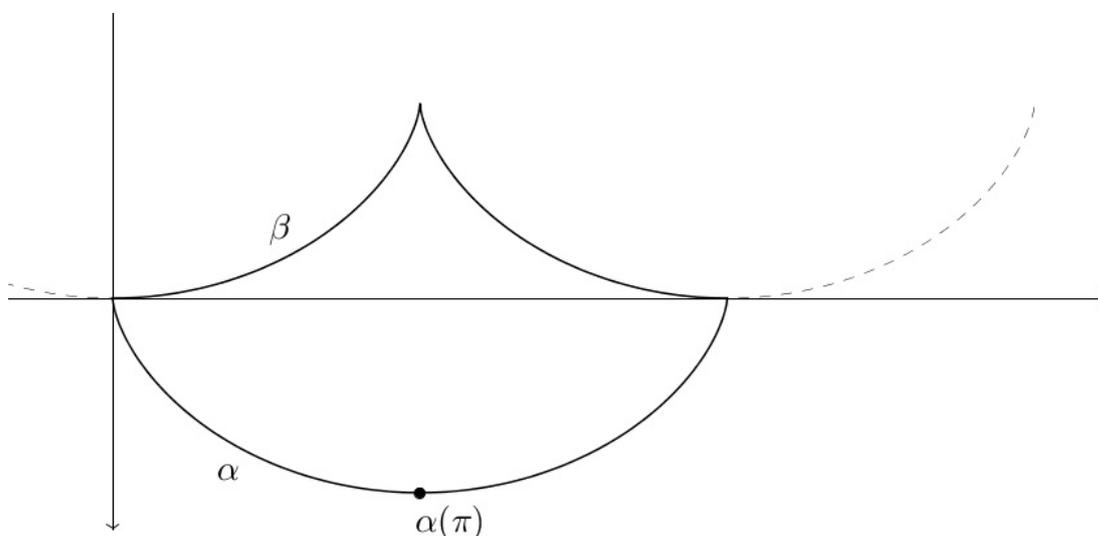


Figura 4: *Cuspide cicloidale come involuppo delle normali alla cicloide α .*

Abbiamo così provato che (vedi Fig.4):

- $\beta|_{[0,\pi]}$ parametrizza la semicicloide ottenuta traslando di $-\alpha(\pi)$ la semicicloide $\alpha|_{[\pi, 2\pi]}$;
- $\beta|_{[\pi,2\pi]}$ parametrizza la semicicloide ottenuta traslando di $-\alpha(\pi)$ la semicicloide $\alpha|_{[2\pi, 3\pi]}$.

Queste conclusioni, unitamente a Proposizione 2, prova che l'involuppo delle normali ad una cicloide è la "cuspide cicloidale" considerata nella costruzione del pendolo cicloidale in Sezione . Un pendolo cicloidale in movimento fornisce pertanto una visualizzazione dinamica della cicloide come curva che si ottiene dall'involuppo delle normali ad una cicloide.

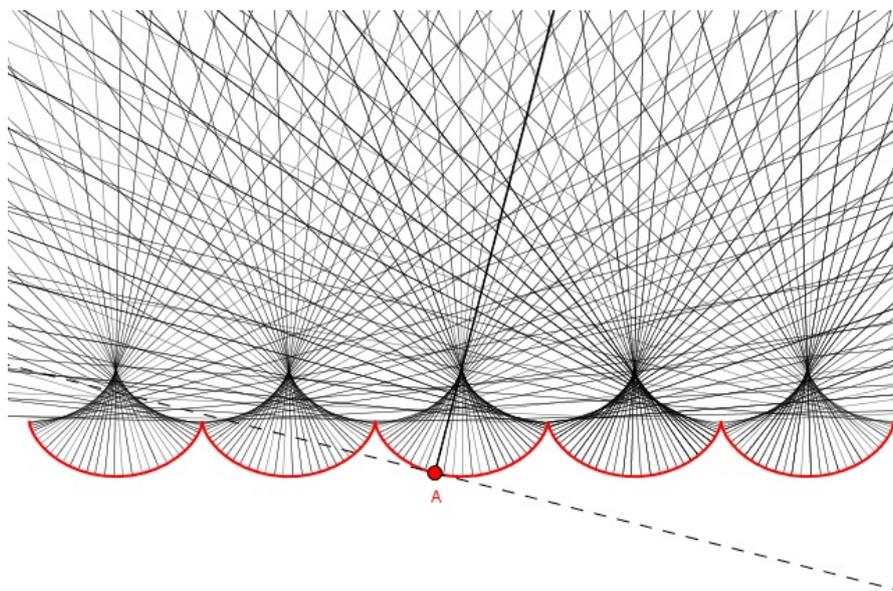


Figura 5: *Evoluta della cicloide come involuppo delle rette normali ad una cicloide.*

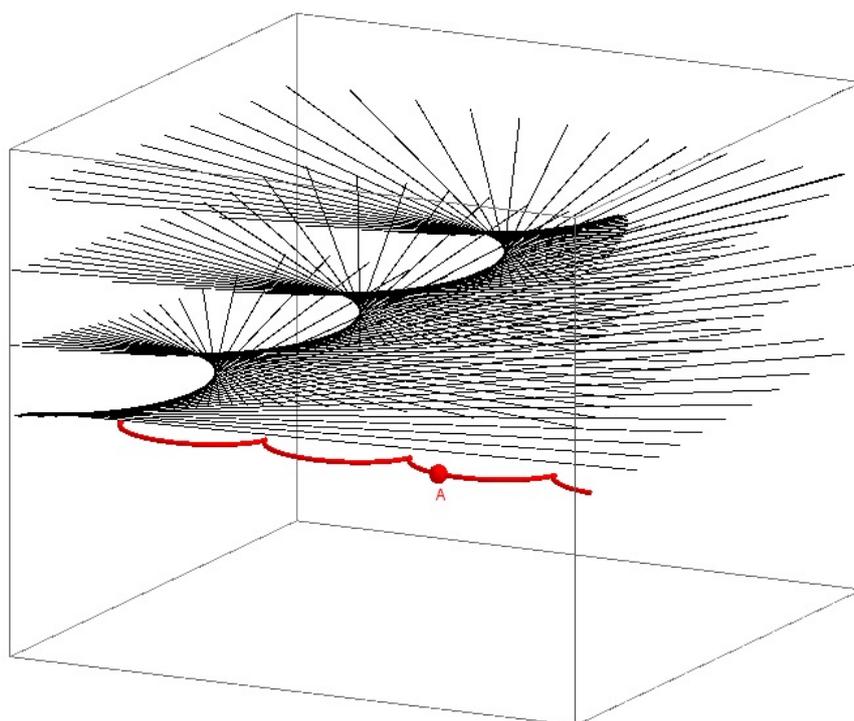


Figura 6: *Evoluta della cicloide come involuppo delle rette normali ad una cicloide.*