

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Matematica



Laurea Magistrale in Matematica
Curriculum: Teaching and Scientific Communication

**Problema della brachistocrona e
proprietà della curva cicloide.
Una trattazione elementare fra teoria e
laboratorio**

Relatore

Prof. Silvano Delladio

Laureanda

Katia Simoni

Anno accademico 2015/2016

20 Luglio 2016

*Ai miei nonni
Modesto, Uralia, Rodolfo e Silvia.*

Indice

Introduzione	7
Cenni di storia della cicloide	9
1 Il problema della brachistocrona	13
1.1 Il funzionale tempo	13
1.2 L'equazione di Eulero	15
1.3 Test di esclusione	17
1.3.1 Il segmento	18
1.3.2 La circonferenza	18
1.3.3 La curva α -Hölderiana (con $\alpha \in (0, 1)$)	18
1.3.4 La soluzione del problema: la cicloide	19
1.4 Le cicloidi generalizzate	21
1.4.1 L'articolo di Benson	24
2 La risoluzione di Johann Bernoulli del problema della brachistocrona	35
2.1 Il problema del doppio strato	36
2.2 Il problema generale	42
2.2.1 Bilancio energetico	42
2.2.2 Discretizzazione del problema	42
2.2.3 Test di esclusione	46
3 La proprietà tautocrona della curva cicloide	49
3.1 La cicloide è tautocrona	49
3.1.1 La scoperta di Huygens	52
3.2 Il pendolo cicloidale	57
3.3 L'evoluta di una curva	59
3.3.1 L'evoluta della cicloide	64

4	Didattica laboratoriale sulla curva cicloide	67
4.1	L'importanza del Laboratorio	68
4.2	Laboratorio sulla brachistocrona in Università	70
4.2.1	Primo incontro	71
4.2.2	Secondo incontro	75
4.3	Con noi all'Università	78
4.4	Laboratori all'Istituto di Istruzione L. Guetti di Tione di Trento . .	80
4.4.1	Attività in classe prima	80
4.4.2	Attività in classe terza	81
5	Approfondimenti didattici	87
5.1	Retta tangente e derivata	87
5.2	Circonferenza osculatrice e curvatura	88
5.2.1	Un esempio: la curvatura della parabola	92
A	Software	95
A.1	Il problema del doppio strato	96
A.2	Discretizzazione	103
A.3	Il campo gara	107
A.4	Il pendolo cicloidale	110
A.5	La curvatura di un grafico	111
B	Oggetti del laboratorio	113
B.1	Brachistocrona	113
B.2	Tracciatore di cicloidi	114
B.3	Profilo cicloidale per il pendolo di Huygens	117
	Bibliografia	118

Introduzione

Questa tesi rappresenta il risultato finale di oltre sei mesi di lavoro finalizzato a produrre materiale utile alla comunicazione delle proprietà della curva cicloide, principalmente (ma non solo, come si vedrà ...) nel contesto dell'insegnamento della matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado. Per fare questo abbiamo operato su più fronti:

- Redazione di testi di approfondimento per l'insegnante;
- Realizzazione di materiali didattici di varia natura (testi, software e item da laboratorio) finalizzati alla progettazione di unità didattiche in ambito scolastico (secondo le modalità "laboratoriali" definite nel Piano Lauree Scientifiche del MIUR) e in ambito museale;
- Presentazioni didattiche effettuate, in contesti eterogenei e in più occasioni, presso varie istituzioni: il Liceo Galilei di Trento, l'Istituto di Istruzione Lorenzo Guetti di Tione di Trento e il Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento.

La parte di questo lavoro relativa alla produzione di materiali utili all'implementazione di percorsi laboratoriali sulla curva cicloide è stata fatta nel corso di un tirocinio effettuato presso il Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento.

La tesi è articolata in cinque capitoli, che qui brevemente descriviamo.

- **Primo Capitolo:** è dedicato al problema della brachistocrona, cioè alla curva di tempo minimo. Proponiamo in particolare, per il docente, la risoluzione variazionale del problema basata sulla deduzione del funzionale tempo e dell'equazione di Eulero corrispondente. Mostriamo che segmento, circonferenza e parabola non sono la soluzione, e che la cicloide invece soddisfa l'equazione di Eulero. Introduciamo poi delle curve particolari, denominate cicloidi generalizzate, le quali soddisfano l'equazione di Eulero ma non sono la soluzione al problema. Concludiamo mostrando che la brachistocrona è la cicloide.

- **Secondo Capitolo:** riportiamo la strategia risolutiva del problema della brachistocrona dovuta a Johann Bernoulli. Questo metodo è abbastanza semplice da essere proponibile in una classe di liceo scientifico, infatti presentiamo la descrizione di una lezione tenuta dal professore Silvano Delladio presso il Liceo Scientifico Galileo Galilei di Trento.
- **Terzo Capitolo:** proponiamo approfondimenti per il docente riguardanti la proprietà tautocrona. Dimostriamo in particolare che la cicloide è una curva tautocrona e mostriamo il ragionamento che portò Huygens a scoprire questa notevole proprietà. Riportiamo una modellizzazione del pendolo cicloidale, che verrà poi proposta in forma laboratoriale nelle attività didattiche descritte nel quarto capitolo. Infine approfondiamo i concetti di involuppo e di evoluta, strettamente legati al funzionamento del pendolo cicloidale.
- **Quarto Capitolo:** riportiamo le attività didattiche che abbiamo realizzato nel corso del tirocinio: un laboratorio sulla brachistocrona presso il Dipartimento di Matematica, un laboratorio sulle proprietà della cicloide in occasione dell'evento *Con noi all'Università* e due laboratori sulla cicloide presso l'Istituto di Istruzione Lorenzo Guetti di Tione di Trento.
- **Quinto Capitolo:** i percorsi didattici sulla cicloide offrono la possibilità di approfondire alcuni argomenti importanti per la didattica della matematica della Scuola Secondaria di secondo grado. A scopo di esempio proponiamo i temi della derivata e della curvatura di una curva.

Infine, in appendice, descriviamo il materiale software e cartaceo realizzato per l'implementazione dei laboratori sulla cicloide. Per concludere riportiamo una galleria di immagini di oggetti da exhibit, alcuni progettati nel corso del tirocinio (un tracciatore di cicloidi e un profilo per il pendolo cicloidale) e altri già esistenti, anch'essi utilizzati nei percorsi laboratoriali, e disponibili presso il Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica dell'Università di Trento.

Cenni di storia della cicloide

La cicloide è la curva descritta da un punto su una circonferenza che rotola su una retta senza strisciare. Essa è una delle curve più affascinanti della geometria, tanto che in letteratura matematica è spesso chiamata *la bella Elena della matematica* o *pomo della discordia* per sottolineare la sua bellezza estetica e le sue numerose proprietà e allo stesso tempo per ricordare che è stata oggetto di numerose dispute tra matematici (cfr. [4]). Stranamente questa curva venne ignorata nell'antichità greca e venne studiata soltanto a partire dal XVII secolo. Il merito di aver immaginato e studiato per primo questa curva è attribuito a Galileo Galilei, che riprese tale curva da Nicola Cusano nel suo studio sul disegno delle arcate dei ponti e la battezzò col nome di cicloide. Il nome cicloide deriva dal greco *kýkloeidès*: *kýklos* significa “cerchio” e *oeidès* significa “forma”, cioè “fatto da un cerchio”.

*Quella curva arcuata sono più di cinquant'anni che mi venne in mente
il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla
agli archi di un ponte.*

Galileo Galilei.

Dopo Galileo, i più grandi matematici del XVII secolo studiarono la cicloide e scoprirono numerose proprietà: B. Pascal (1623-1662), R. Cartesio (1596-1650), G. Roberval (1602-1675), E. Torricelli (1608-1647), P. de Fermat (1601-1665), C. Huygens (1629-1695), Jacob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), G. W. Leibniz (1646-1716), I. Newton (1642-1727).

Tra le sfide riguardanti questa curva, e le successive proteste sulla priorità e la correttezza delle scoperte, ricordiamo quella lanciata da Pascal. Si racconta che lui scoprì numerose proprietà della cicloide, che lui chiamava *roulette*, durante una notte insonne a causa di un mal di denti. Così racconta suo fratello:

*La recrudescenza dei mali di mio fratello cominciò con il mal di denti
che gli tolse completamente il sonno. Ma in qual modo uno spirito co-*

me il suo avrebbe potuto stare sveglio e non pensare a niente? È per questo motivo che proprio durante le insonnie, così frequenti e affaticanti, gli balenarono una volta alcuni pensieri sulla cicloide. La prima idea fu seguita da una seconda e la seconda da una terza; e infine una moltitudine di pensieri succedentisi gli uni agli altri. Essi si rivelarono, quasi suo malgrado, la dimostrazione della cicloide, del che fu egli stesso sorpreso. Ma poiché da molto tempo aveva rinunciato a tutte queste cose, non pensò minimamente di scrivere nulla. Tuttavia, avendone parlato ad una persona [...], questa persona concepì intorno a questa scoperta un progetto che concerneva solo la gloria di Dio, e incoraggiò mio fratello a scrivere tutto quello che gli era balenato nello spirito, e a farlo stampare.

Perier G., Vita di Pascal, Il Saggiatore, Milano 1958.

Nel giugno del 1658 Pascal in seguito alle sue scoperte proclamò un concorso pubblico tra tutti i matematici: a chi avesse risolto i problemi da lui posti sarebbe stato dato un premio in denaro. I quesiti erano i seguenti:

- L'area della parte di piano compresa tra un arco della curva e la retta fissa.
- Il centro di gravità di tale regione.
- Il volume del solido generato dalla rotazione di tale regione attorno alla retta fissa.
- Il volume del solido generato dalla rotazione di tale regione attorno ad un asse ortogonale alla retta fissa.
- I centri di gravità di tali solidi di rotazione.
- I centri di gravità della metà dei solidi di rotazione tagliati da un piano passante per il loro asse.

I primi quattro problemi erano già stati risolti da de Roberval, dunque Pascal decise che la sfida riguardava solo gli ultimi due. La sfida venne raccolta da numerosi matematici, tra i quali Huygens, J. Wallis e C. Wren, ma, secondo Pascal, nessuna tra le soluzioni proposte era completamente corretta. Il 7 ottobre il concorso venne dichiarato chiuso da Pascal e il 24 novembre le soluzioni date dai partecipanti alla sfida furono esaminate da una commissione presieduta da Pierre de Carcavi. Nel mese di dicembre Pascal, con una lettera a Carcavi, pubblicò le proprie soluzioni e si tenne il denaro in premio, generando il malcontento tra i matematici che avevano partecipato alla sfida.

Un'altra disputa riguardante la cicloide fu quella tra de Roberval e Torricelli. Nel 1630 de Roberval dimostrò che l'area sottesa ad un arco di cicloide è pari a tre volte l'area della circonferenza generatrice. Egli grazie a questa scoperta ottenne la cattedra di Matematica al Collegio Reale, cattedra che veniva assegnata per concorso ogni tre anni. Tuttavia non venne richiesta una dimostrazione dettagliata e quindi de Roberval non la svelò. Così, quando nel 1664 Torricelli pubblicò una dimostrazione sul valore dell'area sottesa da un arco di cicloide, fu accusato di plagio da de Roberval e tra i due nacque un'accesa discussione.

Qualche anno dopo, Huygens scoprì una delle più note proprietà della cicloide, pubblicata nel 1673 in *Horologium oscillatorium*:

La curva tale che un punto pesante che la percorre nel vuoto arriva alla sua posizione più bassa nel medesimo tempo qualunque sia il punto da cui si diparte è una cicloide ordinaria a base orizzontale concava verso l'alto.

La cicloide acquisiva così il titolo di tautocrona, dal greco *tautos* che significa “lo stesso” e *khronos* che significa “tempo”. Durante i suoi studi sugli orologi a pendolo, Huygens si accorse che il periodo di oscillazione di un pendolo semplice risultava costante solo nel limite di piccole oscillazioni. Decise allora di costruire un pendolo perfettamente isocrono sfruttando la proprietà tautocrona della cicloide. Facendo oscillare il pendolo tra due guide cicloidali, il grave attaccato al filo del pendolo seguiva una traiettoria cicloidale e quindi il suo periodo di oscillazione era costante. L'invenzione di Huygens tuttavia non ebbe successo a causa degli errori dovuti all'attrito lungo gli archi di cicloide, e si decise di continuare ad usare il pendolo semplice, scegliendo oscillazioni sufficientemente piccole. Troviamo una citazione di questa notevole proprietà della cicloide anche in letteratura, nel seguente passaggio di *Moby Dick*:

Sollevando il quartiere si scoprono le grandi marmitte, due in tutto, e ciascuna della capacità di diverse botti. Quando si è dietro a strofinarle, il luogo presta per le profonde meditazioni matematiche. Fu nella marmitta sinistra del Pequod, che per la prima volta mi colpì il fatto notevole che, in geometria, tutti i corpi che scivolano giù per la cicloide, ad esempio la mia steatite, da qualunque punto discendano impiegano sempre lo stesso tempo.

H. Melville, *Moby Dick*, Harper and Brothers, New York, 1851.

Un'altra celebre proprietà della cicloide fu scoperta da Johann Bernoulli nel 1696, che le conferì il titolo di brachistocrona, dal greco *brakhistos* che significa “più corto” e *khronos* che significa “tempo”, cioè curva di tempo minimo. Anche in questa occasione la cicloide fu protagonista di una disputa tra i più brillanti matematici del tempo. Bernoulli infatti nel giugno di quell'anno pubblicò un articolo sul giornale scientifico del tempo, *Acta Eruditorum*, con il quale lanciava una sfida ai matematici chiedendo di risolvere il “problema novum”:

Determinare lineam curvam data duo puncta in diversis ab horizonte distantibus & non in eadem recta verticali connectentem, super qua mobile propria gravitate decurrens & a superiori puncto moveri incipiens citissime descendat ad punctum inferius.

Il problema era già stato affrontato da Galileo che aveva erroneamente indicato come curva brachistocrona l'arco di circonferenza che univa i due punti dati. Bernoulli dichiarò di conoscere la soluzione al problema e fissò come termine per la rivelazione della sua soluzione la fine dell'anno. Il termine fu in seguito posticipato, su consiglio di Leibniz, a Pasqua del 1697 per permettere anche ai matematici stranieri di ricevere la rivista *Acta Eruditorum*. La comunità dei matematici accolse con grande entusiasmo il “problema novum” e arrivarono presto le soluzioni di Leibniz, Jacob Bernoulli, Tschirnhaus e de l'Hopital. Newton venne a conoscenza del problema solo sei mesi dopo la sua pubblicazione, ma riuscì a trovare la soluzione la sera stessa e la spedì il giorno seguente a Johann tramite lettera anonima. Nel febbraio del 1697 la soluzione di Newton venne presentata alla Royal Society e pubblicata anonimamente e senza dimostrazione nel *Philosophical Transactions*. Nel maggio del 1697 vennero pubblicate in *Acta Eruditorum* le soluzioni di Johann e Jacob Bernoulli, i contributi di Tschirnhaus e l'Hopital, una nota di Leibniz, il quale dichiarava di non aver voluto pubblicare la propria soluzione in quanto simile a quella dei fratelli Bernoulli, e l'articolo anonimo di Newton.

Ciò che rende particolarmente innovativo il problema della brachistocrona è il fatto che la quantità da minimizzare, cioè il tempo, non dipende da una o più variabili, come nei problemi trattati fino ad allora col calcolo differenziale, ma dipende dall'intera curva. I successivi 300 anni di studi e ricerche, tra i quali ricordiamo i contributi di Eulero, Maupertius e Lagrange, sottolineano la particolare natura del problema, che diede inizio a un nuovo ramo della matematica, il calcolo delle variazioni.

La cicloide è forse l'unica curva matematica a cui è stato eretto un monumento. Nel 1994, infatti, in occasione del 375-esimo anniversario della sua fondazione, l'Università di Groningen decise di erigere in onore di Johann Bernoulli, che fu professore dal 1695 al 1705, un monumento alla brachistocrona, una delle scoperte più brillanti che fece durante il periodo in cui insegnava in questa università.

Capitolo 1

Il problema della brachistocrona

Una particella è vincolata a muoversi, sotto l'azione della sola forza di gravità, da un punto A a un punto B (più basso). Trovare il percorso per il quale la particella si muova da A a B nel minor tempo possibile, nell'ipotesi che la velocità iniziale in A sia nulla.

In questa parte vogliamo presentare la risoluzione variazionale del problema. Essa consiste nel calcolare la variazione prima del funzionale tempo. Nella prima sezione deriveremo tale funzionale. All'equazione di Eulero corrispondente, cioè alla variazione prima del funzionale, è dedicata la seconda sezione. Nella terza sezione proveremo che la brachistocrona non può essere né il segmento, né l'arco di circonferenza, né l'arco di parabola. Troveremo infine che l'equazione di Eulero è soddisfatta dalla curva cicloide. Nella quarta sezione tratteremo il caso particolare delle cicloidi generalizzate, curve che pur soddisfacendo l'equazione di Eulero non sono soluzione del problema della brachistocrona. Concludiamo il capitolo mostrando che la cicloide è l'unico punto di minimo per il funzionale tempo (cfr. [1]).

1.1 Il funzionale tempo

Nel corso dell'intera trattazione considereremo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso, cioè concorde con la direzione della forza di gravità. Fissiamo il punto di partenza $A(0, 0)$ nell'origine degli assi e il punto $B(x_B, y_B)$ con $x_B > 0$, $y_B > 0$. Il problema di Bernoulli richiede di trovare una curva che minimizza il tempo per passare da A a B . La famiglia delle “curve ammissibili” che consideriamo qui è costituita dai grafici delle funzioni

$$y : [0, x_B] \longrightarrow \mathbb{R}$$

di classe C^2 e (naturalmente) tali che $y(0) = 0$ e $y(x_B) = y_B$. Indichiamo con G_y il grafico di y e con $T(y)$ il tempo impiegato dalla particella per passare da A a B percorrendo G_y . Vogliamo calcolare l'espressione di $T(y)$ e successivamente trovare y che minimizza $T(y)$. Dato $x \in [0, x_B]$, indichiamo con $v(x)$ e $\tau(x)$, rispettivamente, la velocità del grave quando questo occupa la posizione $(x, y(x))$ e il tempo impiegato, partendo da A , per raggiungere tale posizione. Allora la velocità $v(x)$ è data da:

$$\begin{aligned} v(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + [y(x+h) - y(x)]^2}}{\tau(x+h) - \tau(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{h^2 + [y(x+h) - y(x)]^2}}{h}}{\frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left[1 + \frac{y(x+h) - y(x)}{h}\right]^2}}{\frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\tau'(x)}. \end{aligned}$$

Da questa espressione ricaviamo

$$\tau'(x) = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x)} \quad (1.1)$$

e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo l'espressione per il tempo

$$\begin{aligned} T(y) &= \tau(x_B) - \tau(0) = \int_0^{x_B} \tau'(x) dx \\ &= \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x)} dx. \end{aligned} \quad (1.2)$$

A questo punto vogliamo esprimere anche la velocità in termini di y . Dal bilancio energetico, come proveremo nella Sezione 2.2.1, ricaviamo che la velocità della particella quando transita alla quota $y(x)$ è pari a

$$v(x) = \sqrt{2g} \sqrt{y(x)}.$$

Il problema è ora quello di minimizzare il **funzionale tempo**

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} dx \quad (1.3)$$

nello spazio delle funzioni ammissibili

$$S := \{y \in C[0, x_B]: y \text{ è } C^2 \text{ a tratti, } y(0) = 0, y(x_B) = y_B, y_{|(0, x_B)} > 0\}.$$

1.2 L'equazione di Eulero

In questa sezione cerchiamo una funzione y che minimizzi il funzionale T , seguendo il procedimento inventato da Eulero, allievo di Johann Bernoulli. A questo scopo andiamo a calcolare la variazione prima del funzionale trovato. Supponiamo che y sia una soluzione, cioè un minimo di T . Sia $\varphi \in C_c^2(0, x_B)$ e per $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ consideriamo la nuova funzione

$$y + t\varphi : [0, x_B] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $y + t\varphi \in S$, purché $|t|$ sia sufficientemente piccolo. Poniamo

$$f_\varphi(t) := T(y + t\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y' + t\varphi')^2}{y + t\varphi}} dx, \quad (1.4)$$

per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tale che questa definizione abbia senso. Osserviamo che f è di classe C^1 e che

$$f_\varphi(t) \geq f_\varphi(0) \quad (\text{per } |t| \text{ sufficientemente piccolo})$$

quindi

$$f'_\varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^2(0, x_B).$$

Calcoliamo dunque $f'_\varphi(0)$, che è detta **variazione prima** del funzionale T , e poniamola pari a zero:

$$\begin{aligned} 0 = f'_\varphi(0) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{1 + y'^2}} \times \frac{2y'\varphi' - \varphi(1 + y'^2)}{y^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{y}{1 + y'^2}} \left(\frac{2y'\varphi'}{y} - \frac{\varphi(1 + y'^2)}{y^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} 2\sqrt{\frac{y'^2}{(1 + y'^2)y}} \varphi' - \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y^3}} \varphi dx \end{aligned}$$

dunque

$$0 = \int_0^{x_B} 2\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \varphi' dx - \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} \varphi dx. \quad (1.5)$$

Integriamo per parti il primo integrale:

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \varphi \right)_0^{x_B} - 2 \int_0^{x_B} \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \right)' \varphi dx \\ &= -2 \int_0^{x_B} \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \right)' \varphi dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sostituendo (1.6) nell'espressione (1.5) otteniamo che $\forall \varphi \in C_c^2(0, x_B)$ vale

$$0 = \int_0^{x_B} \left[2 \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \right)' + \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} \right] \varphi dx \quad (1.7)$$

che, per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, equivale a

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left(\sqrt{\frac{y'^2}{(1+y'^2)y}} \right)' + \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+y'^2)y}{y'^2}} \times \frac{2y'y''(1+y'^2)y - y'^2(2yy'y'' + y' + y'^3)}{(1+y'^2)^2 y^2} + \sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}}. \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli troviamo la seguente equazione differenziale

$$2yy'' + y'^2 + 1 = 0 \quad (1.8)$$

che è detta **equazione di Eulero**.

Osservazione 1.2.1. *La soluzione non può avere derivata costante su un sottointervallo I di $[0, x_B]$, altrimenti se*

$$y'|_I = \text{cost} = c$$

allora l'equazione di Eulero nell'intervallo I darebbe

$$c^2 + 1 = 0$$

il che è impossibile.

Grazie all'Osservazione 1.2.1 possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'equazione di Eulero per y' con la certezza che questo non modifichi le soluzioni dell'equazione stessa

$$2yy'y'' + y'^3 + y' = 0$$

cioè

$$D[y'^2y] + y' = 0$$

che equivale a

$$D[y'^2y + y] = 0$$

e ci permette di concludere che

$$y[1 + y'^2] = \text{costante}. \quad (1.9)$$

Questa equazione ottenuta dall'equazione di Eulero è detta **condizione di brachistocrona**. Possiamo quindi concludere affermando che le candidate brachistocrona sono da ricercarsi tra le funzioni y continue e C^2 a tratti tali che

$$y(0) = 0 \quad y(x_B) = y_B$$

e che soddisfano l'equazione di Eulero, o, equivalentemente, la condizione di brachistocrona, per tutte le $x \in [0, x_B]$.

1.3 Test di esclusione

I matematici contemporanei di Bernoulli, non sapendo risolvere le equazioni differenziali, procedettero per tentativi, verificando se le curve note all'epoca soddisfacessero o meno la condizione di brachistocrona.

Osservazione 1.3.1. Per $x \mapsto 0$ abbiamo che $y(x) \mapsto 0$. Dalla condizione di brachistocrona

$$y(1 + y'^2) = \text{costante} = c$$

si ricava che

$$\text{se } x \mapsto 0^+ \quad \text{allora} \quad 1 + y'^2(x) = \frac{c}{y(x)} \mapsto +\infty .$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = +\infty$$

cioè la curva brachistocrona deve avere tangente verticale in $A = (0, 0)$.

1.3.1 Il segmento

L'Osservazione 1.3.1 ci permette di scartare subito il segmento dalle candidate brachistocrona (infatti la tangente al segmento in A non è verticale). Alla stessa conclusione si perviene sostituendo

$$y(x) = mx, \quad m = \frac{y_B}{x_B}$$

nell'equazione di brachistocrona. Si ottiene

$$y(x)[1 + y'(x)^2] = mx(1 + m^2) \neq \text{costante}$$

e quindi possiamo concludere che il segmento non è la brachistocrona.

1.3.2 La circonferenza

Sulla base dell'Osservazione 1.3.1 possiamo considerare la circonferenza passante per $A = (0, 0)$ e B , tangente all'asse y in $A = (0, 0)$. Se indichiamo con R il suo raggio, abbiamo

$$y(x) = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

Allora otteniamo

$$\begin{aligned} y(x)[1 + y'(x)^2] &= \sqrt{2Rx - x^2} \left[1 + \left(\frac{2R - 2x}{2\sqrt{2Rx - x^2}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{R^2}{\sqrt{2Rx - x^2}} \end{aligned}$$

e tale quantità non è costante. Dunque neanche la circonferenza è la brachistocrona.

1.3.3 La curva α -Hölderiana (con $\alpha \in (0, 1)$)

Sempre sulla base dell'Osservazione 1.3.1, possiamo considerare anche

$$y(x) = mx^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha \in (0, 1), \quad m = \frac{y_B}{x_B^\alpha}.$$

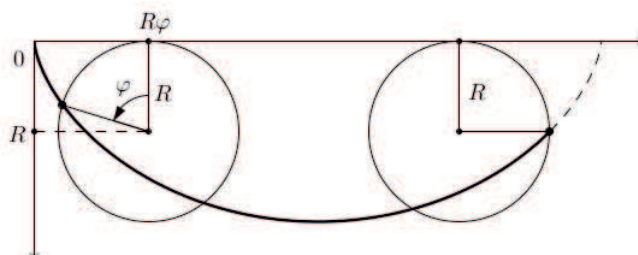
In tal caso abbiamo

$$\begin{aligned} y(x)[1 + y'(x)^2] &= mx^\alpha [1 + (m\alpha x^{\alpha-1})^2] \\ &= mx^\alpha (1 + m^2 \alpha^2 x^{2\alpha-2}) \end{aligned}$$

e tale quantità non risulta costante, quindi il grafico di tale funzione non è la brachistocrona.

1.3.4 La soluzione del problema: la cicloide

Tra le curve note vi era anche la cicloide, che era stata studiata da Huygens nelle sue ricerche sui pendoli ideali e per questo aveva acquisito il titolo di tautocrona. Scriviamo dunque la parametrizzazione della cicloide e verifichiamo che tale curva soddisfa la condizione di brachistocrona. Consideriamo la cicloide rovesciata generata da una circonferenza di raggio R che rotola sull'asse delle ascisse come nella figura che segue:



Allora una parametrizzazione di un arco liscio massimale è data da

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

con

$$\gamma(\varphi) := (\gamma_1(\varphi), \gamma_2(\varphi)) = (R\varphi - R\sin\varphi, R - R\cos\varphi). \quad (1.10)$$

Se $x \mapsto y(x)$ è la funzione di cui è grafico questa cicloide, allora abbiamo

$$y(\gamma_1(\varphi)) = \gamma_2(\varphi)$$

e quindi

$$y'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi) = \gamma_2'(\varphi).$$

Allora, se $x \in [0, 2\pi R]$ e se $\varphi \in [0, 2\pi]$ è tale che $\gamma_1(\varphi) = x$, vale

$$\begin{aligned} y(x)[1 + y'(x)^2] &= \gamma_2(\varphi) \left[1 + \frac{\gamma_2'(\varphi)^2}{\gamma_1'(\varphi)^2} \right] \\ &= \gamma_2(\varphi) \frac{\|\gamma'(\varphi)\|^2}{\gamma_1'(\varphi)^2} \\ &= (R - R\cos\varphi) \frac{2R^2 - 2R^2\cos\varphi}{(R - R\cos\varphi)^2} \\ &= 2R \\ &= \text{costante}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Abbiamo così provato che ogni cicloide (anche se non passa per B) soddisfa la condizione di brachistocrona.

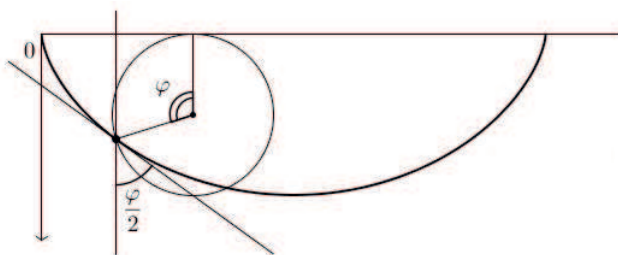
Osservazione 1.3.2. Se indichiamo con $\alpha(y)$ l'angolo formato dalla verticale con la tangente alla cicloide nel punto di ordinata y , abbiamo

$$\alpha(\gamma_2(\varphi)) = \frac{\varphi}{2}. \quad (1.12)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \cos[\alpha(\gamma_2(\varphi))] &= \frac{\gamma'(\varphi) \cdot (0, 1)}{\|\gamma'(\varphi)\|} \\ &= \frac{\gamma'_2(\varphi)}{\|\gamma'(\varphi)\|} \\ &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi)}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

da cui effettivamente segue (1.12).



Osservazione 1.3.3. La lunghezza della cicloide generata da una circonferenza di raggio R è pari a $8R$. Infatti da (1.10) abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\varphi)\| &= R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \varphi} \, d\varphi \\ &= R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2} \, d\varphi \\ &= 4R \left[-\cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 8R. \end{aligned}$$

1.4 Le cicloidi generalizzate

Abbiamo visto che le soluzioni del problema della brachistocrona sono da ricercarsi tra le curve che soddisfano l'equazione

$$y[1 + y'^2] = \text{costante}. \quad (1.13)$$

Abbiamo anche dimostrato che la cicloide soddisfa tale condizione. Tuttavia si possono costruire altre curve che soddisfano la condizione di brachistocrona. Si tratta di funzioni ottenute combinando cicloidi e funzioni costanti, e per tale motivo noi le chiameremo cicloidi generalizzate. Vediamo come costruire tali funzioni.

Consideriamo i punti $A = (0, 0)$ e $B = (x_B, y_B)$. Disegniamo il fascio di cicloidi aventi origine in A , come nella Figura 1.1. Ogni cicloide del fascio è univocamente identificata dal raggio r del suo cerchio generatore. Indichiamo dunque con C_r la cicloide di raggio r e con γ_r la sua parametrizzazione

$$\gamma_r(\varphi) = (r\varphi - r \sin \varphi, r - r \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (1.14)$$

Possiamo affermare che esiste un'unica cicloide del fascio passante per il punto B : sia R tale che $B \in C_R$.

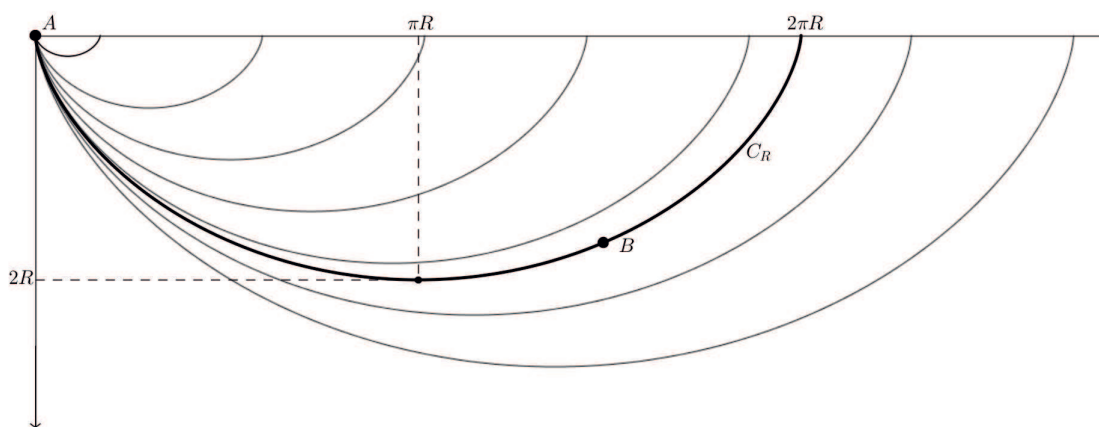


Figura 1.1: Con la linea più nera è indicata C_R , la cicloide del fascio passante B .

Ora proseguiamo con la costruzione delle cicloidi generalizzate. Cominciamo con la cicloide generalizzata più semplice, che indichiamo con CS poiché è formata da una cicloide e da un segmento. Consideriamo la cicloide C_r che è tangente alla retta $y = y_B$ nel punto $\gamma_r(\pi)$. Allora deve valere

$$r = \frac{y_B}{2}.$$

Componendo la semicicloide $\gamma_{y_B/2}([0, \pi])$ e il segmento che unisce i punti $(\frac{\pi}{2}y_B, y_B)$ e B otteniamo la curva CS , rappresentata in rosso nella Figura 1.2.

Più in generale per ogni $y_0 \in [y_B, 2R]$ possiamo costruire una cicloide generalizzata unendo i seguenti tre archi di curva (vedi Figura 1.2):

- L'arco AJ della cicloide $C_{y_0/2}$;
- Il segmento orizzontale JK ;
- L'arco di cicloide KB ottenuto riflettendo l'arco di cicloide HJ rispetto alla retta verticale per J e in seguito traslando quest'ultimo in modo da portare il punto J in K .

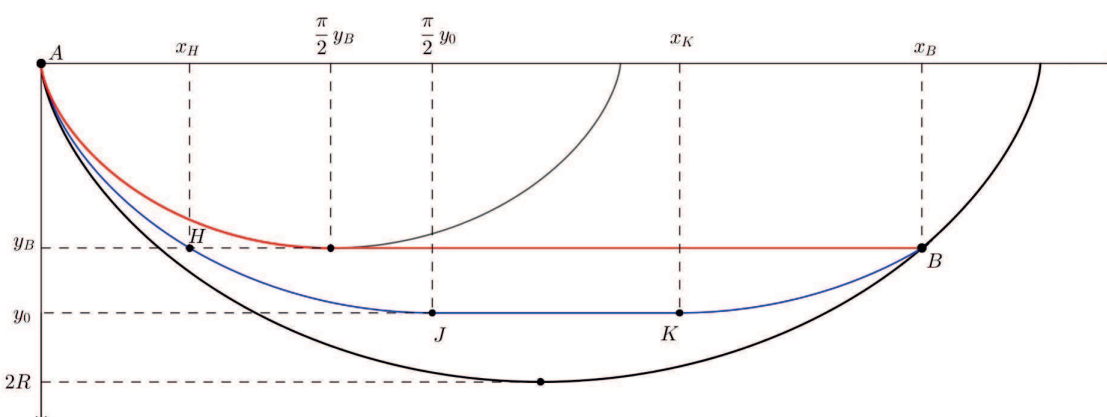


Figura 1.2: In nero la cicloide C_R , in rosso la cicloide generalizzata minima CS , in blu la cicloide generalizzata CSC_{y_0} .

Per formalizzare tale costruzione intuitiva indichiamo con

$$f_r : [0, 2\pi r] \longrightarrow \mathbb{R}$$

la funzione di cui è grafico la cicloide C_r . Si può verificare che $f_r|_{(0, 2\pi r)}$ è di classe C^∞ . Sia $x_H \in [0, \pi y_0/2]$ tale che

$$f_{y_0/2}(x_H) = y_B.$$

Inoltre sia x_K l'ascissa di K , cioè tale che valga:

$$x_B - x_K = \frac{\pi}{2}y_0 - x_H$$

e quindi

$$x_K = x_B - \frac{\pi}{2}y_0 + x_H.$$

Allora la cicloide generalizzata descritta intuitivamente sopra è il grafico della seguente funzione

$$F_{y_0/2}(x) := \begin{cases} f_{y_0/2}(x) & \text{se } x \in [0, \pi y_0/2] \\ y_0 = f_{y_0/2}(\pi y_0/2) & \text{se } x \in [\pi y_0/2, x_K] \\ f_{y_0/2}(x_H + x_B - x) & \text{se } x \in [x_K, x_B]. \end{cases} \quad (1.15)$$

Notiamo che, ovviamente, $F_{y_0/2}$ è di classe C^1 e C^2 a tratti. In seguito indicheremo tale cicloide generalizzata con CSC_{y_0} .

Vogliamo ora verificare che è ragionevole considerare CSC_{y_0} come candidata soluzione al problema della brachistocrona. Innanzitutto risulta semplice (anche per gli studenti!) capire che la CSC_{y_0} soddisfa la condizione di brachistocrona. Infatti, la condizione (1.13) è verificata da $F_{y_0/2}$ e, più precisamente, abbiamo che

$$F_{y_0/2}[1 + (F'_{y_0/2})^2] = y_0. \quad (1.16)$$

Sorge spontanea la questione: la CSC_{y_0} è di classe C^2 ? La seguente osservazione ci mostra che la risposta a tale questione è negativa.

Osservazione 1.4.1.

$F_{y_0/2}$ non è di classe C^2 . Infatti:

- Ovviamente vale

$$\lim_{x \rightarrow \pi y_0/2^+} F''_{y_0/2}(x) = 0;$$

- Dalla parametrizzazione (1.14) della cicloide $C_{y_0/2}$ (indicando per semplicità con ξ la prima componente di $\gamma_{y_0/2}$ e con F la funzione $F_{y_0/2}$), per $\varphi \in (0, \pi)$, abbiamo

$$F(\xi(\varphi)) = \frac{y_0}{2} - \frac{y_0}{2} \cos \varphi$$

e quindi

$$F'(\xi(\varphi))\xi'(\varphi) = \frac{y_0}{2} \sin \varphi$$

cioè

$$F'(\xi(\varphi)) = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

Pertanto abbiamo anche (per $\varphi \in (0, \pi)$)

$$F''(\xi(\varphi))\xi'(\varphi) = \frac{\cos \varphi(1 - \cos \varphi) - \sin^2 \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F''(\xi(\varphi)) &= \frac{\cos \varphi - \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{(y_0/2)(1 - \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)^2} \\ &= \frac{2(\cos \varphi - 1)}{y_0(1 - \cos \varphi)^3} \\ &= -\frac{2}{y_0(1 - \cos \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow \pi y_0/2^-} F''_{y_0/2}(x) = \lim_{\varphi \rightarrow \pi^-} F''(\xi(\varphi)) = -\frac{1}{2y_0} \neq 0.$$

Questo ci permette di concludere che la funzione $F_{y_0/2}$ non è $C^2[x_A, x_B]$.

Ora vogliamo provare che le *CSC*, pur soddisfacendo la condizione di brachistocrona, non sono soluzioni del problema di Bernoulli. Lo studente lo può osservare grazie al software sui test di esclusione (vedi Sezione A.3), mentre per l'insegnante riportiamo l'articolo di Donald C. Benson "An elementary solution of the brachistochrone problem", dove l'autore dimostra che la cicloide è l'unico punto di minimo per il funzionale tempo (cfr. [1]).

1.4.1 L'articolo di Benson

Come di consueto consideriamo il piano cartesiano con l'asse delle ordinate rivolta verso il basso e per semplicità supponiamo che il punto di partenza A e di arrivo B abbiano la stessa quota:

$$A = (0, 0), \quad B = (x_B, 0).$$

Il problema della brachistocrona richiede di minimizzare il funzionale tempo (1.3)

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx. \quad (1.17)$$

nello spazio delle funzioni ammissibili

$$S := \{y \in C^1[0, x_B]: y \text{ è } C^2 \text{ a tratti, } y(0) = 0, y(x_B) = 0, y_{|(0, x_B)} > 0\}.$$

Poniamo

$$\mathcal{M}(y) := \max_{x \in [0, x_B]} y(x)$$

e

$$M_0 := \frac{x_B}{\pi}. \quad (1.18)$$

Per $M \leq M_0$ consideriamo la cicloide generalizzata CSC_M .

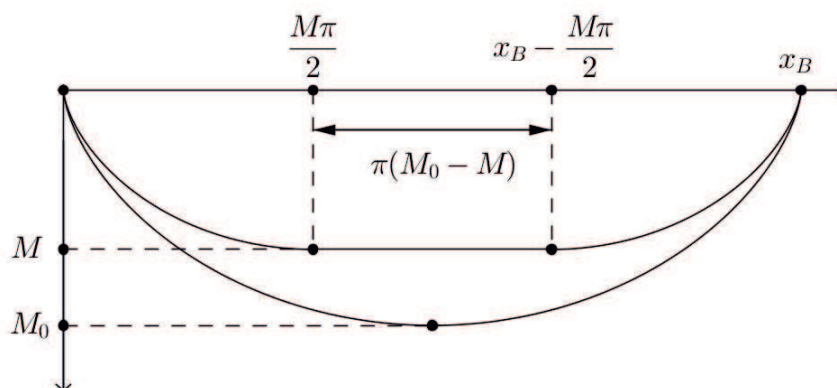


Figura 1.3: Cicloide generalizzata CSC_M e cicloide $C_{M_0/2}$.

Osservazione 1.4.2.

(i) Per ogni $M \leq M_0$ si ha $F_{M/2} \in S$ e

$$\mathcal{M}(F_{M/2}) = M.$$

(ii) Per $M < M_0$ il segmento in CSC_M è proprio. Per $M = M_0$ tale segmento si riduce a un punto e la CSC_{M_0} è congruente alla cicloide $C_{M_0/2}$.

Definiamo la funzione

$$u(x) := \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(x^{-\frac{1}{2}} x_B + \pi x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} (M_0 x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}), \quad x \in (0, +\infty). \quad (1.19)$$

Osservazione 1.4.3.

(i) Studiando il segno di u' si dimostra che M_0 è punto di minimo, cioè

$$u(x) > u(M_0) \text{ per ogni } x \neq M_0.$$

(ii) Per $M \leq M_0$ si ha

$$T(F_{M/2}) = u(M). \quad (1.20)$$

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} u(M) &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}}(M_0 M^{-\frac{1}{2}} + M^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}}\sqrt{M} \left(\frac{M_0}{M} + 1 \right). \end{aligned}$$

Per (1.15) e (1.18) otteniamo

$$\begin{aligned} \sqrt{2g}T(F_{M/2}) &= \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + F'_{M/2}(x)^2}{F_{M/2}(x)}} dx \\ &= \int_0^{M\pi/2} \sqrt{\frac{1 + F'_{M/2}(x)^2}{F_{M/2}(x)}} dx + \int_{M\pi/2}^{x_B - M\pi/2} \frac{1}{\sqrt{M}} dx \\ &\quad + \int_{x_B - M\pi/2}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + F'_{M/2}(x)^2}{F_{M/2}(x)}} dx \\ &= \int_0^{M\pi/2} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx + \frac{x_B - M\pi}{\sqrt{M}} \\ &\quad + \int_{M\pi/2}^{M\pi} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx \\ &= \int_0^{M\pi} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx + \frac{\pi(M_0 - M)}{\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

Come proveremo nella Sezione 3.1, abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{M\pi} \sqrt{\frac{1 + f'_{M/2}(x)^2}{f_{M/2}(x)}} dx = T(f_{M/2}) = 2\sqrt{\frac{M}{2g}}\pi.$$

Quindi

$$\begin{aligned} T(F_{M/2}) &= 2\sqrt{\frac{M}{2g}}\pi + \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\pi(M_0 - M)}{\sqrt{M}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \left[2\sqrt{M} + \frac{M_0 - M}{\sqrt{M}} \right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2g}}\sqrt{M} \left(\frac{M_0}{M} + 1 \right) \\ &= u(M). \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.1.(i) Per ogni $y \in S$ vale

$$T(y) \geq u(\mathcal{M}(y)). \quad (1.21)$$

(ii) L'identità (1.21) vale se e solo se il grafico di y è una CSC.

Dimostrazione. (i) Poniamo per semplicità $M := \mathcal{M}(y)$. Grazie alla disuguaglianza di Cauchy

$$|c + bd| = |(1, b) \cdot (c, d)| \leq (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}(c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Posto

$$b := |y'(x)|, \quad c := M^{-\frac{1}{2}}, \quad d := \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}},$$

otteniamo

$$M^{-\frac{1}{2}} + |y'(x)| \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + y'(x)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y(x)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.22)$$

da cui, integrando, segue

$$\begin{aligned} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx &\geq M^{-\frac{1}{2}} \int_0^{x_B} dx + \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &= \frac{x_B}{M^{\frac{1}{2}}} + \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Osserviamo che nella disuguaglianza di Cauchy l'uguaglianza vale se e solo se i vettori $(1, b)$ e (c, d) sono paralleli, cioè se e solo se vale

$$(1, b) \cdot (-d, c) = cb - d = 0.$$

Ciò significa che in (1.22) l'uguaglianza vale se e solo se è soddisfatta la seguente identità

$$M^{-\frac{1}{2}} |y'(x)| = \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.24)$$

Quindi l'uguaglianza in (1.23) vale se e solo se (1.24) è verificata per ogni $x \in [0, x_B]$. Ora andiamo a calcolare l'integrale che compare al secondo membro della (1.23). A questo scopo definiamo

$$\alpha := \sup\{x \in [0, x_B] : y|_{[0,x]} < M\}, \quad \beta := \inf\{x \in [0, x_B] : y|_{[x,x_B]} < M\}$$

e osserviamo che

$$y(\alpha) = y(\beta) = M. \quad (1.25)$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx &= \int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\
&+ \int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\
&\geq \int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx \\
&+ \int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} (-y'(x)) dx \\
&= \int_0^{y(\alpha)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta - \int_{y(\alpha)}^0 \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \\
&= 2 \int_0^{y(\alpha)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta
\end{aligned}$$

e cioè

$$\int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \geq 2 \int_0^M \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta. \quad (1.26)$$

Osserviamo che l'uguaglianza in (1.26) è valida se e solo se

$$y'_{|(0,\alpha)} \geq 0, \quad y'_{|(\alpha,x_B)} \leq 0. \quad (1.27)$$

Dimostriamo tale affermazione. Se $y'_{|(0,\alpha)} \geq 0$ e $y'_{|(\alpha,x_B)} \leq 0$ è ovvio che in (1.26) vale l'uguaglianza. Viceversa, se

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx &= \int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx \\
&- \int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
0 &= \underbrace{\int_0^\alpha \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} [|y'(x)| - y'(x)] dx}_{=: I_1} \\
&+ \underbrace{\int_\alpha^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} [|y'(x)| + y'(x)] dx}_{=: I_2}. \quad (1.28)
\end{aligned}$$

Osserviamo che gli integrandi di I_1 e I_2 sono non negativi. Questo implica in primis che $I_1, I_2 \geq 0$ e quindi, per (1.28), vale

$$I_1 = I_2 = 0.$$

Secondariamente e insieme a quest'ultimo fatto, abbiamo che gli integrandi di I_1 e I_2 devono in realtà essere nulli. Quindi

$$y'(x) = \begin{cases} |y'(x)| & \text{se } x \in [0, \alpha] \\ -|y'(x)| & \text{se } x \in [\alpha, x_B] \end{cases}$$

da cui segue subito (1.27).

Ora sostituendo

$$\eta := -\frac{1}{2}M(\cos \theta - 1)$$

nella (1.26) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{x_B} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx &\geq 2 \int_0^\pi \left(\frac{M + \frac{1}{2}M \cos \theta - \frac{1}{2}M}{-\frac{1}{2}M^2(\cos \theta - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} M \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{M(1 + \cos \theta)}{M^2(1 - \cos \theta)} \right)^{\frac{1}{2}} M(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= M^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= \pi M^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In conclusione troviamo che:

$$\begin{aligned} T(y) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(M^{-\frac{1}{2}} x_B + \pi M^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= u(M) \\ &= u(\mathcal{M}(y)). \end{aligned}$$

(ii) Se il grafico di y è una *CSC* allora per l'Osservazione 1.4.3 vale l'identità (1.21). Viceversa, dobbiamo dimostrare che se vale

$$T(y) = u(\mathcal{M}(y)) \tag{1.29}$$

allora il grafico di y è una *CSC*. Dalla discussione delle condizioni per l'uguaglianza effettuata nella dimostrazione di (i) e quindi da (1.24) e (1.27) otteniamo che l'uguaglianza (1.29) è soddisfatta se e solo se valgono le seguenti condizioni

$$y'(x) = \begin{cases} \left(\frac{M}{y(x)} - 1\right)^{\frac{1}{2}} & \text{se } x \in [0, \alpha] \\ -\left(\frac{M}{y(x)} - 1\right)^{\frac{1}{2}} & \text{se } x \in [\alpha, x_B]. \end{cases} \quad (1.30)$$

Supponiamo dunque che tali condizioni siano verificate. Innanzitutto dimostriamo che

$$x_B \geq M\pi. \quad (1.31)$$

Per farlo, osserviamo che per (1.24) vale

$$1 = M^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} |y'(x)|. \quad (1.32)$$

Se integriamo tale espressione otteniamo

$$\begin{aligned} x_B &= \int_0^{x_B} M^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{M - y(x)}{y(x)M}\right)^{-\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &= \int_0^{x_B} \left(\frac{M - y(x)}{y(x)}\right)^{-\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &= \int_0^{x_B} \left(\frac{y(x)}{M - y(x)}\right)^{\frac{1}{2}} |y'(x)| dx \\ &\geq \int_0^{\alpha} \left(\frac{y(x)}{M - y(x)}\right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx - \int_{\alpha}^{x_B} \left(\frac{y(x)}{M - y(x)}\right)^{\frac{1}{2}} y'(x) dx \\ &= 2 \int_0^M \left(\frac{\eta}{M - \eta}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta. \end{aligned}$$

A questo punto sostituendo $\eta = M \cos^2 \theta$ otteniamo

$$\begin{aligned} x_B &\geq \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{M \cos^2 \theta}{M - M \cos^2 \theta}\right)^{\frac{1}{2}} (-2M \cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 4M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= M\pi. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato (1.31).

Ora proviamo che il grafico di y è una CSC. Per $x \in [0, \alpha)$ vale

$$1 = \left(\frac{M}{y(x)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} y'(x)$$

e integrando per $\xi < \alpha$ otteniamo

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^\xi \left(\frac{M}{y(x)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} y'(x) dx \\ &= \int_0^{y(\xi)} \left(\frac{M}{\eta} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &= \int_0^{y(\xi)} \left(\frac{\eta}{M - \eta} \right)^{\frac{1}{2}} d\eta. \end{aligned}$$

Ora, tramite la sostituzione

$$\eta = \frac{M(1 - \cos \theta)}{2} \tag{1.33}$$

e ponendo

$$\Theta(\xi) := \arccos \left(1 - \frac{2y(\xi)}{M} \right), \tag{1.34}$$

troviamo, per ogni $\xi \in [0, \alpha]$

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^{\Theta(\xi)} \left(\frac{M(1 - \cos \theta)/2}{M - M(1 - \cos \theta)/2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{M}{2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{M}{2} \int_0^{\Theta(\xi)} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{M}{2} \int_0^{\Theta(\xi)} (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{M}{2} (\Theta(\xi) - \sin \Theta(\xi)). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Segue che $\forall x \in [0, \alpha]$

$$x = \frac{M}{2} (\Theta(x) - \sin \Theta(x)) \tag{1.36}$$

e dalla (1.34) ricaviamo

$$y(x) = \frac{M}{2} (1 - \cos \Theta(x)). \tag{1.37}$$

Osserviamo che x può assumere valori da 0 a α , $y(x)$ varia da 0 a M e Θ varia da 0 a π . Se indichiamo la parametrizzazione della prima semicicloide che compone la CSC_M con

$$\gamma(\Theta) = (\gamma_1(\Theta), \gamma_2(\Theta)) = \left(\frac{M}{2}(\Theta - \sin \Theta), \frac{M}{2}(1 - \cos \Theta) \right) \quad \Theta \in [0, \pi] \quad (1.38)$$

allora abbiamo

$$x = \gamma_1(\Theta(x)), \quad y(x) = \gamma_2(\Theta(x)).$$

Possiamo quindi concludere che il grafico della funzione

$$x \mapsto y(x) \quad x \in [0, \alpha]$$

è la prima semicicloide di raggio $M/2$. In maniera analoga si dimostra che il grafico della funzione

$$x \mapsto y(x) \quad x \in (\beta, x_B]$$

è la seconda semicicloide di raggio $M/2$. Rimane da verificare che

$$y(x) = M \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (1.39)$$

A questo scopo, ricordiamo che

$$y'_{[\alpha, \beta]} \leq 0$$

per (1.30), per cui la funzione $y_{[\alpha, \beta]}$ è non crescente. Ricordando anche (1.25), per ogni $x \in [\alpha, \beta]$ si ottiene

$$M = y(\alpha) \geq y(x) \geq y(\beta) = M$$

cioè

$$y_{[\alpha, \beta]} = M.$$

□

Teorema 1.1. *La cicloide è l'unico punto di minimo per il funzionale T , cioè:*

(i) per ogni $y \in S$

$$T(y) \geq u(M_0) = T(F_{M_0/2}). \quad (1.40)$$

(ii) L'uguaglianza vale se e solo se

$$y = F_{M_0/2}$$

cioè il grafico di y è la cicloide $C_{M_0/2}$.

Dimostrazione. (i) La disuguaglianza è semplice da verificare. Infatti per la Proposizione 1.1 sappiamo che $\forall y \in S$ vale

$$T(y) \geq u(\mathcal{M}(y))$$

e per il punto (i) dell'Osservazione 1.4.3

$$u(\mathcal{M}(y)) \geq u(M_0). \quad (1.41)$$

(ii) Se $y = F_{M_0/2}$ allora per il punto (ii) dell'Osservazione 1.4.3 vale

$$T(F_{M_0/2}) = u(M_0).$$

Viceversa, se in (1.40) vale l'uguaglianza, allora

$$T(y) = u(M_0) \leq u(\mathcal{M}(y)) \leq T(y) \quad (1.42)$$

per (i) di Osservazione 1.4.3 e (i) di 1.21. Quindi otteniamo

$$T(y) = u(\mathcal{M}(y)) = u(M_0). \quad (1.43)$$

Dalla prima uguaglianza di (1.43) e da (ii) di 1.21 segue che

$$y = F_{\mathcal{M}(y)/2}.$$

Dalla seconda uguaglianza di (1.43) e da (i) in Osservazione 1.4.3 segue d'altra parte che

$$\mathcal{M}(y) = M_0.$$

Possiamo quindi concludere che

$$y = F_{M_0/2}.$$

□

Capitolo 2

La risoluzione di Johann Bernoulli del problema della brachistocrona, una lezione presso il Liceo Galilei di Trento

In questa parte presentiamo la risoluzione del problema della brachistocrona dovuta a Johann Bernoulli, la quale risulta la più semplice e quindi riproponibile a degli studenti del triennio della Scuola Secondaria di secondo grado. Infatti, come abbiamo visto nel Capitolo 1, altre soluzioni coinvolgono le equazioni differenziali ed il calcolo variazionale, dunque non sono adatte a studenti di liceo. Mostriamo dunque la risoluzione di Bernoulli (cfr. [5], [3], [7]) riportando la relazione di una lezione per l'orientamento universitario tenuta dal professore Silvano Delladio presso il Liceo Scientifico Galileo Galilei di Trento.

Contesto:

- Pubblico: 12 ragazzi di classe 4^a e 5^a liceo scientifico, particolarmente bravi ed interessati alla matematica.
- Tempo a disposizione: un'ora e mezza.

Cominciamo con una breve introduzione sul significato di brachistocrona e su alcune note storiche. Affrontiamo poi il problema della brachistocrona per il “doppio strato”, una rivisitazione del problema del bagnino. In seguito trattiamo il problema discretizzato seguendo l'approccio di Bernoulli, giungendo finalmente alla condizione di brachistocrona. In chiusura si “effettuano” dei test volti a escludere alcune curve considerate a priori naturali candidate brachistocrona.

2.1 Il problema del doppio strato

Consideriamo il seguente problema:

Una mamma sta nuotando in mare e sente il suo bimbo, che si trova sulla spiaggia, che piange. Trovare il percorso che permetta alla mamma di raggiungere suo figlio nel minor tempo possibile.

Schematizziamo il problema alla lavagna come segue. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano tale che

- l'asse delle ascisse coincida con la linea di separazione tra mare e spiaggia;
- la mamma occupi il punto di coordinate $A(0, a)$ con $a > 0$;
- il bimbo occupi la posizione $B(b, -a)$, dunque bimbo e mamma sono equidistanti dalla riva;
- il punto in cui la mamma esce dal mare sia $S(x, 0)$ con $0 < x < b$.

Indichiamo con v_1 la velocità con cui la mamma nuota in acqua e con v_2 la velocità con cui lei corre sulla spiaggia: è naturale supporre che $v_1 < v_2$. A questo punto il problema è quello di trovare tra tutte le spezzate ASB quella che minimizza il tempo. Gli studenti intuiscono che, essendo $v_1 < v_2$, lo spazio percorso con la velocità v_1 , cioè il tratto \overline{AS} , dovrà essere minore dello spazio percorso con v_2 , cioè \overline{SB} . Si invitano gli studenti ad osservare anche il seguente fatto: tracciata la diagonale \overline{AB} , che corrisponde al percorso con punto di sbarco $C(b/2, 0)$, si possono individuare coppie di percorsi simmetrici ASB e $AS'B$, percorsi cioè i cui punti di sbarco S e S' sono simmetrici rispetto a C . Non è difficile capire che per ogni coppia di percorsi quello migliore è ASB .

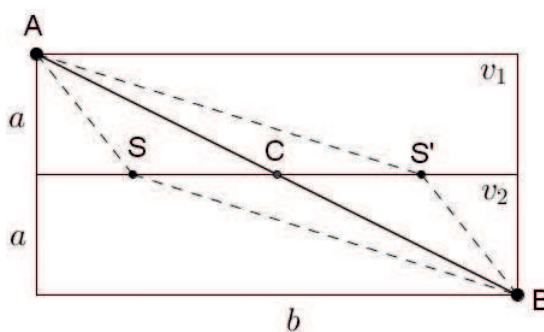


Figura 2.1: Percorsi simmetrici.

Indicata con x l'ascissa del punto di sbarco S si ha:

$$\overline{AS} = \sqrt{a^2 + x^2}, \overline{SB} = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}.$$

A questo punto è facile scrivere la funzione di x che dà il tempo impiegato per percorrere ASB :

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{v_2}.$$

Rappresentiamo il percorso nei casi $x = 0$ e $x = b$: intuitivamente si ha che $T(0) < T(b)$, poiché $v_1 < v_2$.

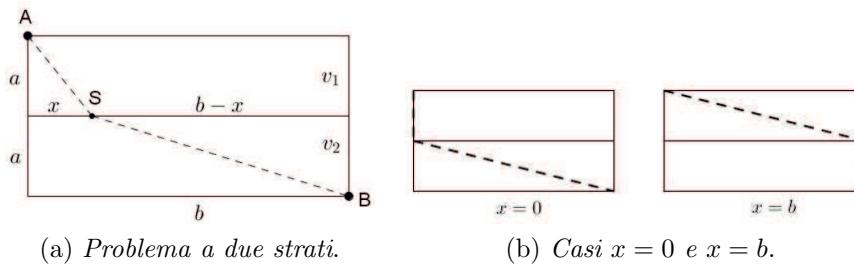


Figura 2.2

Ora per trovare il minimo della funzione $T(x)$, e quindi il percorso più conveniente, andiamo a studiare la pendenza del grafico della funzione T nel suo punto di ascissa x , al variare di x in $[0, b]$. Definiamo la funzione pendenza:

$$p : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p(x) := \text{pendenza del grafico di } T \text{ nel punto } (x, T(x)).$$

Come calcolare la pendenza di un grafico? Facciamo un esempio abbastanza semplice.

Esempio 2.1.

Consideriamo la funzione

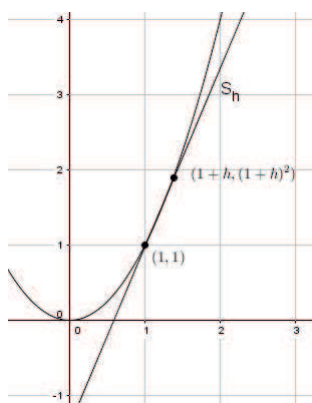
$$x \mapsto x^2$$

e disegniamo il suo grafico. Prendiamo due punti del grafico, $(1, 1)$ e $(1+h, (1+h)^2)$, e tracciamo la secante S_h al grafico passante per questi due punti. Calcoliamo la pendenza della secante S_h :

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2 + h.$$

Otteniamo la pendenza del grafico nel punto $(1, 1)$ facendo tendere $h \rightarrow 0$. Troviamo così che

$$p(1) = 2.$$

Figura 2.3: Grafico di $x \mapsto x^2$.

In generale la secante passante per i punti (x, x^2) e $(x+h, (x+h)^2)$ ha pendenza

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

e con lo stesso ragionamento di prima, mandando $h \rightarrow 0$, otteniamo che

$$p(x) = 2x.$$

Ora passiamo a calcolare la pendenza $p(x)$ del grafico di T nel suo punto di ascissa x . La pendenza della retta secante passante per i punti $(x, T(x))$ e $(x+h, T(x+h))$ è:

$$\begin{aligned} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} &= \left(\frac{\sqrt{a^2 + (x+h)^2}}{v_1} - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \right) \frac{1}{h} + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{a^2 + (b-x-h)^2}}{v_2} - \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{v_2} \right) \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Svolgiamo i calcoli per il primo addendo dell'espressione sopra, poi per risparmiare tempo lasciamo agli studenti il compito di svolgere i calcoli del secondo termine.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sqrt{a^2 + (x+h)^2}}{v_1} - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \right) \frac{1}{h} \\
&= \frac{1}{v_1 h} (\sqrt{a^2 + (x+h)^2} - \sqrt{a^2 + x^2}) \\
&= \frac{1}{v_1 h} \frac{a^2 + (x+h)^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 + (x+h)^2} + \sqrt{a^2 + x^2}} \\
&= \frac{1}{v_1 h} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{\sqrt{a^2 + (x+h)^2} + \sqrt{a^2 + x^2}} \\
&= \frac{1}{v_1} \frac{2x + h}{\sqrt{a^2 + (x+h)^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}
\end{aligned}$$

e facendo tendere $h \rightarrow 0$ otteniamo l'espressione

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Procedendo in maniera analoga per il secondo termine e sommando i due risultati otteniamo la seguente espressione della pendenza:

$$p(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{b-x}{v_2 \sqrt{a^2 + (b-x)^2}}. \quad (2.1)$$

Indichiamo con $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, rispettivamente, gli angoli formati dai segmenti AS e SB con la direzione verticale (vedi Figura 2.4).

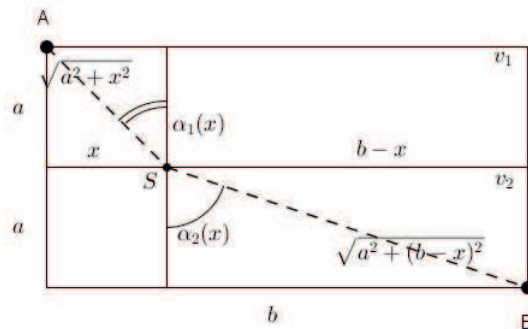


Figura 2.4: Problema a due strati.

Allora l'identità (2.1) diventa

$$p(x) = \frac{\sin \alpha_1(x)}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2(x)}{v_2}. \quad (2.2)$$

Osserviamo che α_1 è una funzione crescente con

$$\alpha_1(0) = 0, \quad \alpha_1(b) = \arctan \frac{b}{a}.$$

Analogamente α_2 è una funzione decrescente con

$$\alpha_2(0) = \arctan \frac{b}{a}, \quad \alpha_2(b) = 0.$$

Poiché la funzione \sin è monotona crescente in $[0, \pi/2]$, l'identità (2.2) esprime p come differenza fra una funzione crescente e una funzione decrescente (vedi Figura 2.5).

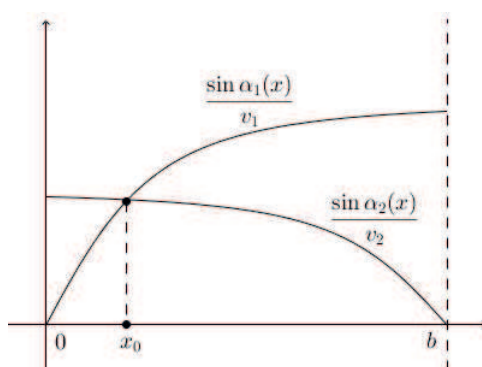


Figura 2.5: La pendenza è data dalla differenza tra le due funzioni.

Dunque p è crescente. Inoltre si ha

$$p(0) = -\frac{\sin \alpha_2(0)}{v_2} < 0, \quad p(b) = \frac{\sin \alpha_1(b)}{v_1} > 0.$$

Tali proprietà indicano chiaramente che il grafico di T è del tipo rappresentato in Figura 2.6.

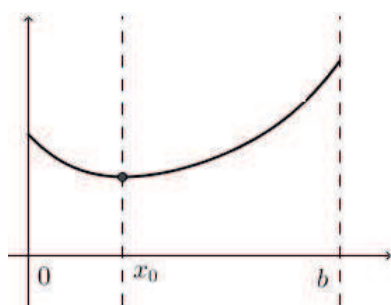
In particolare T è minima in x_0 e vale

$$p(x_0) = 0$$

cioè

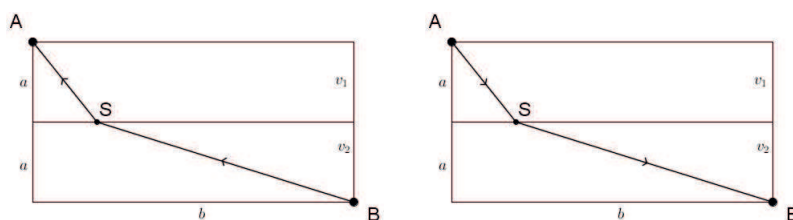
$$\frac{\sin \alpha_1(x_0)}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2(x_0)}{v_2} \quad (2.3)$$

riportata in seguito come **condizione di brachistocrona**.

Figura 2.6: Andamento del grafico di T .

Commenti

- Per interpretare praticamente il problema del “doppio strato” abbiamo preferito il contesto mamma-bambino a quello bagnino-bagnante. La ragione di tale preferenza è dovuta alla direzione del moto che nel caso del contesto mamma-bambino è discendente, contrariamente a quanto avviene nel contesto bagnino-bagnante. Tale carattere “discendente” risulterà coerente con la modellizzazione successiva del problema della brachistocrona.



- Per trovare il minimo di $T(x)$ basterebbe calcolare la derivata $T'(x)$ e studiarne il segno. Tuttavia, considerato il pubblico di studenti a cui è rivolta la lezione, preferiamo non parlare di derivata e di retta tangente al grafico, ma ci limitiamo a calcolare la pendenza del grafico di T .

2.2 Il problema generale

2.2.1 Bilancio energetico

Vogliamo calcolare la velocità della particella in un punto qualsiasi della curva lungo la quale sta scendendo. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse delle ordinate orientato verso il basso e denotiamo con $A(0,0)$ e $B(x_B, y_B)$ gli estremi della curva. Supponiamo che A si trovi alla quota H . Nelle ipotesi del problema, la particella è soggetta alla sola forza di gravità.

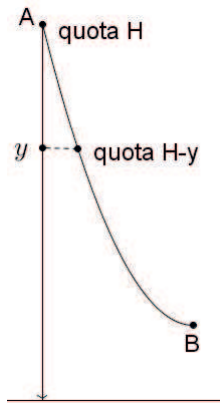


Figura 2.7: *Bilancio energetico.*

Possiamo dunque usare il principio di conservazione dell'energia, per cui vale:

$$mg(H - y) + \frac{1}{2}mv(y)^2 = mgH$$

dove $v(y)$ indica la velocità della particella quando questa ha posizione di ordinata y . Svolgendo i calcoli troviamo:

$$\frac{1}{2}mv(y)^2 - mgy = 0$$

cioè

$$v(y) = c\sqrt{y}, \quad c := \sqrt{2g}. \quad (2.4)$$

È interessante notare che la velocità dipende solo dalla quota a cui si trova la particella, e non dalla forma o dalla lunghezza della curva.

2.2.2 Discretizzazione del problema

Seguendo l'approccio di Bernoulli modellizziamo il problema della brachistocrona come segue. Sia N un intero positivo e supponiamo di dividere la regione di spazio

compresa tra l'ordinata $y_A = 0$ di A e l'ordinata y_B di B in N strati s_1, \dots, s_N di spessore uniforme

$$d_N = \frac{y_B}{N}.$$

Data una particella in caduta fra A e B , supponiamo che in ogni strato s_i la sua velocità si mantenga costantemente uguale a

$$v_i = c\sqrt{id_N}, \quad i = 1, \dots, N$$

A questo punto possiamo considerare il problema di tipo brachistocrona corrispondente a tale discretizzazione: fra tutti i percorsi poligonali, rettilinei negli strati s_i , compiuti da una particella in caduta da A a B tale che la sua velocità in s_i sia v_i , determinare quello di tempo minimo.

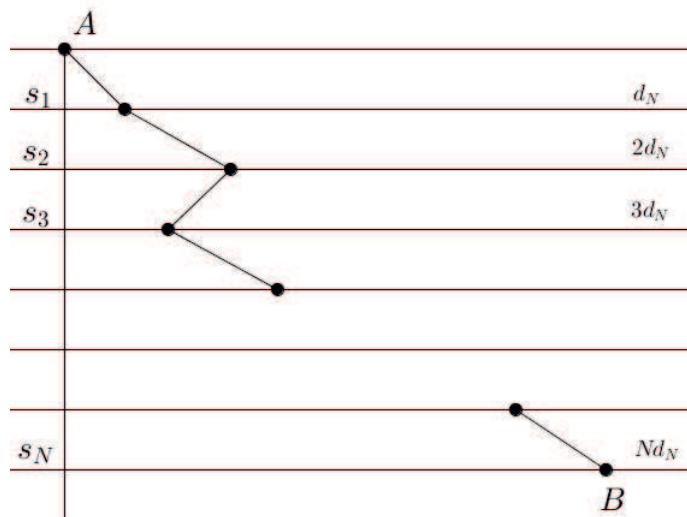


Figura 2.8: Percorso poligonale.

Bernoulli sottintendeva il seguente fatto: se indichiamo con Γ_N la brachistocrona del problema appena formulato, allora Γ_N converge (al tendere di N all'infinito) a una curva liscia che è soluzione del problema della brachistocrona originale. Prima di attuare questo processo di limite è opportuno ricavare ulteriori informazioni su Γ_N . A questo scopo, osserviamo che la restrizione della traiettoria Γ_N a una generica coppia di strati contigui s_i e s_{i+1} è soluzione del problema del doppio strato, e quindi deve valere

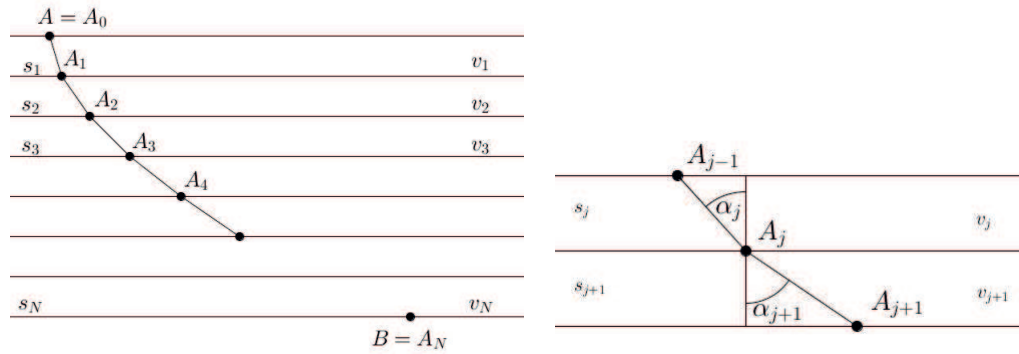
$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = \frac{\sin \alpha_{i+1}}{v_{i+1}}. \quad (2.5)$$

Ripetendo questo ragionamento per tutte le coppie di strati contigui otteniamo

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \dots = \frac{\sin \alpha_N}{v_N}$$

Esiste dunque un numero ρ_N , indipendente da i (ma dipendente da N), tale che

$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = \rho_N, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$



(a) Percorso minimo Γ_N .

(b) Restrizione di Γ_N a due strati contigui.

Figura 2.9

A questo punto facciamo tendere all'infinito il numero N degli strati e indichiamo con ρ il limite delle costanti ρ_N . Col passaggio al limite si ottiene la condizione a cui deve soddisfare la soluzione del problema originale, cioè:

$$\frac{\sin \alpha(y)}{v(y)} = \rho \quad (2.7)$$

dove $\alpha(y)$ è l'angolo formato dalla verticale con la tangente alla curva nel punto di ordinata y . Infine per quanto visto sul bilancio energetico sappiamo che la velocità è data da $v(y) = c\sqrt{y}$ e quindi possiamo riscrivere la condizione di brachistocrona come segue:

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = \text{costante}. \quad (2.8)$$

Commenti

- Nella trattazione del problema abbiamo supposto che una soluzione ci sia, cioè che esista un percorso di tempo minimo tra tutti i percorsi ammissibili. Per dimostrare che ciò effettivamente è vero, definiamo la funzione continua $\tau : [0, x_B]^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$\tau(x_1, \dots, x_{N-1}) := \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + d_N^2}}{v_i} \quad (x_0 := 0).$$

Osserviamo che il valore di τ in (x_1, \dots, x_{N-1}) è il tempo corrispondente al percorso poligonale con vertici

$$A_0 = (0, 0), A_1 = (x_1, d_N), \dots, A_N = (x_B, y_B).$$

Per il teorema di Weierstrass, esiste un minimo di τ in $[0, x_B]^{N-1}$.

- La condizione di brachistocrona (2.8) è coerente con la condizione (1.9) che abbiamo ricavato dall'equazione di Eulero. Per dimostrarlo consideriamo una curva che possa essere rappresentata come grafico di una funzione $f \in C^1([0, x_B])$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x_B) = y_B$. Indichiamo con $\alpha(y)$ l'angolo formato dalla verticale con la tangente alla curva nel suo punto di ordinata y . Allora

$$f'(x) = \frac{\cos \alpha(f(x))}{\sin \alpha(f(x))}$$

da cui si ricava (omettendo per semplicità la x)

$$\sin(\alpha \circ f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f')^2}}.$$

Sostituendo in (2.8) otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f')^2}} \frac{1}{\sqrt{f}} = \text{costante}$$

e dunque la condizione di brachistocrona (2.8) è equivalente a

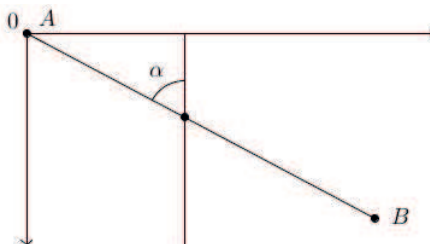
$$f[1 + (f')^2] = \text{costante}$$

che è l'equazione (1.9).

2.2.3 Test di esclusione

Per concludere la lezione “testiamo” due curve candidate, il segmento e la circonferenza, provando che esse non risolvono il problema. Infine riveliamo la soluzione.

2.2.3.1 Segmento



Poiché l'angolo $\alpha(y)$ è uguale a una costante α_0 lungo il segmento $[A; B]$ mentre y varia si ha

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{y}} \neq \text{costante}$$

e possiamo perciò affermare che il $[A; B]$ non è la brachistocrona.

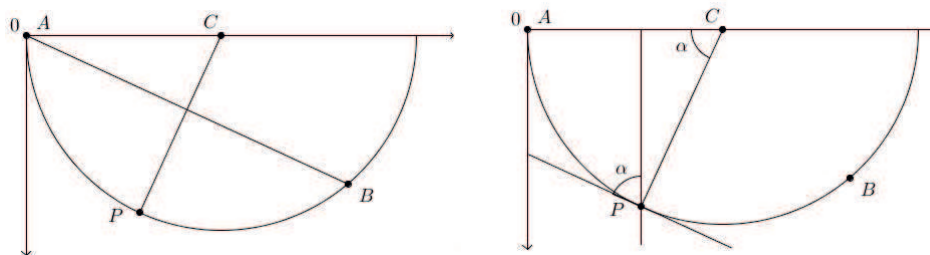
Osservazione 2.2.1. *La condizione di brachistocrona*

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = \text{costante}$$

implica che per $y \rightarrow 0$ si ha $\sin \alpha(y) \rightarrow 0$ e quindi anche $\alpha(y) \rightarrow 0$. Questo significa che la retta tangente alla brachistocrona nel punto A deve coincidere con l'asse y .

2.2.3.2 Circonferenza

L'osservazione appena fatta porta a considerare come candidata a titolo di brachistocrona la circonferenza passante per $A(0,0)$ e $B(x_B, y_B)$ tangente all'asse y in A . Costruiamo per prima cosa tale circonferenza. Indichiamo con C il centro della circonferenza. La condizione di tangenza in A osservata prima implica che C deve stare sull'asse x . Inoltre C deve appartenere all'asse di $[A; B]$, in quanto tale segmento è corda della circonferenza. Dunque il centro C risulta univocamente determinato.



Ora verifichiamo che tale circonferenza non è brachistocrona. Se P è il punto della circonferenza avente ordinata y , osserviamo che $\alpha(y)$ è uguale all'angolo \widehat{ACP} . Allora, indicando con R il raggio della circonferenza, troviamo che

$$\sin \alpha(y) = \frac{y}{R}$$

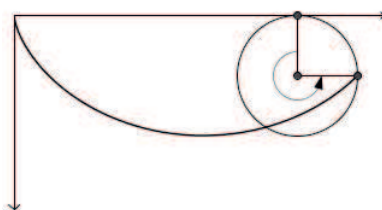
e quindi

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{R} \neq \text{costante}$$

cioè la circonferenza non è brachistocrona.

2.2.3.3 Cicloide

A questo punto vogliamo svelare agli studenti la soluzione al problema della brachistocrona. La brachistocrona è la curva generata da un punto di una circonferenza che ruota senza strisciare lungo una retta: questa curva è detta cicloide.



Commenti

Non abbiamo il tempo per trovare le equazioni parametriche della cicloide, e per verificare che essa soddisfa la condizione di brachistocrona. Ci limitiamo a disegnare la curva alla lavagna in modo che gli studenti possano visualizzarla e capire come è fatta.

In realtà, nota la parametrizzazione della cicloide

$$\gamma(\varphi) = (\gamma_1(\varphi), \gamma_2(\varphi)) = R(\varphi - \sin \varphi, 1 - \cos \varphi),$$

è molto semplice verificare che essa soddisfa la condizione (2.8). Infatti, grazie all'Osservazione (1.3.2), sappiamo che vale

$$\alpha(y) = \alpha(\gamma_2(\varphi)) = \frac{\varphi}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} &= \frac{\sin(\varphi/2)}{\sqrt{R\sqrt{1 - \cos \varphi}}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos \varphi}}{\sqrt{2R\sqrt{1 - \cos \varphi}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2R}} \\ &= \text{costante} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione $\cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2 \varphi$.

Capitolo 3

La proprietà tautocrona della curva cicloide

Prima che Bernoulli le conferisse il titolo di brachistocrona, Huygens aveva reso celebre la cicloide per la sua proprietà tautocrona:

La curva tale che un punto pesante che la percorre nel vuoto arriva alla sua posizione più bassa nel medesimo tempo qualunque sia il punto da cui si diparte è una cicloide ordinaria a base orizzontale concava verso l'alto.

Nella prima sezione di questo capitolo dunque dimostriamo che la cicloide è tautocrona (cfr. [13]), cioè che se posizioniamo due palline ad altezze diverse lungo un profilo cicloidale e le lasciamo cadere simultaneamente, esse si urtano nel punto più basso della curva. Mostriamo inoltre il ragionamento che portò Huygens a scoprire che la cicloide è una curva tautocrona (cfr. [16]). La seconda sezione è dedicata alla modellizzazione del pendolo cicloidale. Questo risulterà essere strettamente legato a un'altra importante proprietà della cicloide riguardante il concetto di evoluta, che verrà discusso nella terza sezione (cfr. [2], [6]).

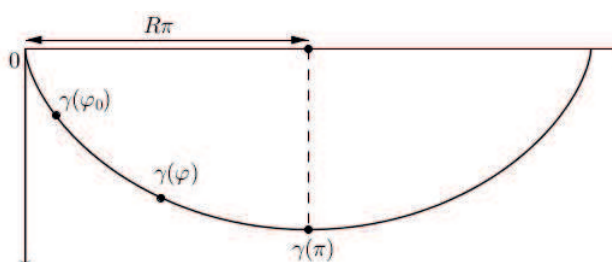
3.1 La cicloide è tautocrona

Vogliamo dimostrare in questa parte che la cicloide è tautocrona. Consideriamo ancora una volta un sistema di riferimento cartesiano con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso e la parametrizzazione della cicloide

$$\gamma(\varphi) = (\gamma_1(\varphi), \gamma_2(\varphi)) = (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Consideriamo il punto della cicloide corrispondente al parametro φ_0 , i.e. $\gamma(\varphi_0)$, con $\varphi_0 \in [0, \pi]$. Vogliamo calcolare il tempo impiegato da un grave per passare da

$\gamma(\varphi_0)$ a $\gamma(\pi)$ scendendo lungo la cicloide, e dimostrare che esso è indipendente dalla scelta del punto di partenza, i.e. da φ_0 . Indichiamo con $\tau(x)$ il tempo necessario per percorrere il tratto di cicloide dal punto $\gamma(\varphi_0)$ al generico punto di ascissa x . Inoltre, come in Sezione 1.1, sia $v(x)$ la velocità del grave quando questo occupa la posizione $x, y(x)$.



Proposizione 3.1. *Il tempo $\tau(R\pi)$ non dipende dalla scelta di φ_0 e più precisamente vale*

$$\tau(R\pi) = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

In particolare l'oscillazione del grave lungo la cicloide ha periodo costante.

Dimostrazione. Con lo stesso argomento che ci aveva condotto a ricavare (1.1), otteniamo

$$\tau'(x) = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x)}. \quad (3.1)$$

Dall'identità

$$y(\gamma_1(\varphi)) = \gamma_2(\varphi)$$

otteniamo

$$y'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi) = \gamma_2'(\varphi).$$

Allora, se $x \in [0, 2\pi R]$ e se $\varphi \in [0, 2\pi]$ è tale che $\gamma_1(\varphi) = x$, possiamo sostituire in (3.1) e trovare

$$\tau'(\gamma_1(\varphi)) = \frac{\sqrt{1 + y'(\gamma_1(\varphi))^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \quad (3.2)$$

da cui

$$\begin{aligned}
 (\tau \circ \gamma_1)'(\varphi) &= \tau'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi) \\
 &= \frac{\sqrt{1 + y'(\gamma_1(\varphi))^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \gamma_1'(\varphi) \\
 &= \frac{\sqrt{\gamma_1'(\varphi)^2 + [y'(\gamma_1(\varphi))\gamma_1'(\varphi)]^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \\
 &= \frac{\sqrt{\gamma_1'(\varphi)^2 + \gamma_2'(\varphi)^2}}{v(\gamma_1(\varphi))} \\
 &= \frac{\|\gamma'(\varphi)\|}{v(\gamma_1(\varphi))}. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Ricordando le formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

possiamo calcolare $\|\gamma'(\varphi)\|$:

$$\gamma'(\varphi) = (R - R \cos \varphi, R \sin \varphi),$$

dunque

$$\begin{aligned}
 \|\gamma'(\varphi)\| &= \sqrt{2R\sqrt{1 - \cos \varphi}} \\
 &= 2R \sin(\varphi/2).
 \end{aligned}$$

Dal bilancio energetico tra la quota di $\gamma(\varphi_0)$ e la quota di $\gamma(\varphi)$

$$\frac{1}{2}mv(\gamma_1(\varphi))^2 + mg(H - \gamma_2(\varphi)) = \frac{1}{2}m \underbrace{v(\gamma_1(\varphi_0))^2}_{=0} + mg(H - \gamma_2(\varphi_0))$$

ricaviamo la velocità

$$\begin{aligned}
 v(\gamma_1(\varphi)) &= \sqrt{2g\sqrt{\gamma_2(\varphi) - \gamma_2(\varphi_0)}} \\
 &= \sqrt{2g\sqrt{R(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}} \\
 &= \sqrt{2g\sqrt{2R(\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2)}} \\
 &= 2\sqrt{Rg\sqrt{\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2}}.
 \end{aligned}$$

Allora sostituendo in (3.3) otteniamo

$$(\tau \circ \gamma_1)'(\varphi) = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\sin \varphi/2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2}}. \quad (3.4)$$

A questo punto dimostriamo che $\tau(R\pi)$ non dipende da φ_0 . Osserviamo che

$$\tau(R\pi) = (\tau \circ \gamma_1)(\pi) - (\tau \circ \gamma_1)(\varphi_0) \quad (3.5)$$

e per il teorema fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned} \tau(R\pi) &= \int_{\varphi_0}^{\pi} (\tau \circ \gamma_1)'(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{\varphi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\sin \varphi/2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\frac{\sin \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}\right)^2}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{R}{g}} \left[-2 \arcsin \left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2} \right) \right]_{\varphi_0}^{\pi} \\ &= 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \arcsin 1 \\ &= \pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \end{aligned}$$

□

3.1.1 La scoperta di Huygens

Proponiamo ora il ragionamento che portò Huygens a scoprire la cicloide come curva tautocrona. L'obiettivo principale di Huygens era la realizzazione di un pendolo perfettamente isocrono. A questo scopo consideriamo un sistema di riferimento con l'asse delle ordinate rivolto verso il basso. Consideriamo ora una traiettoria tautocrona di un grave (soggetto alla sola forza peso) descritta da una mappa periodica $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^2 , funzione del tempo t , tale che

$$\gamma(0) = (0, 0), \quad \gamma'(0) = (0, 0).$$

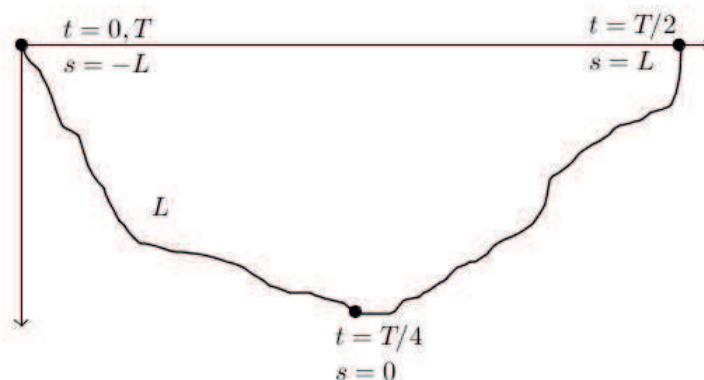


Figura 3.1

Tale γ è ciò che vogliamo determinare.

Indichiamo poi con T il periodo di γ , con L un quarto della lunghezza di $\gamma|_{[0,T]}$ e definiamo l'ascissa curvilinea

$$s(t) := \int_0^t \|\gamma'\| - L \quad (t \in [0, +\infty))$$

(vedi Figura 3.1). Allora se imponiamo che s soddisfi l'equazione del moto armonico

$$s'' + ks = 0 \quad (3.6)$$

avremo che il periodo di oscillazione non dipende dall'ampiezza. Infatti, ricordando che la soluzione generale di (3.6) è

$$\phi(t) = c_1 \sin(\sqrt{kt}) + c_2 \cos(\sqrt{kt}) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

e poiché deve essere $s(0) = -L$, otteniamo

$$s(t) = -L \cos(\sqrt{kt}), \quad (3.7)$$

e dunque il periodo di oscillazione è

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Osserviamo che è possibile scrivere le componenti di $\gamma'(t)$ come

$$\begin{cases} \gamma'_1(t) = \|\gamma'(t)\| \sin \frac{\theta(t)}{2} \\ \gamma'_2(t) = \|\gamma'(t)\| \cos \frac{\theta(t)}{2} \end{cases} \quad (3.8)$$

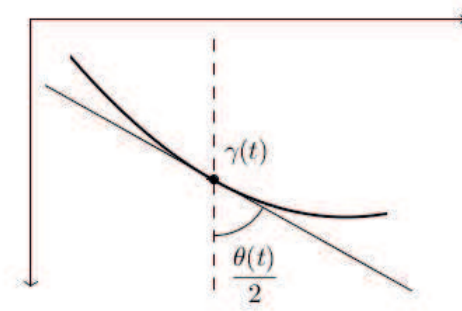


Figura 3.2

dove $\theta(t)$ indica il doppio dell'angolo formato dalla verticale con la tangente $\gamma'(t)$ nel punto $\gamma(t)$ (vedi Figura 3.2).

Ora, ricordando che il grave è soggetto alla sola forza peso e proiettando sulla tangente al moto all'istante t , otteniamo

$$s''(t) = g \cos \frac{\theta(t)}{2}$$

e quindi, tenendo conto di (3.6),

$$\cos \frac{\theta(t)}{2} = \frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}). \quad (3.9)$$

Osserviamo inoltre che

$$\|\gamma'(t)\| = s'(t) = L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}).$$

Dalla seconda uguaglianza di (3.8) troviamo allora

$$\begin{aligned} \gamma_2'(t) &= L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}) \frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \\ &= \frac{k\sqrt{k}L^2}{2g} \sin(2\sqrt{kt}) \end{aligned}$$

e integrando quest'ultima espressione ricaviamo

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(t) &= \int_0^t \frac{k\sqrt{k}L^2}{2g} \sin(2\sqrt{k}\rho) d\rho \\
 &= -\frac{L^2k}{4g} (\cos(2\sqrt{kt}) - 1) \\
 &= -\frac{L^2k}{2g} (\cos^2(\sqrt{kt}) - 1) \\
 &= -\frac{L^2k}{2g} \left(\frac{g^2}{k^2L^2} \cos^2 \frac{\theta(t)}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{L^2k}{2g} - \frac{g}{2k} \left(\frac{1 + \cos \theta(t)}{2} \right) \\
 &= \frac{L^2k}{2g} - \frac{g}{4k} - \frac{g}{4k} \cos \theta(t).
 \end{aligned}$$

Se poniamo

$$R := \frac{g}{4k}$$

otteniamo infine

$$\gamma_2(t) = \frac{L^2}{8R} - 2R + R[1 - \cos \theta(t)]. \quad (3.10)$$

Ora calcoliamo $\gamma_1(t)$. Dalla prima uguaglianza di (3.8) sappiamo che vale

$$\begin{aligned}
 \gamma_1'(t) &= L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}) \sin \frac{\theta(t)}{2} \\
 &= L\sqrt{k} \sin(\sqrt{kt}) \sqrt{1 - \left[\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \right]^2}
 \end{aligned}$$

e integrando possiamo trovare $\gamma_1(t)$.

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(t) &= \int_0^t L\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}\rho) \sqrt{1 - \left[\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{k}\rho) \right]^2} d\rho \\
 &= -\frac{g}{k} \int_{\frac{kL}{g}}^{\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt})} \sqrt{1 - x^2} dx
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il seguente cambio di variabile

$$x = \frac{kL}{g} \cos(\sqrt{k}\rho).$$

Ora ponendo

$$x = \sin y$$

troviamo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\int \cos^2 y dy \right]_{y=\arcsin x} \\ &= \left[\int \frac{\cos(2y) + 1}{2} dy \right]_{y=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2y)}{2} + y \right]_{y=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} [\sin y \cos y + y]_{y=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= -\frac{g}{2k} \left[\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \sqrt{1 - \frac{k^2 L^2}{g^2} \cos^2(\sqrt{kt})} + \arcsin \left(\frac{kL}{g} \cos(\sqrt{kt}) \right) \right] \\ &\quad + \frac{g}{2k} \left[\frac{kL}{g} \sqrt{1 - \frac{k^2 L^2}{g^2}} + \arcsin \left(\frac{kL}{g} \right) \right] \\ &= -\frac{g}{2k} \left[\cos \frac{\theta(t)}{2} \sin \frac{\theta(t)}{2} + \arcsin \left(\cos \frac{\theta(t)}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{g}{2k} \left[\cos \frac{\theta(0)}{2} \sin \frac{\theta(0)}{2} + \arcsin \left(\cos \frac{\theta(0)}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{g}{2k} \left[\frac{\sin \theta(t)}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta(t)}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta(0) - \frac{\pi}{2} + \frac{\theta(0)}{2} \right] \\ &= R(\theta(t) - \sin \theta(t)) + R \sin \theta(0) - R\theta(0). \end{aligned}$$

In conclusione abbiamo

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = R(\theta(t) - \sin \theta(t)) + R \sin \theta(0) - R\theta(0) \\ \gamma_2(t) = R(1 - \cos \theta(t)) + \frac{L^2}{8R} - 2R \end{cases}$$

che rappresenta una cicloide.

3.2 Il pendolo cicloidale

Il primo a occuparsi di orologi a pendolo fu Galileo, che aveva studiato le piccole oscillazioni in un pendolo semplice (cioè circolare) concludendo che queste hanno approssimativamente periodo costante. In realtà il pendolo con periodo “davvero” costante, cioè perfettamente tautocrono, è il pendolo cicloidale. Fu Huygens, dopo aver scoperto la proprietà tautocrona della cicloide, a concepire per primo un pendolo cicloidale, cioè un pendolo in cui il peso attaccato al filo si muove su una traiettoria cicloidale. L’invenzione di Huygens tuttavia non ebbe successo a causa degli errori dovuti a problemi di attrito e si decise di continuare ad usare il pendolo circolare scegliendo oscillazioni sufficientemente piccole.

Procediamo con la costruzione del pendolo cicloidale. Abbiamo dimostrato nella sezione precedente che la cicloide è tautocrona, quindi se immaginiamo di far oscillare il pendolo in modo che il peso descriva un arco di cicloide, le oscillazioni saranno isocrone. A questo scopo è necessario porre dei vincoli sul filo del pendolo, per evitare che esso oscilli liberamente appeso a un punto e che il peso si muova così lungo una traiettoria circolare. Vincoliamo il filo del pendolo a muoversi tra due profili ad arco di cicloide: vogliamo dimostrare che in questo modo la traiettoria percorsa dal peso è una cicloide.

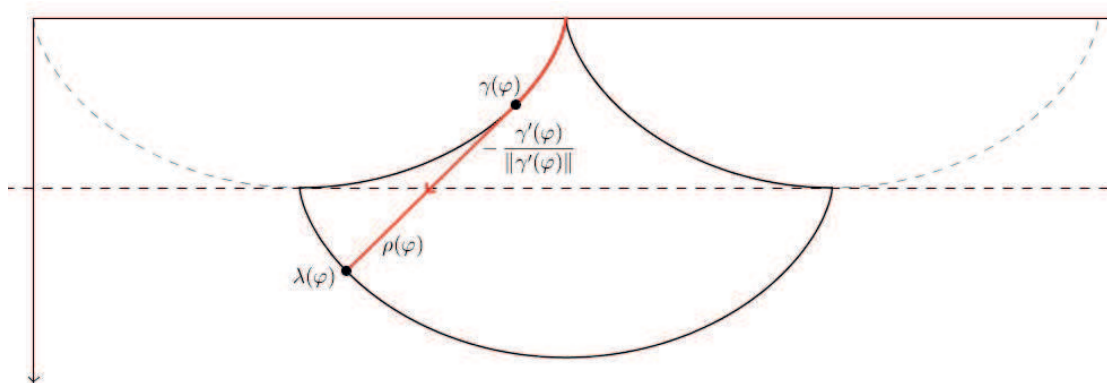


Figura 3.3: *Pendolo cicloidale*

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano con l’asse delle ordinate rivolta verso il basso, e sia γ la cicloide parametrizzata da

$$\varphi \mapsto (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi).$$

Imponiamo che il filo del pendolo abbia lunghezza pari a metà della lunghezza di un arco di cicloide, cioè $4R$. Sia $\gamma(\varphi)$ il punto della cicloide nel quale il filo si

stacca dal profilo cicloidale.

Sappiamo che

$$\begin{aligned}\gamma'(\varphi) &= (R - R \cos \varphi, R \sin \varphi) \\ \|\gamma'(\varphi)\| &= R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \varphi}\end{aligned}$$

e quindi la direzione tangente è

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'(\varphi)}{\|\gamma'(\varphi)\|} &= \frac{(1 - \cos \varphi, \sqrt{1 - \cos^2 \varphi})}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \varphi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1 - \cos \varphi}, \sqrt{1 + \cos \varphi}) \\ &= \left(\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le relazioni

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.11)$$

Ora calcoliamo la lunghezza della parte di filo che non aderisce al profilo cicloidale, che è pari alla lunghezza dell'arco di cicloide compreso tra $\gamma(\pi)$ e $\gamma(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \int_{\pi}^{\varphi} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= R\sqrt{2} \int_{\pi}^{\varphi} \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= R\sqrt{2} \int_{\pi}^{\varphi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -4R \cos \frac{\varphi}{2}.\end{aligned} \quad (3.12)$$

A questo punto possiamo scrivere la traiettoria della massa appesa all'estremo libero del filo come

$$\lambda(\varphi) := \gamma(\varphi) - \frac{\gamma'(\varphi)}{\|\gamma'(\varphi)\|} \rho(\varphi). \quad (3.13)$$

Svolgiamo i calcoli

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi) &= (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) + 4R \cos \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \left(R\varphi - R \sin \varphi + 4R \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, R - R \cos \varphi + 4R \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= (R\varphi - R \sin \varphi + 2R \sin \varphi, R - R \cos \varphi + 2R(\cos \varphi + 1)) \\ &= (R\varphi + R \sin \varphi, 3R + R \cos \varphi)\end{aligned} \quad (3.14)$$

da cui, sommando e sottraendo $\gamma(\pi)$, otteniamo

$$\lambda(\varphi) = (R\pi, 2R) + (R(\varphi - \pi) + R \sin \varphi, R + R \cos \varphi). \quad (3.15)$$

Se definiamo

$$\alpha := \varphi - \pi, \quad \alpha \in [0, \pi],$$

possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) &= (R\pi, 2R) + (R\alpha + R \sin(\pi + \alpha), R + R \cos(\pi + \alpha)) \\ &= (R\pi, 2R) + (R\alpha - R \sin \alpha, R - R \cos \alpha) \\ &= \gamma(\pi) + \gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto che λ parametrizza la cicloide di partenza traslata di $R\pi$ lungo l'asse delle ascisse e di $2R$ lungo l'asse delle ordinate.

3.3 L'evoluta di una curva

La costruzione del pendolo cicloidale sfrutta una particolare proprietà geometrica: l'evoluta di una semicicloide è una semicicloide. Ricordiamo alcuni concetti.

Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} e

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

una curva piana regolare di classe C^3 . Indichiamo con T , N e k , rispettivamente, la direzione tangente, la direzione normale e la curvatura indotte da α . Valgono allora le seguenti identità (cfr. [6])

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{1}{\|\alpha'\|}(\alpha'_1, \alpha'_2) \\ N &= \frac{1}{\|\alpha'\|}(-\alpha'_2, \alpha'_1) \\ k &= \frac{\det(\alpha'|\alpha'')}{\|\alpha'\|^3} = \frac{N \cdot \alpha''}{\|\alpha'\|^2}. \end{aligned}$$

Inoltre si può facilmente verificare che

$$T' = k\|\alpha'\|N, \quad N' = -k\alpha'. \quad (3.16)$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 3.1. Sia α una curva piana regolare di classe C^3 , con curvatura non costante e mai nulla. Si definisce evoluta di α il luogo dei centri delle circonferenze osculatrici, cioè la curva data da:

$$\beta := \alpha + \frac{1}{k}N. \quad (3.17)$$

Osservazione 3.3.1. L'evoluta di una curva α regolare di classe C^i , con $i \geq 3$, è una curva piana di classe C^{i-2} , regolare tranne che per i valori del parametro t che sono stazionari per la curvatura k di α ; infatti dalla seconda identità in (3.16) segue che

$$\beta'(t) = -\frac{k'(t)}{k(t)^2}N(t). \quad (3.18)$$

Osservazione 3.3.2. Le evolute di curve piane regolari (di classe C^3 con curvatura non costante e mai nulla) equivalenti sono curve equivalenti.

Per provare tale affermazione, è sufficiente verificare che se

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

è una curva piana regolare (di classe C^3 con curvatura non costante e mai nulla) e se γ è la curva a velocità unitaria equivalente ad α , allora le evolute di α e di γ sono equivalenti. Infatti, posto

$$\varphi(\theta) := \int_a^\theta \|\alpha'\|, \quad \theta \in [a, b]$$

allora si ha che φ è un diffeomorfismo di classe C^3

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow [0, L]$$

con

$$L := \int_a^b \|\alpha'\| = \varphi(b).$$

Osserviamo che vale l'identità

$$\gamma \circ \varphi = \alpha.$$

Indichiamo con N_α, k_α e N_γ, k_γ la normale e la curvatura indotte rispettivamente da α e da γ . Indichiamo inoltre con β_α e β_γ , rispettivamente, le evolute di α e γ . Allora, $\forall \theta \in [a, b]$, abbiamo che

$$N_\gamma(\varphi(\theta)) = N_\alpha(\theta), \quad k_\gamma(\varphi(\theta)) = k_\alpha(\theta).$$

Segue quindi che

$$\begin{aligned}\beta_\alpha(\theta) &= \alpha(\theta) + \frac{1}{k_\alpha(\theta)} N_\alpha(\theta) \\ &= \gamma(\varphi(\theta)) + \frac{1}{k_\gamma(\varphi(\theta))} N_\gamma(\varphi(\theta)) \\ &= (\beta_\gamma \circ \varphi)(\theta)\end{aligned}$$

per ogni $\theta \in [a, b]$, cioè le evolva di α e γ sono equivalenti.

Come vedremo fra poco, l'evolva di una curva gode dell'interessante proprietà di essere anche descrivibile come "inviluppo delle rette normali" a tale curva. Per approfondire tale affermazione ricordiamo alcuni fatti (cfr. [2]).

Siano Ω e I , rispettivamente, un aperto di \mathbb{R}^2 e un intervallo aperto di \mathbb{R} . Consideriamo poi una funzione $F \in C^1(\Omega \times I)$ e, per $t \in I$, indichiamo con F_t la t -sezione di F , i.e.

$$F_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto F(x, y, t).$$

Osserviamo che $F_t \in C^1(\Omega)$ per ogni $t \in I$. Supponiamo che, per ogni $t \in I$, ogni punto di $F_t^{-1}(0)$ sia regolare, cioè che

$$\nabla F_t(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{t.c.} \quad F_t(x, y) = 0. \quad (3.19)$$

Allora, per il teorema delle funzioni implicite, l'insieme

$$C_t := F_t^{-1}(0)$$

è una curva di classe C^1 in Ω (per ogni $t \in I$).

Osserviamo che, per ogni $(x, y, t) \in \Omega \times I$, le prime due componenti di $\nabla F(x, y, t)$ coincidono con $\nabla F_t(x, y)$. Quindi, per (3.19), ogni punto di $F^{-1}(0)$ è regolare e di conseguenza (di nuovo per il teorema delle funzioni implicite) l'insieme

$$\Sigma := F^{-1}(0)$$

è una superficie di classe C^1 in $\Omega \times I$.

Ricordiamo che $(\nabla F)|_\Sigma$ è un campo ortogonale a Σ , per cui se $(x_0, y_0, t_0) \in \Sigma$ allora

$$[(x, y, t) - (x_0, y_0, t_0)] \cdot \nabla F(x_0, y_0, t_0) = 0$$

è l'equazione del piano tangente $T_{(x_0, y_0, t_0)}\Sigma$.

Consideriamo ora un punto $(x_0, y_0, t_0) \in \Sigma$ tale che

$$D_3F(x_0, y_0, t_0) = 0$$

cioè

$$T_{(x_0, y_0, t_0)}\Sigma \text{ è verticale.} \quad (3.20)$$

Ora, è intuitivamente evidente che da (3.20) segue la seguente proprietà:

Per t vicini a t_0 , le curve C_t (NB: C_t coincide con la proiezione in \mathbb{R}_{xy}^2 di $\Sigma \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$) si concentrano in (x_0, y_0) .

Questa proprietà spiega intuitivamente la ragione per cui se si tracciano le curve C_t (per esempio con una matita colorata), la traccia risulta più “marcata” nei punti (x_0, y_0) per i quali esiste t_0 tale che $D_3F(x_0, y_0, t_0) = 0$. Queste considerazioni intuitive sono la base per la seguente definizione.

Definizione 3.2. Si definisce “inviluppo della famiglia $\{C_t\}_{t \in I}$ ” l’insieme

$$\mathcal{I}_F := \{(x, y) \in \Omega \mid \exists t \in I \text{ t.c. } F(x, y, t) = 0, D_3F(x, y, t) = 0\}. \quad (3.21)$$

In vista della prossima proposizione, consideriamo una curva piana regolare

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

di classe C^3 (con I intervallo aperto di \mathbb{R}) con curvatura non costante e mai nulla, e osserviamo che la retta normale ad α nel punto generico $\alpha(t)$ è data da

$$[(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) = 0. \quad (3.22)$$

Quindi, se definiamo la seguente funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2 \times I)$,

$$F(x, y, t) := [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) \quad (3.23)$$

allora $C_t = F_t^{-1}(0)$ è la normale ad α in $\alpha(t)$ di equazione (3.22).

Vale il seguente risultato.

Proposizione 3.2. Sia F la funzione definita in (3.23). Allora l’inviluppo delle rette normali $\{F_t^{-1}(0)\}_{t \in I}$ coincide con l’evolva di α .

Dimostrazione. Per (3.23) e per la prima identità di (3.16) abbiamo

$$\begin{aligned} D_3F(x, y, t) &= -\alpha'(t) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} + [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T'(t) \\ &= -\|\alpha'(t)\| + k(t)\|\alpha'(t)\|(x, y) - \alpha(t)] \cdot N(t) \end{aligned}$$

per ogni $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$. Allora l'involuppo \mathcal{I}_F delle rette normali ad α è l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali esiste $t \in I$ tale che

$$\begin{cases} [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) = 0 \\ k(t)[(x, y) - \alpha(t)] \cdot N(t) - 1 = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Verifichiamo innanzitutto che \mathcal{I}_F risulta una curva in \mathbb{R}^2 . A tale scopo consideriamo la funzione $G = (G_1, G_2) \in C^2(\mathbb{R}^2 \times I, \mathbb{R}^2)$ con

$$\begin{aligned} G_1(x, y, t) &:= F(x, y, t) = [(x, y) - \alpha(t)] \cdot T(t) \\ G_2(x, y, t) &:= D_3F(x, y, t) = k(t)[(x, y) - \alpha(t)] \cdot N(t) - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che la matrice

$$DG(x, y, t) = \begin{pmatrix} T_1(t) & T_2(t) & D_3F(x, y, t) \\ k(t)N_1(t) & k(t)N_2(t) & D_{33}F(x, y, t) \end{pmatrix}$$

ha rango 2, poiché

$$\det \begin{pmatrix} T_1(t) & T_2(t) \\ k(t)N_1(t) & k(t)N_2(t) \end{pmatrix} = k(t) \det \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

in quanto $T(t)$ e $N(t)$ sono ortogonali e quindi linearmente indipendenti. Dunque, per il teorema delle funzioni implicite, l'equazione

$$G(x, y, t) = 0$$

definisce una curva regolare Λ di classe C^2 in $\mathbb{R}^2 \times I$. Osserviamo che \mathcal{I}_F coincide con la proiezione di Λ nel piano \mathbb{R}_{xy}^2 . Se indichiamo con $\Lambda^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) le componenti connesse di Λ , allora possiamo considerare una parametrizzazione regolare di $\Lambda^{(i)}$

$$\lambda^{(i)}(\rho) := (\lambda_1^{(i)}(\rho), \lambda_2^{(i)}(\rho), \lambda_3^{(i)}(\rho)), \quad \rho \in I_i$$

dove I_i è un intervallo chiuso di \mathbb{R} , e porre anche

$$\lambda_*^{(i)}(\rho) := (\lambda_1^{(i)}(\rho), \lambda_2^{(i)}(\rho)). \quad (3.25)$$

Allora l'identità

$$G(\lambda^{(i)}(\rho)) = 0, \quad \rho \in I_i$$

equivale a

$$\begin{cases} [\lambda_*^{(i)}(\rho) - \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho))] \cdot T(\lambda_3^{(i)}(\rho)) = 0 \\ k(\lambda_3^{(i)}(\rho))[\lambda_*^{(i)}(\rho) - \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho))] \cdot N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) - 1 = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

$\forall \rho \in I_i$. Ricordando che $T(\lambda_3^{(i)}(\rho))$ e $N(\lambda_3^{(i)}(\rho))$ sono ortogonali, segue dalla prima identità di (3.26) che esiste $c(\rho)$ tale che

$$\lambda_*^{(i)}(\rho) - \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho)) = c(\rho)N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) \quad (3.27)$$

per ogni $\rho \in I$. Sostituendo quest'ultima nella seconda uguaglianza del sistema (3.26) otteniamo

$$-1 + k(\lambda_3^{(i)}(\rho))[c(\rho)N(\lambda_3^{(i)}(\rho))] \cdot N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) = 0 \quad (\rho \in I_i)$$

da cui ricaviamo

$$c(\rho) = \frac{1}{k(\lambda_3^{(i)}(\rho))} \quad (\rho \in I_i)$$

e quindi, sostituendo in (3.27),

$$\lambda_*^{(i)}(\rho) = \alpha(\lambda_3^{(i)}(\rho)) + \frac{1}{k(\lambda_3^{(i)}(\rho))}N(\lambda_3^{(i)}(\rho)) \quad (\rho \in I_i). \quad (3.28)$$

Tale identità prova che

- $\lambda_3^{(i)'} \neq 0$ per ogni $\rho \in I_i$. Infatti, se esistesse $\rho \in I_i$ tale che $\lambda_3^{(i)'}(\rho) = 0$, allora derivando la (3.28) otterremmo anche $\lambda_*^{(i)'}(\rho) = 0$. Quindi sarebbe $\lambda^{(i)'}(\rho) = 0$ che è impossibile per la regolarità di $\lambda^{(i)}$.
- La proiezione di Λ_i in \mathbb{R}_{xy}^2 (essendo parametrizzata da $\lambda_*^{(i)}$) è una curva in \mathbb{R}_{xy}^2 parametrizzata da

$$t \mapsto \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t), \quad t \in \lambda_3^{(i)}(I_i).$$

La conclusione segue dal fatto che \mathcal{I}_F è l'unione delle proiezioni in \mathbb{R}_{xy}^2 delle Λ_i . \square

3.3.1 L'evoluta della cicloide

A questo punto data la cicloide parametrizzata da

$$\alpha(t) = (Rt - R \sin t, R - R \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

vogliamo trovare la sua evoluta

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

A questo scopo calcoliamo la direzione normale $N(t)$ e la curvatura $k(t)$:

$$N(t) = \frac{1}{R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}(-R\sin t, R - R\cos t)$$

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t)|\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{-1}{2R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}.$$

Segue che l'evolva della cicloide è data da

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (Rt - R\sin t, R - R\cos t) - 2(-R\sin t, R - R\cos t) \\ &= (Rt + R\sin t, R\cos t - R) \\ &= \alpha(t + \pi) - \alpha(\pi).\end{aligned}$$

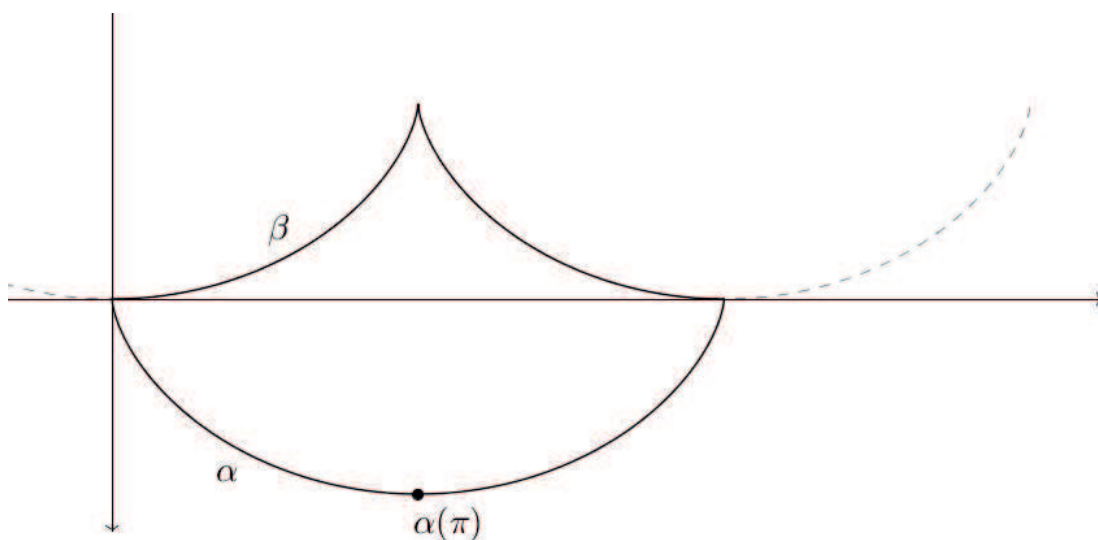


Figura 3.4: *Cuspide cicloidale come involuppo delle normali alla cicloide α .*

Abbiamo così provato che (vedi Fig.3.4):

- $\beta|_{[0,\pi]}$ parametrizza la semicicloide ottenuta trasladando di $-\alpha(\pi)$ la semicicloide $\alpha|_{[\pi, 2\pi]}$;
- $\beta|_{[\pi,2\pi]}$ parametrizza la semicicloide ottenuta trasladando di $-\alpha(\pi)$ la semicicloide $\alpha|_{[2\pi, 3\pi]}$.

Queste conclusioni, unitamente a Proposizione 3.2, prova che l'involuppo delle normali ad una cicloide è la "cuspide cicloidale" considerata nella costruzione del pendolo cicloidale in Sezione 3.2. Un pendolo cicloidale in movimento fornisce pertanto una visualizzazione dinamica della cicloide come curva che si ottiene dall'involuppo delle normali ad una cicloide.

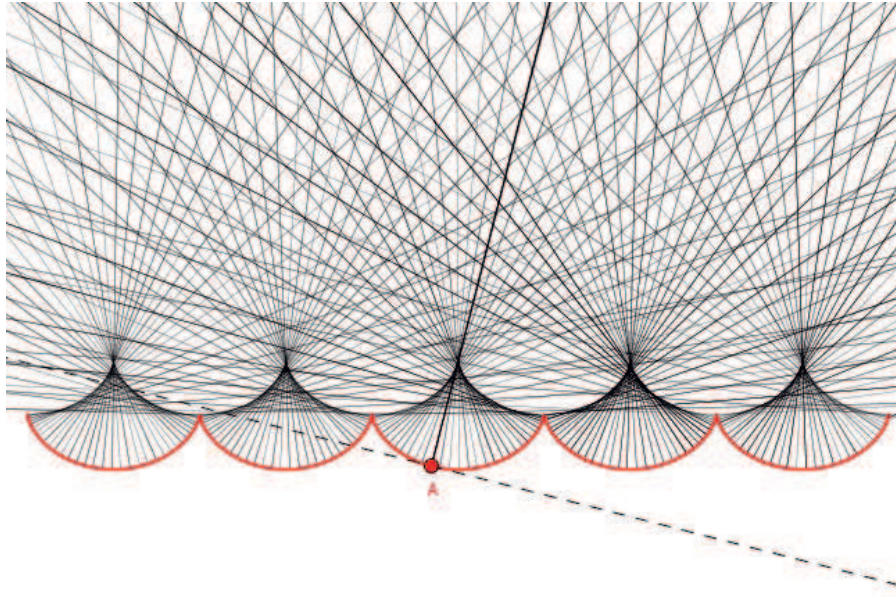


Figura 3.5: *Evoluta della cicloide come inviluppo delle rette normali ad una cicloide.*

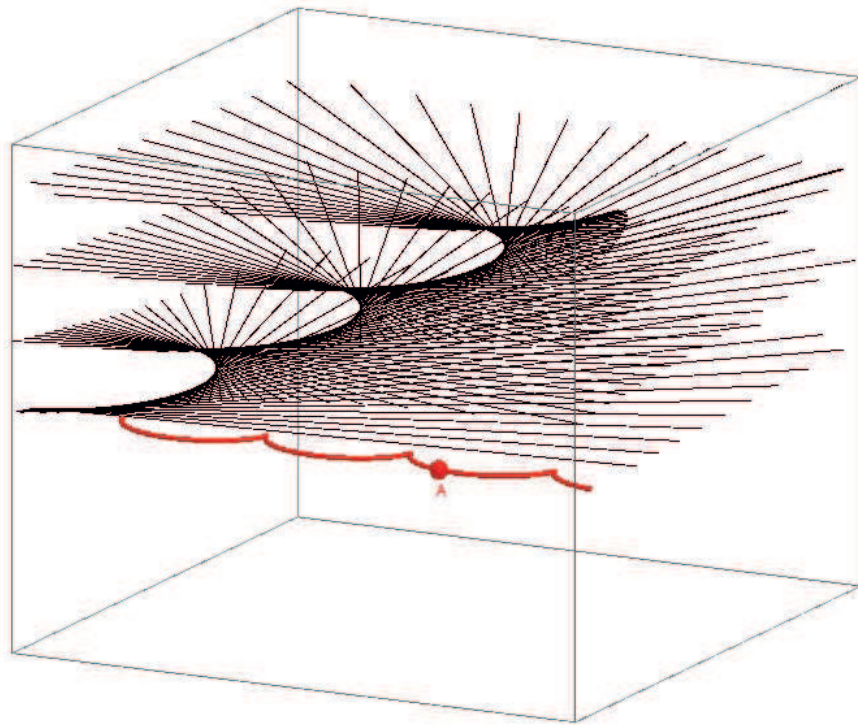


Figura 3.6: *Evoluta della cicloide come inviluppo delle rette normali ad una cicloide.*

Capitolo 4

Didattica laboratoriale sulla curva cicloide

Il mio tirocinio presso il Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica dell'Università di Trento era finalizzato a produrre materiale cartaceo, software e exhibit per l'implementazione di un laboratorio e di percorsi didattici relativi alla curva cicloide, in particolare alle sue proprietà di brachistocrona e di tautocrona, rivolti a studenti del triennio della Scuola Secondaria di secondo grado.

La cicloide è una curva che, così come ha appassionato importanti matematici, può esercitare una particolare suggestione sugli studenti per le sue innumerevoli proprietà. Il primo obiettivo di questo percorso è quindi quello di far conoscere agli studenti una delle più belle e importanti curve matematiche che solitamente non viene trattata in classe. In secondo luogo questo percorso è stato pensato e realizzato per promuovere la didattica laboratoriale con lo scopo di rendere gli studenti i principali attori delle attività proposte. Infine, attraverso le attività di laboratorio, possono essere introdotti argomenti e sviluppate competenze, che non riguardano esclusivamente il problema della brachistocrona, ma rientrano nel curriculum di uno studente di liceo scientifico: modellizzazione matematica di un problema, problem solving, problemi di minimo, retta tangente a un grafico, pendenza di un grafico e derivata, discretizzazione di un problema e passaggio al limite, equazioni differenziali. Ci soffermeremo ad analizzare meglio alcuni di questi argomenti nel Capitolo 5.

Vogliamo cominciare questa parte rilevando, nella prima sezione, che l'importanza della presenza del *Laboratorio di Matematica* nei percorsi scolastici viene sottolineata anche nelle Indicazioni Nazionali per gli obiettivi specifici di apprendimento per i licei e nella loro declinazione nelle Linee Guida per l'elaborazione dei piani di studio delle istituzioni scolastiche (prima stesura - 2013) della Provincia autonoma

di Trento per il Liceo scientifico (cfr. [9], [11], [14], [15]). Nelle sezioni successive riportiamo poi le attività svolte nel corso del tirocinio.

4.1 L'importanza del Laboratorio

Nel *Profilo educativo, culturale e professionale dello studente liceale* (cfr. [9]), tra gli aspetti del lavoro scolastico da valorizzare troviamo:

- La pratica dei metodi di indagine propri dei diversi ambiti disciplinari;
- L'uso costante del laboratorio per l'insegnamento delle discipline scientifiche;
- L'uso degli strumenti multimediali a supporto dello studio e della ricerca.

Nelle Linee Guida per il primo biennio (cfr. [11]) possiamo leggere un riferimento specifico su come deve essere concepito il *Laboratorio di Matematica*:

Lo studente [...] sperimenta l'idea di laboratorialità, da intendere non solo come luogo fisico strutturato ma, in senso più generale, come momento in cui egli è attivo, si pone domande, formula ipotesi, ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a utilizzare strumenti di misura, a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, condivide significati, perviene a conclusioni ancorché temporanee.

Nel *Laboratorio di Matematica* dunque gli studenti sono protagonisti attivi. Essi non si limitano a seguire la lezione del docente e a risolvere meccanicamente gli esercizi, ma sono messi di fronte a un problema e sono chiamati a fare ipotesi, utilizzare strumenti, sperimentare e verificare la validità delle ipotesi fatte, confrontarsi e imparare a sostenere un'argomentazione: in questo senso il laboratorio rappresenta un'occasione per sviluppare nei ragazzi l'abilità di problem solving. I momenti di laboratorio possono risultare particolarmente stimolanti e possono quindi diventare importanti strumenti per migliorare l'apprendimento, consolidare le conoscenze, approcciarsi al metodo scientifico e per promuovere il confronto e la collaborazione tra i ragazzi. In quest'ottica il laboratorio di matematica non è solo un luogo con oggetti e strumenti particolari, ma è un modo di pensare e di operare.

Nelle Indicazioni Nazionali (cfr. [9]) e nelle Linee Guida provinciali (cfr. [11]) per il liceo scientifico ci sono poi numerosi riferimenti all'utilizzo degli strumenti informatici che possono diventare strumenti da laboratorio molto efficienti se utilizzati in maniera opportuna.

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati in altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale. (Cfr. [9])

In particolare nelle *Indicazioni metodologiche per il primo e il secondo biennio* si fa riferimento alla necessità di utilizzare calcolatrici e computer per affrontare temi specifici, sottolineando l'importanza di guidare lo studente a un uso corretto e critico degli strumenti informatici. È importante che egli comprenda la valenza metodologica dell'informatica nella formalizzazione e modellizzazione dei processi complessi e nell'individuazione di procedimenti risolutivi, che sia consapevole della necessità del controllo dei dati ottenuti e che acquisisca la consapevolezza dei vantaggi e dei limiti nell'utilizzo di tali strumenti.

Infine, nelle *Indicazioni metodologiche per il quinto anno* troviamo il riferimento ad attività formative specifiche, quali laboratori organizzati dall'università, finalizzate ad avvicinare gli studenti liceali al mondo universitario:

Uno degli obiettivi specifici del quinto anno sarà quello di portare gli studenti, attraverso ad una partecipazione attiva e responsabile, ad essere consapevoli delle proprie conoscenze e competenze per poterle poi confrontare con le esigenze poste dallo studio della matematica all'università. A questo proposito si suggeriscono anche attività mirate che portino lo studente a misurarsi con la sua capacità di autoapprendere (es. uso di piattaforme per lo studio autonomo, attività proposte dall'università o da altri enti formativi ...).

Inoltre l'importanza del laboratorio come strumento per avvicinare gli studenti alle discipline scientifiche attraverso un approccio sperimentale è sottolineata anche nelle Linee Guida del Piano Nazionale Lauree Scientifiche (cfr. [14]):

Tra le azioni, [...], sono incluse quelle finalizzate a mettere a sistema la pratica del "laboratorio" per l'insegnamento delle scienze di base, in

particolare al fine dell'orientamento degli studenti dell'ultimo triennio della Scuola secondaria di II grado.

Affinché il laboratorio risulti un'esperienza significativa il docente ha il compito complesso di proporre problemi ed attività interessanti e accuratamente progettati, dedicando particolare attenzione a momenti di discussione collettiva e di riorganizzazione dei concetti emersi dalle attività sperimentali. La progettazione e la realizzazione di esperienze che includano l'uso di strumenti informatici richiedono all'insegnante un ulteriore sforzo. L'integrazione delle nuove tecnologie nella pratica didattica infatti richiede all'insegnante lo sviluppo di competenze su tre diversi livelli (cfr. [8]):

- A livello matematico è necessaria la conoscenza delle teorie matematiche su cui si basano i risultati ottenuti sperimentalmente con determinati strumenti informatici, ed inoltre occorre particolare attenzione nella scelta dei problemi da proporre in laboratorio;
- A livello tecnologico l'insegnante deve avere una certa dimestichezza con lo strumento (tecnologico o meno) da utilizzare in laboratorio e la consapevolezza dei limiti e delle potenzialità dello strumento stesso.
- A livello metodologico infine è richiesta all'insegnante la capacità di raccogliere i feedback delle attività svolte al fine di valutare l'efficacia dell'approccio e degli strumenti utilizzati.

Proseguiamo ora riportando le attività svolte nel corso del tirocinio.

4.2 Laboratorio sulla brachistocrona in Università

Uno degli obiettivi principali del tirocinio è stata la progettazione di un percorso laboratoriale sulla proprietà brachistocrona della cicloide. Il problema della brachistocrona viene solitamente introdotto in corsi avanzati di matematica all'università, quali calcolo delle variazioni, ma l'enunciato è comprensibile anche per uno studente di liceo. La strategia risolutiva alla base di questo laboratorio si rifà al metodo di stratificazione dovuto a Johann Bernoulli. Il laboratorio comincia dunque con l'analisi del problema del doppio strato, dal quale ricaviamo la condizione di brachistocrona corrispondente. Poi passiamo al processo di discretizzazione e di passaggio al limite, dal quale ricaviamo la condizione di brachistocrona per il problema originale. Vengono successivamente introdotte le cicloidi generalizzate,

che non erano state considerate durante la lezione al Galilei, le quali soddisfano la condizione di brachistocrona ma non sono la soluzione del problema. Concludiamo verificando che alcune curve, ben note agli studenti, non sono soluzione al problema e mostrando evidenze sperimentali del fatto che la cicloide è la brachistocrona. L'uso del calcolo e della sperimentazione (reale e simulata via software) si alternano con lo scopo di far cogliere gli aspetti più profondi di questo interessante problema.

Il percorso così descritto è stato presentato anche all'interno del corso **Laboratory of Didactics of Mathematics**, e il materiale è stato messo a disposizione degli studenti per la preparazione di simulazioni di lezioni e per l'esame finale del corso.

Abbiamo realizzato il percorso completo sulla brachistocrona con alcuni ragazzi del Liceo Galilei di Trento. Il laboratorio si è sviluppato in due incontri, per un totale di quattro ore, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento. Gli incontri hanno previsto l'alternarsi di parti pratiche, gestite da me, e parti teoriche, gestite dal professore Silvano Delladio. Hanno partecipato all'attività 6 ragazzi di classe quarta del liceo Galilei di Trento (4 del liceo scientifico e 2 del liceo scientifico scienze applicate) tutti particolarmente interessati alle discipline scientifiche.

Abbiamo allestito un'aula multimediale in modo da mettere a disposizione di ogni ragazzo un computer. Nei "momenti pratici" i ragazzi erano i primi protagonisti e, grazie ai software, sono giunti a conclusioni sperimentali che sono state successivamente dimostrate con il calcolo teorico.

4.2.1 Primo incontro

Cominciamo il primo incontro con l'introduzione del problema della brachistocrona e qualche cenno storico. Per familiarizzare col problema, sottoponiamo ai ragazzi la **scheda di lavoro 1** riguardante il doppio strato, riportata nella Sezione A.1. Seguono i commenti alle risposte dei ragazzi, che possono essere riassunti come segue:

- (1) Tutti i ragazzi rispondono correttamente alla prima domanda: il percorso più corto che congiunge i punti A e B è il segmento \overline{AB} .
- (2) Alla richiesta di scrivere l'espressione del tempo di percorrenza del percorso ASB , quattro ragazzi individuano il tempo di percorrenza della diagonale, e solo due ragazzi scrivono l'espressione del tempo come funzione di x , ascissa del punto di sbarco.

- (3) Tutti i ragazzi intuiscono che per minimizzare il tempo di percorrenza conviene percorrere un tratto più corto in mare e un tratto più lungo sulla spiaggia, poiché la velocità in mare è minore. In particolare individuano due percorsi, riportati in Figura 4.1.

- Sapresti indicare un percorso il cui tempo di percorrenza sia inferiore al tempo di percorrenza del segmento AB? Ricorda che $v_1 < v_2$.

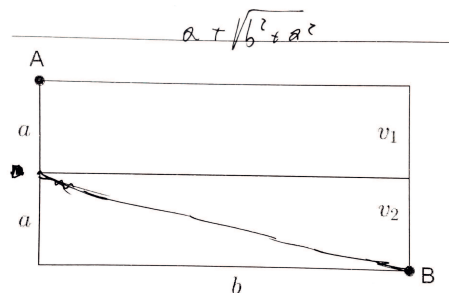
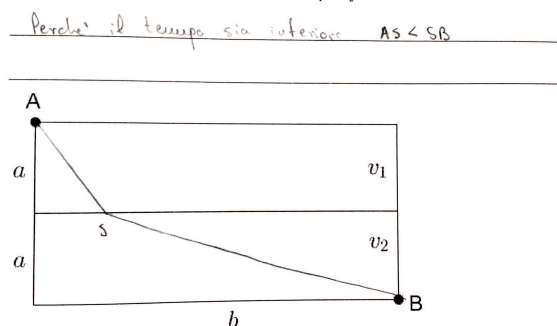


Figura 4.1: Scheda di lavoro 1, le risposte di due ragazzi alla richiesta di indicare un percorso con tempo di percorrenza minore della diagonale.

Successivamente proponiamo il software “doppio strato” e la **scheda di lavoro 2** corrispondente, presentati nella Sezione A.1. I ragazzi grazie al software scoprono gli aspetti matematici più interessanti del problema e giungono alla soluzione del doppio strato.

A questo punto segue un momento di discussione collettiva, in particolare troviamo col software il percorso di minimo tempo e discutiamo le sue caratteristiche. Riportiamo brevemente i commenti alle risposte della scheda di lavoro 2:

- (1) Tutti i ragazzi osservano che esiste un valore di x per il quale $T(x)$ è minimo. Uno di loro afferma che il tempo risulta minimo quando la retta tangente al grafico di $T(x)$ è orizzontale.
- (2) Tutti i ragazzi descrivono in modo corretto il segno della pendenza della retta tangente al variare dell'ascissa di sbarco x . Riportiamo come esempio la risposta data da uno studente in Figura 4.2
- (3) Anche in questo caso tutti i ragazzi rispondono correttamente: la pendenza della retta tangente è pari a zero per il valore di x che minimizza $T(x)$.
- (4) Grazie alle conclusioni sperimentali viste fino a questo punto, i ragazzi possono affermare che il punto di sbarco ottimale è unico poiché la pendenza della retta tangente è crescente ed è pari a zero per un solo valore di x .

(5) I due rapporti risultano evidentemente uguali solo quando $T(x)$ è minimo.

Facciamo infine osservare ai ragazzi che possiamo escludere dall'essere soluzione il secondo percorso riportato in Figura 4.1.

Seleziona la retta *tangente* al grafico di T nel punto rosso $(x, T(x))$.

- Che legame c'è tra l'ascissa di sbarco x e la pendenza della retta tangente? Muovi S ed osserva come si dispone la retta tangente. Descrivi il segno della pendenza della retta tangente.

PARTE DA UN VALORE NEGATIVO E SI ANNULLA PER IL VALORE CORRISPONDENTE AL TRAGITTO DAL TEMPO MINORE. SUPERATO QUESTO, LA PENDENZA DIVENTA POSITIVA E AUMENTA.

Figura 4.2: Scheda di lavoro 2, risposta alla domanda sull'andamento della pendenza della retta tangente al grafico.

Per capire come trovare la condizione di brachistocrona segue una parte teorica, di calcolo, riguardante la pendenza del grafico del tempo, simile alla parte svolta durante la lezione al Galilei (vedi Sezione 2.1). A differenza della lezione al Galilei, dove il rapporto incrementale e la derivata erano stati trattati solo nel caso particolare della funzione T , possiamo qui introdurre in modo più generale queste due importanti nozioni, per due motivazioni principali:

- Gli studenti di questa volta sono più maturi di quelli presenti alla lezione al Galilei, in particolare stanno studiando i limiti.
- Questa attività dura 4 ore e non 2, dunque c'è più tempo a disposizione per approfondire l'argomento.

Giungiamo quindi, attraverso il calcolo, alla condizione di brachistocrona per il doppio strato:

$$\frac{\sin \alpha_1(x)}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2(x)}{v_2}. \quad (4.1)$$

Per concludere il primo incontro ritorniamo a lavorare sul software “doppio strato”, dove è possibile osservare l'andamento monotono della pendenza e verificare

che la condizione di brachistocrona è soddisfatta solo dal percorso di tempo minimo.

Commenti

Alla fine del primo incontro vengono fatte alcune riflessioni insieme agli studenti:

- La parte di teoria è necessaria per trovare la condizione di brachistocrona. Infatti visualizzare semplicemente tale condizione col software risulta didatticamente poco utile, poiché senza una spiegazione non è chiaro come il rapporto che compare nella condizione di brachistocrona sia legato al problema in esame. Per trovare il minimo del tempo basterebbe calcolare la derivata, ma questo è un concetto sconosciuto agli studenti partecipanti al laboratorio. Per questo motivo abbiamo scelto di approfondire il discorso sulla pendenza del grafico, accennando ai concetti di rapporto incrementale e di derivata. Si osserva dunque come questa parte può essere sfruttata per introdurre il concetto di derivata, in particolare utilizzando funzioni semplici quali la parabola.
- Dal punto di vista dei ragazzi la parte di calcolo riguardante la pendenza del grafico, l'esempio della parabola, e il calcolo della derivata del tempo è stata la meno interessante poiché li ha resi solo ascoltatori e non parte attiva nel lavoro. Il ragionamento in base al quale la derivata è la differenza dei rapporti $\sin \alpha_i / v_i$ è risultata invece più apprezzata.
- Sono stati proposti infine alcuni suggerimenti per far risultare la parte teorica più coinvolgente:
 - (i) Far intervenire maggiormente i ragazzi, ponendo loro più domande in modo da renderli attivi;
 - (ii) Avendo a disposizione più tempo, si potrebbe far svolgere i calcoli ai ragazzi (magari facendoli lavorare a coppie), guidandoli verso il risultato finale, in modo che siano maggiormente consapevoli del ragionamento fatto per arrivare alla soluzione;
 - (iii) Dedurre la condizione di brachistocrona per il doppio strato dalla fisica, cioè dalla legge di Snell, favorendo così l'interdisciplinarietà.

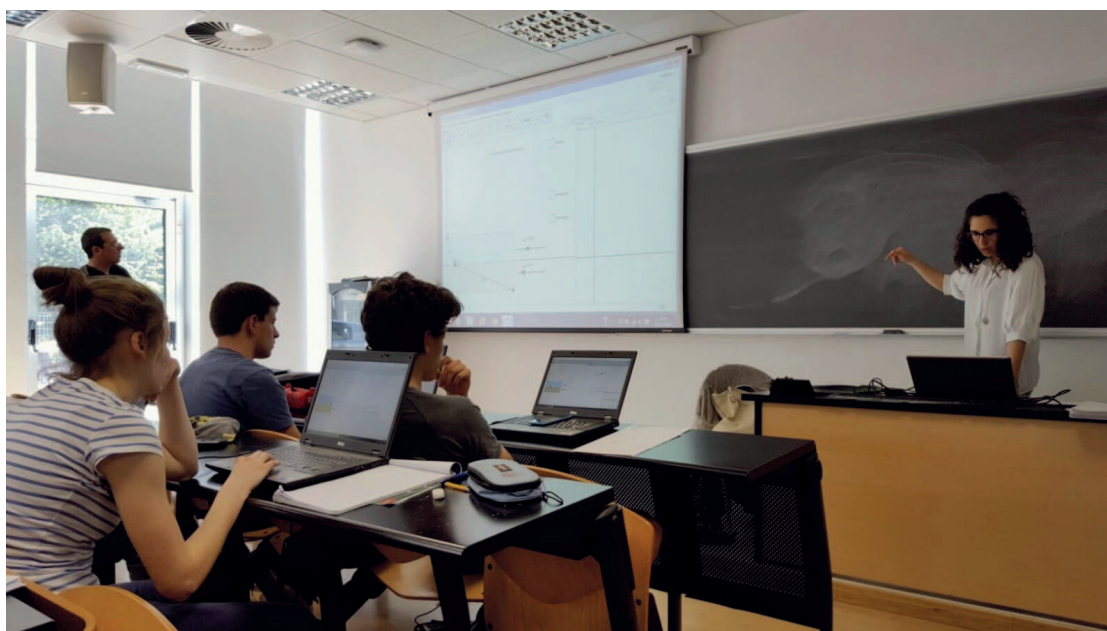


Figura 4.3: I ragazzi al lavoro col software “doppio strato”.

4.2.2 Secondo incontro

Cominciamo il secondo incontro ricordando la condizione di brachistocrona (4.1) per il doppio strato.

Successivamente passiamo al bilancio energetico e, insieme ai ragazzi, troviamo la dipendenza della velocità dalla variabile y .

Proseguiamo con la spiegazione del processo di discretizzazione, analogamente a quanto fatto al liceo Galilei (vedi Sezione 2.2.2), per giungere alla condizione di brachistocrona per il multistrato:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \dots = \frac{\sin \alpha_N}{v_N} =: c_N. \quad (4.2)$$

Segue un'attività pratica con il software “discretizzazione”, descritto nella Sezione A.2. Presentiamo il funzionamento del software, basato sulla condizione (4.2), che permette di costruire la soluzione del multistrato. I ragazzi analizzano il problema del multistrato con il software e ne costruiscono la soluzione. Segue un momento di discussione collettiva da cui emergono le seguenti considerazioni:

- La poligonale soluzione del multistrato approssima la soluzione del problema continuo, tanto meglio quanto più grande è il numero N degli strati;

- Si può escludere che il segmento sia soluzione del problema, nel caso discreto come in quello continuo;
- La soluzione discreta parte con pendenza che cresce arbitrariamente al crescere del numero N degli strati, dunque si può ipotizzare che nel caso continuo essa debba partire con pendenza infinita, cioè debba partire verticale;
- La forma delle poligonali ottenute permette di scartare anche la circonferenza dall'essere soluzione. Qualche studente osserva che tale poligonale ricorda il profilo della parabola, che rimane dunque una candidata valida;
- Passando al limite la condizione di brachistocrona per il multistrato, si ottiene la condizione di brachistocrona per il problema continuo.

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = \text{costante}; \quad (4.3)$$

Riveliamo ai ragazzi che la poligonale sta approssimando la cicloide, che è dunque la brachistocrona. Segue un breve riferimento alla storia della cicloide, curva nota ai tempi della formulazione del problema della brachistocrona perché Huygens aveva scoperto alcune sue importanti proprietà durante lo studio degli orologi a pendolo.

Per concludere questa parte torniamo sul software “discretizzazione” affinché i ragazzi possano verificare sperimentalmente che le costanti c_N della condizione (4.2), indicata in blu in Figura A.4, tendono (al crescere di N) alla costante in (4.3), che nel software è indicata in rosso e corrisponde al rapporto di brachistocrona della cicloide.

Passiamo ad utilizzare il software “campo gara”, descritto nella Sezione A.3, che permette di verificare che la cicloide è la curva di tempo minimo tra un set di curve note (segmento, ellisse, parabola e circonferenza). Lasciamo ai ragazzi il piacere di scoprire e confrontare i tempi di percorrenza delle varie curve. In particolare alcuni di loro cercano di costruire un percorso più veloce della cicloide, altri un percorso più lento del segmento.

A questo punto segue la verifica rigorosa delle conclusioni sperimentali. In particolare proviamo che:

- La soluzione del problema continuo deve avere tangente verticale nel punto di partenza;

- Il segmento e la circonferenza non soddisfano la condizione di brachistocrona (4.3).

Definiamo formalmente la curva cicloide e troviamo, assieme ai ragazzi, la sua parametrizzazione. Ci soffermiamo su alcuni punti particolari, quali $\gamma(0)$, $\gamma(\pi)$ e $\gamma(2\pi)$, che i ragazzi trovano facilmente anche senza svolgere i calcoli.

Introduciamo la cicloide generalizzata e facciamo notare che anche questa soddisfa la condizione di brachistocrona. Ritorniamo sul file “campo gara” e invitiamo i ragazzi a confrontare i tempi della cicloide e delle cicloidi generalizzate (CSC). I ragazzi possono vedere che la cicloide è la migliore. Si chiedono perché le CSC, pur soddisfacendo la condizione di brachistocrona, non sono la soluzione. Questo permette di chiarire che la condizione di brachistocrona è una condizione necessaria ma non sufficiente per la soluzione.

In conclusione si mostra ai ragazzi la brachistocrona realizzata dall’Istituto d’arte Vittoria (vedi Figura B.2) e si esegue il confronto tra segmento e cicloide, sottolineando che anche in un esperimento reale di questo tipo, dove non siamo in condizioni ideali come abbiamo supposto in tutto il percorso, il tempo di percorrenza della cicloide è minore di quello del segmento.



Figura 4.4: *Un momento di attività col software “campo gara”.*

Commenti

Grazie a questo primo laboratorio abbiamo potuto constatare la valenza didattica dei software e delle relative schede, attraverso i quali i ragazzi hanno potuto scoprire in maniera autonoma e sperimentale gli aspetti matematici principali del problema della brachistocrona. Possiamo affermare che, rispetto alla lezione tenuta al Liceo Galilei, il percorso laboratoriale, dove comunque non sono mancati gli approfondimenti teorici, ha realizzato in modo più compiuto l'obiettivo di rendere i ragazzi primi protagonisti delle attività.

4.3 Con noi all'Università



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

**CON NOI
ALL'UNIVERSITA'**
Trento, 6 maggio 2016

Il Laboratorio Didattica e Comunicazione della Matematica
aderisce all'iniziativa di:
«Apriamo le sedi dei Dipartimenti e delle strutture amministrative per mostrare i luoghi di lavoro ai nostri familiari e conoscenti»

DiCoMat Lab
Via Sommarive, 14 - 38123 Povo (TN)
0461/281599 - 0461/282936
elisabetta.ossanna@science.unitn.it
dept.math@unitn.it

PROGRAMMA VISITE PRESSO IL DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
dalle ore 15:00



ATTIVITA' DI LABORATORIO SULLE SIMMETRIE (per ragazzi dai 10 ai 14 anni) a cura di **Federica Turri**
Avete mai visto un oggetto allo specchio? E se gli specchi diventano 2, 3, 4 cosa accade? Cosa rende i fiocchi di neve, i fiori, le stelle marine così affascinanti? Noi siamo davvero simmetrici? Questo laboratorio vi permetterà di rispondere a queste domande immergendovi nel mondo delle simmetrie e scoprendo la bellezza della matematica nella realtà che ci circonda.



ATTIVITA' DI LABORATORIO SULLA CICLOIDE (per ragazzi dai 15 anni) a cura di **Katia Simoni**
Come andrebbe costruita una pista tra due punti sul muro affinché una macchinina raggiunga il traguardo nel minor tempo possibile? In questo laboratorio scopriremo la risposta al problema incontrando una tra le più belle curve della geometria, che ha affascinato molti matematici del passato: la cicloide. Attraverso l'uso di applet e di una cicloide reale potremo indagare alcune sue affascinanti proprietà.



RETI MINIME E LAMINE DI SAPONE (sia per adulti che bambini a partire dai 6 anni) a cura di **Fabio Baggiolo**
L'occasione per mettersi alla prova con un interessante problema matematico, per poi scoprire come la natura riesca a mettere davanti ai nostri occhi la soluzione.

LABORATORI DI ATTIVITA' PER BAMBINI PRESSO IL DIPARTIMENTO DI LETTERE E FILOSOFIA
dalle ore 16:30 fino alle ore 18:30



LABMATICA - LA MATEMATICA IN LABORATORIO
(bambini 8-12-anni) con **Elisabetta Ossanna**
Attraverso il gioco, la manipolazione di oggetti e qualche sfida si vive un'esperienza di matematica divertente e gratificante in cui si è protagonisti.

In occasione dell'evento *Con noi all'Università*, iniziativa che permette a familiari e amici dei dipendenti dell'Università di visitare le sedi dei dipartimenti e delle strutture amministrative, il Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica ha organizzato alcuni laboratori di matematica, tra i quali uno sulle

proprietà della cicloide, realizzato e gestito da me. Non conoscendo a priori il livello di preparazione dei partecipanti, ho progettato un'attività della durata indicativa di 30 minuti, pensata per un gruppo di 4/5 persone per volta, che punta l'attenzione sui software e sugli oggetti. Hanno preso parte all'attività ragazzi della scuola secondaria di primo grado, accompagnati dai genitori, e quindi ho potuto testare la validità dei software e del laboratorio in generale, anche su un pubblico molto diverso da quello per cui sono state realizzate le altre attività didattiche del tirocinio. L'attività si è svolta in quattro fasi:

- Definizione della curva cicloide, supportata da un file GeoGebra in cui un punto rosso sulla ruota di una bicicletta in movimento traccia la curva cicloide;
- Problema della brachistocrona. I partecipanti hanno confrontato i tempi di percorrenza del segmento e della cicloide con il modellino in legno B.6, e successivamente i tempi di percorrenza di altre curve con il software “campo gara”, giungendo alla conclusione che la curva di tempo minimo è la cicloide;
- Proprietà tautocrona. I ragazzi hanno potuto scoprire la proprietà tautocrona con la cicloide in legno B.6, restandone particolarmente affascinati. Posizionando due biglie ad altezze diverse e lasciandole scendere lungo il profilo cicloidale hanno potuto osservare che le biglie si scontrano sempre nel punto più basso della curva, anche se queste vengono lasciate cadere da altezze molto diverse sulla curva;
- Grazie a un profilo cicloidale in legno, descritto in Sezione B.3, abbiamo potuto modellizzare il pendolo cicloidale e verificare che la traiettoria della massa appesa al filo del pendolo è una cicloide uguale a quella del profilo che vincola la posizione del filo. In questo modo, ricordando la proprietà tautocrona, il pendolo cicloidale è perfettamente isocrono (assumendo condizioni ideali, cioè senza l'attrito).

Commenti

Purtroppo si è registrata una scarsa affluenza ai laboratori di matematica. Tuttavia i ragazzi che hanno partecipato al laboratorio sulla cicloide, e anche i loro genitori, sono rimasti piacevolmente colpiti dalla semplicità della definizione della cicloide e allo stesso tempo dalle sue numerose e affascinanti proprietà. In particolare ho notato il grande entusiasmo che provavano quando scoprivano con le loro mani le varie proprietà matematiche della cicloide. Posso quindi affermare che gli oggetti utilizzati e i software hanno avuto un impatto positivo sui partecipanti, stimolando la loro curiosità.

4.4 Laboratori all'Istituto di Istruzione L. Guetti di Tione di Trento

Sono state proposte delle attività laboratoriali sulla curva cicloide all'Istituto di Istruzione Lorenzo Guetti di Tione di Trento, grazie alla collaborazione della professoressa Alessandra Boroni. In particolare in una classe terza del liceo scientifico è stato realizzato un percorso sulla brachistocrona, seguendo l'impostazione del laboratorio svolto in Università e descritto nella Sezione 4.2, mentre in una classe prima del liceo scientifico tale percorso è stato adattato alle ridotte conoscenze degli studenti, privilegiando l'aspetto pratico del laboratorio. Riportiamo dunque una descrizione delle attività svolte.

4.4.1 Attività in classe prima

Il laboratorio, della durata di 2 ore, si è svolto presso l'Istituto Guetti. I partecipanti sono stati 15 studenti della classe I SA. Premettiamo che purtroppo non è possibile parlare ai ragazzi della condizione di brachistocrona in quanto non hanno ancora studiato la trigonometria, ci limitiamo quindi ad un'analisi intuitiva del problema della brachistocrona. La lezione inizia con le principali note storiche riguardanti le proprietà brachistocrona e tautocrona della cicloide. Esponiamo il problema della brachistocrona e molti studenti ipotizzano che il segmento possa essere la soluzione al problema. Cogliamo quindi l'occasione per dimostrare fin da subito che il segmento non è la soluzione: grazie alla brachistocrona in legno B.6, due volontari tra i ragazzi confrontano i tempi di discesa di due biglie che rotolano una su un profilo rettilineo e una su un altro profilo, per ora incognito, e scoprono, non senza stupore, che il segmento è da scartare. Illustriamo quindi la strategia risolutiva di Bernoulli, partendo dal problema del doppio strato. Gli studenti sono portati a fare delle considerazioni sull'andamento della soluzione grazie alla **scheda di lavoro 1** (vedi Sezione A.1), in particolare osservano che il segmento non può essere la soluzione del doppio strato. Successivamente descriviamo, grazie all'ausilio del file GeoGebra "discretizzazione" (vedi Sezione A.2), il problema discretizzato e sollecitiamo gli studenti a fare alcune considerazioni intuitive riguardanti la pendenza della soluzione del problema continuo nel punto di partenza. Facciamo inoltre osservare che la forma delle poligonali ottenute col software permette di scartare anche la circonferenza.

A questo punto introduciamo la cicloide dandone la definizione, con il supporto visivo di un file GeoGebra raffigurante la ruota di una bicicletta in movimento. Sveliamo che il profilo confrontato all'inizio della lezione col segmento è una cicloide. Proponiamo il confronto dei tempi di discesa di altre curve grazie al software

“campo gara”, mostrando che la cicloide è la migliore tra quelle proposte. I ragazzi individuano la somiglianza della cicloide con la forma delle piste da snowboard e skateboard e dei trampolini per il salto con gli sci, cogliamo dunque l'occasione per citare alcune applicazioni della cicloide in arte, architettura e nello sci (cfr. [4], [10]).

La seconda parte della lezione è dedicata allo studio della proprietà tautocrona. Si invitano i ragazzi a verificare la tautocronia della cicloide grazie alla cicloide in legno. I ragazzi provano a far cadere due biglie da altezze molto diverse scoprendo con grande meraviglia che in qualsiasi caso le biglie si urtano sempre nello stesso punto della curva, cioè quello più in basso. Proseguiamo con l'applicazione della tautocronia al pendolo cicloidale. Grazie allo strumento che modella il funzionamento del pendolo, presentato in Sezione B.3, i ragazzi tracciano l'evolvente della cicloide e scoprono che essa è ancora una cicloide. Concludiamo quindi che il grave di un pendolo cicloidale si muove su una cicloide e che quindi il pendolo cicloidale, ricordando la proprietà tautocrona, è idealmente perfetto.

4.4.2 Attività in classe terza

Il laboratorio, della durata di 2 ore, si è svolto in aula informatica presso l'Istituto Guetti. I partecipanti sono stati 23 studenti della classe III SA. L'attività inizia enunciando il problema della brachistocrona e ricordando i riferimenti storici più significativi. Passiamo quindi ad analizzare un problema più semplice, il problema del doppio strato. I ragazzi cominciano a lavorare con la **scheda di lavoro 1** (vedi Sezione A.1), confrontandosi tra di loro. Segue un momento di discussione collettiva sulle domande, alla fine della quale tutti gli studenti giungono alle risposte corrette della prima scheda di lavoro. Osserviamo in particolare che:

- (1) Nove ragazzi trovano l'espressione del tempo come funzione di x , mentre gli altri scrivono il tempo semplicemente come il rapporto tra spazio percorso e velocità. Questo indica che i ragazzi trovano qualche difficoltà nell'interpretazione del testo del problema, nella sua modellizzazione e formalizzazione in linguaggio matematico. In particolare qui si tratta di scrivere l'espressione del tempo come funzione di una variabile, la posizione di S . Si può osservare quindi che il linguaggio delle funzioni e la capacità di pensare a delle equazioni contestualizzate come funzioni non è per nulla banale per questo gruppo di studenti.
- (2) Tutti i ragazzi rispondono correttamente alla seconda domanda: il percorso più corto che congiunge i punti A e B è il segmento \overline{AB} .

- (3) La maggior parte dei ragazzi intuisce che per diminuire il tempo di percorrenza conviene percorrere un tratto più corto in mare e un tratto più lungo sulla spiaggia, poiché la velocità in mare è minore. In molti suppongono che il percorso di tempo minimo sia quello con tratto AS verticale e SB che coincide con la diagonale del rettangolo corrispondente alla spiaggia.

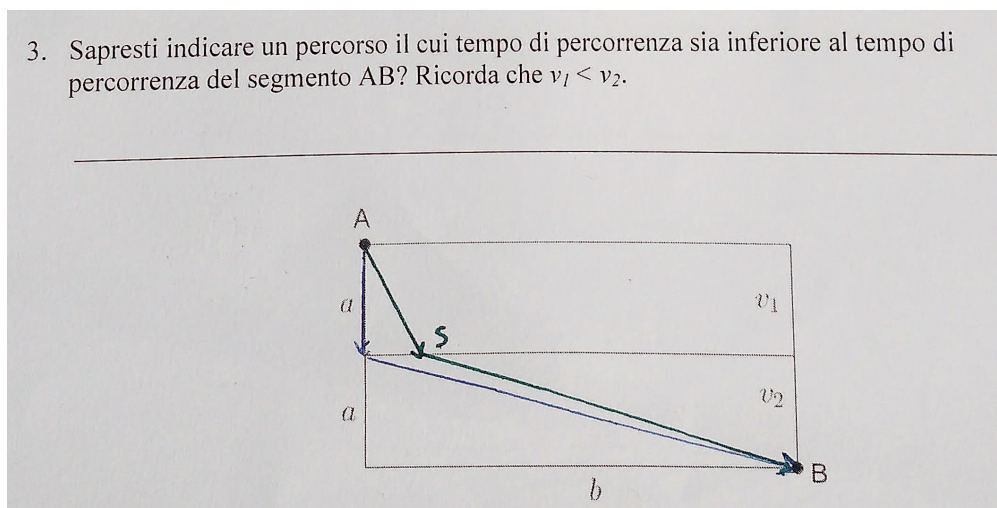


Figura 4.5: La maggior parte dei ragazzi individua questi due tipi di percorsi come candidati soluzione del problema del doppio strato.

L'attività prosegue con la ricerca della soluzione esatta del doppio strato grazie all'utilizzo del file GeoGebra "doppio strato" e della **scheda di lavoro 2** (vedi Sezione A.1). Segue una discussione collettiva sulle risposte alla scheda, che possiamo riassumere come segue.

- (1) Anche in questo caso i ragazzi incontrano qualche difficoltà nell'interpretare il tempo $T(x)$ come funzione della variabile x , ascissa del punto di sbarco S .
- (2) La maggior parte dei ragazzi osserva che la pendenza della retta tangente aumenta all'aumentare di x , senza però specificare come cambia il segno della pendenza.
- (3) Tutti i ragazzi rispondono in modo corretto: la pendenza è pari a zero quando $T(x)$ è minimo.
- (4) La maggior parte dei ragazzi afferma che il punto di sbarco ottimale è unico.
- (5) La maggior parte dei ragazzi risponde correttamente che i rapporti $\sin \alpha_i / v_i$ sono uguali quando $T(x)$ è minimo.



Figura 4.6: *I ragazzi al lavoro con il file “doppio strato”.*

Facciamo osservare ai ragazzi che il percorso con il tratto AS verticale di Figura 4.5 da loro ipotizzato, non è la soluzione.

A questo punto la professoressa fa presente un’analogia con la fisica, ricordando ai ragazzi la rifrazione della luce e la legge di Snell, che corrisponde alla condizione di brachistocrona per il doppio strato.

Passiamo quindi al caso discreto, che viene analizzato grazie al file GeoGebra “discretizzazione” (vedi Sezione A.2). I ragazzi lavorano al file e viene stimolata una discussione collettiva al fine di far emergere alcune considerazioni importanti sul problema continuo:

- La soluzione discreta parte con pendenza che cresce arbitrariamente al crescere del numero N degli strati, dunque si può ipotizzare che nel caso continuo essa debba partire con pendenza infinita, cioè debba partire verticale;
- Come nel caso del problema del doppio strato possiamo escludere che il segmento sia soluzione del problema discreto e di quello continuo;
- La forma della poligonale permette infine di escludere anche che la circonferenza sia soluzione.

Definiamo a questo punto la curva cicloide. Segue il confronto sperimentale fra la discesa di una biglia lungo un profilo rettilineo e di una lungo un profilo cicloidale

con la brachistocrona in legno riportata in Sezione B.1. Gli studenti, sebbene il segmento era stato escluso, rimangono particolarmente colpiti dallo scarto di tempo con cui la biglia sulla cicloide batte la biglia sul profilo rettilineo. Proseguiamo con il confronto con altre curve, note agli studenti, attraverso il file GeoGebra “campo gara” (vedi Sezione A.3).

Per concludere l’incontro discutiamo brevemente anche l’altra importante proprietà della cicloide: la tautocronia. Due volontari tra i ragazzi sperimentano la proprietà tautocrona con la cicloide in legno, e anche in questo caso rimangono colpiti da ciò che accade. Facendo diversi tentativi e posizionando una biglia molto in alto sulla curva e l’altra biglia quasi nel punto più basso della curva, restano affascinati dal fatto che le biglie si urtano sempre nel punto più basso della curva. Concludiamo mostrando il funzionamento del pendolo cicloidale, sottolineando le differenze col pendolo circolare da loro studiato nelle lezioni di fisica, spiegando che quello cicloidale risulta idealmente perfettamente isocrono (e quindi migliore di quello circolare).



Commenti

Credo che queste esperienze pratiche siano state per questi studenti una delle poche occasioni per affrontare la matematica con un approccio pratico, e quindi per sperimentare l'idea di laboratorialità anche in matematica. Anche la professoressa è rimasta piacevolmente colpita dalle attività proposte, e dopo la lezione mi è stato possibile fare qualche riflessione con lei. Innanzitutto, avendo più tempo a disposizione, avremmo potuto approfondire la parte teorica, come era stato fatto nel corso del laboratorio in Università. Inoltre sarebbe stato interessante far creare il file riguardante il doppio strato agli studenti, per questo la professoressa consiglia ai ragazzi di scaricare il programma GeoGebra e di provare ad utilizzarlo in forma autonoma a casa. La professoressa sottolinea che nel Liceo Scientifico la necessità di portare a termine il programma didattico e il tempo a disposizione abbastanza limitato ostacolano, purtroppo, la possibilità di proporre percorsi laboratoriali di questo tipo, che richiedono inevitabilmente più tempo per la programmazione e lo svolgimento degli stessi rispetto alle lezioni tradizionali.

Osserviamo anche che, purtroppo, gli Istituti scolastici (sia della scuola primaria che secondaria) delle valli periferiche del Trentino sfruttano meno le opportunità offerte dall'Università rispetto agli Istituti aventi sede a Trento, i quali sono in costante collegamento col mondo universitario.

Capitolo 5

Approfondimenti didattici

Dai contesti delle proprietà di brachistocrona e di tautocrona della cicloide emergono in maniera “spontanea” dei temi importanti per la didattica della matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado: modellizzazione matematica di un problema, problem solving, problemi di minimo, retta tangente a un grafico, pendenza di un grafico e derivata, circonferenza osculatrice e curvatura, discretizzazione di un problema e passaggio al limite, equazioni differenziali. Quali esempi particolarmente significativi, proponiamo il tema della derivata e quello della curvatura (di una curva). Ci soffermeremo maggiormente su quest’ultimo, per la superiore complessità dell’argomento, mostrando però come esso possa essere trattato in modo analogo al primo tema.

5.1 Retta tangente e derivata

Presentiamo di seguito un modo per introdurre il concetto di derivata, che generalizza il procedimento utilizzato in Sezione 2.1 per trovare la pendenza di un grafico. Consideriamo una funzione

$$f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.1)$$

con $f \in C^2(a, b)$, e sia G_f il suo grafico. Fissiamo un punto $P(x_0, f(x_0)) \in G_f$ e tracciamo il fascio di rette passanti per P . Per $h > 0$ consideriamo il punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ e tra tutte le rette del fascio prendiamo quella passante per Q . Indichiamo questa retta secante al grafico con S_h . La pendenza di tale retta è data da

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e dunque l’equazione di S_h è

$$y = f(x_0) + m(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

A questo punto possiamo dare le seguenti definizioni.

Definizione 5.1. Sia data una funzione f definita come in (5.1). Definiamo la derivata di f in $f(x_0)$ come il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

se questo esiste. Indichiamo la derivata di f in $f(x_0)$ con $f'(x_0)$.

Definizione 5.2. Sia data una funzione f definita come in (5.1). Definiamo la retta tangente T al grafico G_f in $P = (x_0, f(x_0))$ come la retta passante per P e avente coefficiente angolare pari a $f'(x_0)$, cioè la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

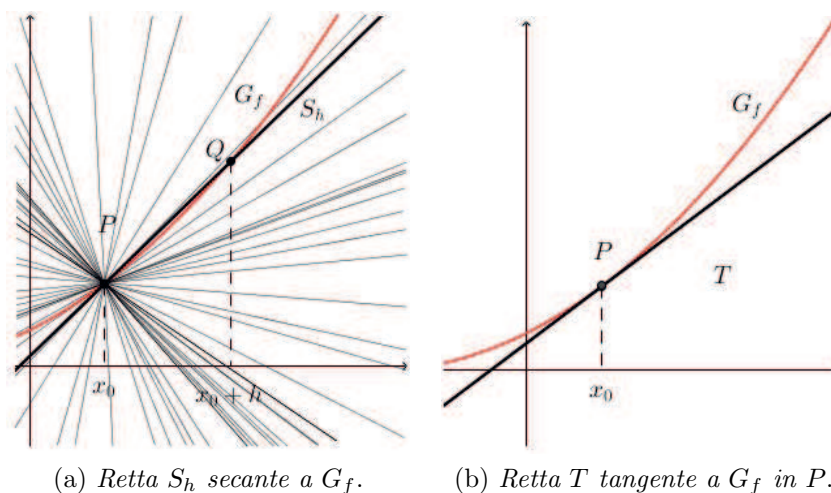


Figura 5.1

5.2 Circonferenza osculatrice e curvatura

Vogliamo mostrare un metodo, riproponibile in classe, per trovare il raggio di curvatura di una curva in un suo punto e quindi per costruire la circonferenza osculatrice. In maniera analoga a quanto fatto per la retta tangente andiamo a costruire la circonferenza osculatrice. Consideriamo una funzione

$$f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $f \in C^2(a, b)$, e indichiamo con G_f il suo grafico. Consideriamo il punto $P(x_0, f(x_0)) \in G_f$ e la retta tangente a G_f passante per P che indichiamo con T . Tracciamo la retta N perpendicolare alla retta T in P e costruiamo il fascio di circonferenze tangenti a T in P : esse avranno tutte il centro sulla retta N .

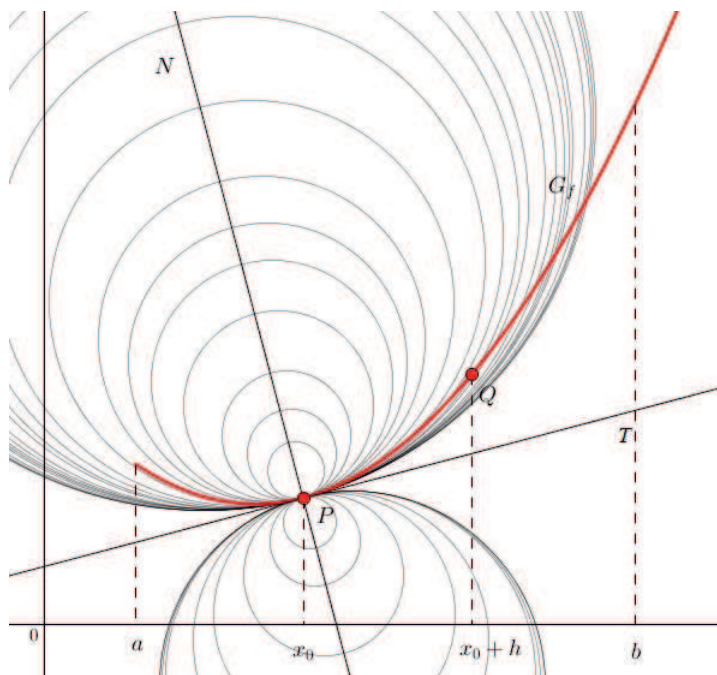


Figura 5.2: Fascio di circonferenze tangenti alla retta T e passanti per P .

Successivamente per $h > 0$ consideriamo il punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h)) \in G_f$ e cerchiamo, nel fascio di circonferenze appena descritto, la circonferenza passante per Q . Per fare ciò consideriamo il segmento \overline{PQ} e il punto medio di tale segmento

$$M \left(x_0 + \frac{h}{2}, \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{2} \right).$$

Tracciamo la perpendicolare al segmento \overline{PQ} passante per M (cioè l'asse di \overline{PQ}): l'intersezione tra questa retta e la normale N individua il centro Z della circonferenza che stiamo cercando.

Calcoliamo esplicitamente Z . Per far ciò è utile considerare i seguenti vettori:

- il vettore tangente: $(1, f'(x_0))$
- il vettore normale N : $(-f'(x_0), 1)$
- il vettore $Q - P$: \overline{PQ} : $(h, f(x_0 + h) - f(x_0))$

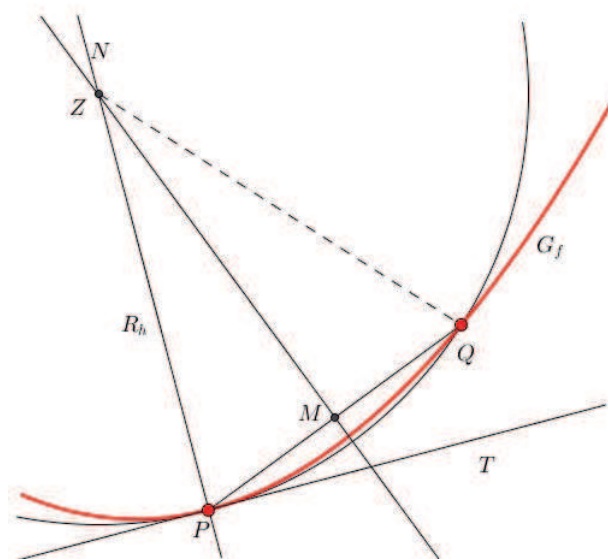


Figura 5.3: Costruzione del raggio di curvatura.

- il vettore ottenuto ruotando $Q - P$ di un angolo retto positivo: \overline{PQ} : $(f(x_0) - f(x_0 + h), h)$.

Il punto Z quindi si può raggiungere partendo da P e muovendosi in direzione $(-f'(x_0), 1)$, ma anche partendo da M e muovendosi in direzione $(f(x_0) - f(x_0 + h), h)$. Più precisamente, esisteranno $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} Z &= (x_0, f(x_0)) + s(-f'(x_0), 1) \\ &= \left(x_0 + \frac{h}{2}, \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{2} \right) + t(f(x_0) - f(x_0 + h), h). \end{aligned}$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_0 - sf'(x_0) = x_0 + \frac{h}{2} + t[f(x_0) - f(x_0 + h)] \\ f(x_0) + s = \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{2} + th. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema ricaviamo

$$t = \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{2h} + \frac{s}{h}$$

da cui, sostituendo nella prima equazione, troviamo

$$-sf'(x_0) = \frac{h}{2} + \frac{[f(x_0) - f(x_0 + h)]^2}{2h} + \frac{s}{h}[f(x_0) - f(x_0 + h)]$$

$$\begin{aligned} \frac{s}{h}[f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h] &= \frac{h}{2} + \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)]^2}{2h} \\ \frac{s}{h^2}[f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right]^2 \\ s &= \frac{\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)^2 \right]}{\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2}}. \end{aligned}$$

Per il teorema di Taylor abbiamo che

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = \frac{f''(\xi_h)h^2}{2}, \quad \xi_h \in (x_0, x_0+h)$$

quindi possiamo riscrivere

$$s = \frac{1}{f''(\xi_h)} \left[1 + \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)^2 \right].$$

Allora il raggio della circonferenza tangente a T in P e passante per Q è

$$R_h := \|Z - P\| = \|s(-f'(x_0), 1)\| = |s| \|(-f'(x_0), 1)\|$$

cioè

$$R_h = \frac{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}}{|f''(\xi_h)|} \left[1 + \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)^2 \right].$$

Il raggio della circonferenza osculatrice si ottiene mandando $h \rightarrow 0$

$$R = \lim_{h \rightarrow 0} R_h = \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \frac{1 + f'(x_0)^2}{|f''(x_0)|} = \frac{[1 + f'(x_0)^2]^{3/2}}{|f''(x_0)|}.$$

La curvatura della curva considerata nel punto P è l'inverso del raggio di curvatura:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|f''(x_0)|}{[1 + f'(x_0)^2]^{3/2}}.$$

Osservazione 5.2.1. *Riflettiamo su due casi particolari. Se il grafico G_f è un arco di circonferenza di raggio r , la circonferenza osculatrice nel punto $P \in G_f$ sarà la stessa circonferenza di raggio r e dunque la curvatura è data da $1/r$. Nel caso invece in cui G_f rappresenta una retta, otteniamo che la curvatura in ogni punto della retta è nulla.*

5.2.1 Un esempio: la curvatura della parabola

Allo scopo di illustrare l'argomento precedente attraverso un esempio semplice ma significativo (idoneo per essere utilizzato anche per un approfondimento in classe), ripetiamo il calcolo del raggio di curvatura per la parabola grafico della funzione $f(x) = x^2$. Lo faremo dapprima nel punto $P(0,0)$ e in seguito nel punto $P(1,1)$. Cominciamo con $P(0,0)$. In tal caso T coincide con l'asse x e N coincide con l'asse y . Allora le circonferenze tangenti a T in P avranno il centro sull'asse y . Per $h > 0$ consideriamo il punto $Q(h, h^2)$ e determiniamo la circonferenza del fascio passante per Q . Per far ciò consideriamo il punto medio $M(h/2, h^2/2)$ del segmento \overline{PQ} . Tracciamo l'asse del segmento, che avrà direzione $(-h^2, h)$, e intersecherà l'asse y nel punto Z .

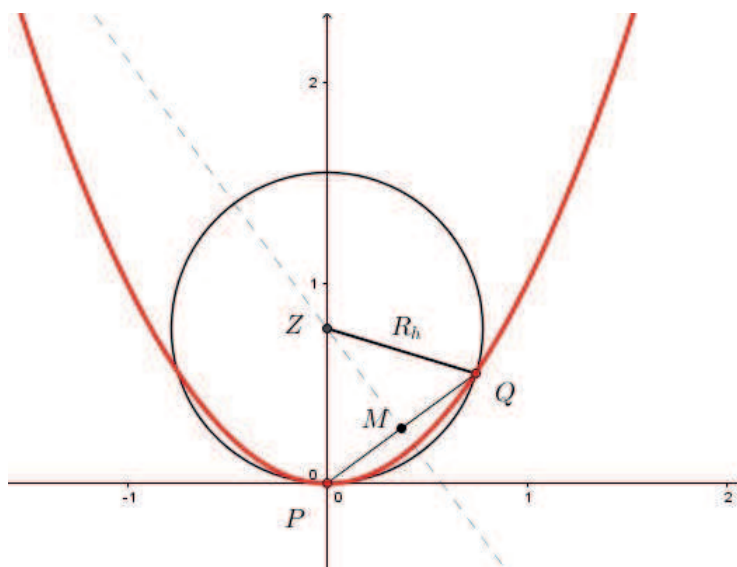


Figura 5.4: Costruzione del raggio R_h .

Osserviamo che Z si può ottenere partendo dal punto M e muovendosi in direzione $(-h^2, h)$ ma anche partendo da P e muovendosi in direzione $(0, 1)$. Esisteranno cioè $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} Z &= (0, 0) + s(0, 1) \\ &= \left(\frac{h}{2}, \frac{h^2}{2}\right) + t(-h^2, h) \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{h}{2} - th^2 = 0 \\ \frac{h^2}{2} + th = s. \end{cases}$$

Ricaviamo

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2h} \\ s = \frac{1}{2}(1 + h^2) \end{cases}$$

Allora il raggio della circonferenza da determinare è

$$R_h := \|s(0, 1)\| = |s|\|(0, 1)\| = \frac{1}{2}(1 + h^2).$$

Mandando h a zero, otteniamo il raggio della circonferenza osculatrice a G_f in $(0, 0)$

$$R := \lim_{h \rightarrow 0} R_h = \frac{1}{2}$$

e quindi la curvatura in $(0, 0)$ è

$$k = 2.$$

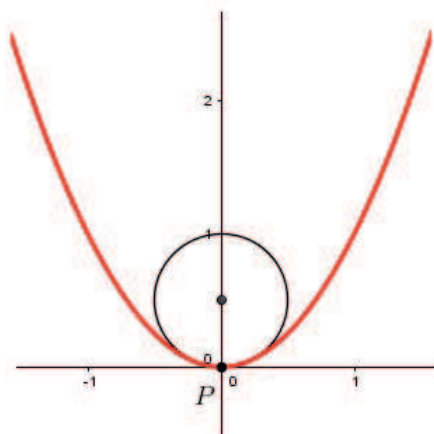


Figura 5.5: Circonferenza osculatrice in $(0, 0)$.

In maniera analoga possiamo calcolare il raggio della circonferenza osculatrice a G_f in $P(1, 1)$. Per $h > 0$ fissiamo il punto $Q = (1 + h, (1 + h)^2)$ e troviamo il punto medio di \overline{PQ}

$$M \left(1 + \frac{h}{2}, \frac{(1 + h)^2 + 1}{2} \right).$$

Il segmento \overline{PQ} ha direzione $(h, h^2 + 2h)$ e l'asse di questo segmento ha direzione $(-h^2 - 2h, h)$. Allora il punto Z , centro della circonferenza tangente a T e passante per P e Q , si determina risolvendo l'equazione

$$(1, 1) + s(-2, 1) = \left(1 + \frac{h}{2}, \frac{(1 + h)^2 + 1}{2} \right) + t(-h^2 - 2h, h)$$

cioè il sistema

$$\begin{cases} 1 + \frac{h}{2} + t(-h^2 - 2h) = 1 - 2s \\ \frac{(1+h)^2 + 1}{2} + th = 1 + s. \end{cases}$$

Dal sistema ricaviamo

$$\begin{cases} t = \frac{1}{h^2 + 2h} \left(2s + \frac{h}{2} \right) \\ s = \frac{h^2 + 4h + 5}{2}. \end{cases}$$

Allora il raggio della circonferenza da determinare è

$$R_h := \|s(-2, 1)\| = |s|\sqrt{5} = \frac{h^2 + 4h + 5}{2}\sqrt{5}$$

e il raggio della circonferenza osculatrice a G_f in $(1, 1)$ è

$$R = \lim_{h \rightarrow 0} R_h = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{5} \left(\frac{h^2 + 4h + 5}{2} \right) = \frac{5^{3/2}}{2}.$$

Quindi la curvatura in $(1, 1)$ risulta

$$k = \frac{2}{5^{3/2}}.$$

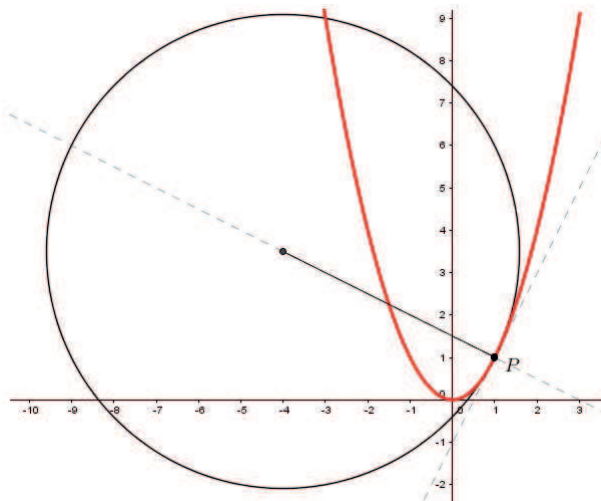


Figura 5.6: Circonferenza osculatrice in $(1, 1)$.

É importante far osservare che il raggio di curvatura (risp. la curvatura) cresce (risp. diminuisce) all'allontanarsi di P dal vertice della parabola, come intuitivamente ci si aspetta.

Appendice A

Software

Per l'implementazione dei percorsi laboratoriali sulla cicloide è stato progettato anche del materiale software. Lo strumento utilizzato per la realizzazione del materiale informatico è il software GeoGebra. Il suo creatore è Markus Hohenwarter, uno studente dell'Università di Salzburg che nella sua tesi di Laurea decide di produrre un nuovo software di geometria dinamica che coniughi la geometria con l'analisi e l'algebra. Il progetto ha inizio nel 2002, e Hohenwarter prosegue poi il suo lavoro presso la Florida Atlantic University (2006–2008), la Florida State University (2008–2009) e l'Università di Linz, avvalendosi del supporto di sviluppatori open-source e traduttori sparsi in tutto il mondo. In breve tempo GeoGebra conosce un grande sviluppo accomunando la ricerca universitaria, la formazione docenti e l'insegnamento della matematica a scuola. Nell'ambito dell'istruzione in Italia, ricordando quanto detto nella Sezione 4.1, GeoGebra nasce in un clima favorevole e positivo verso gli strumenti informatici a supporto della didattica laboratoriale. Prova della diffusione di questo software in ambito scolastico è l'esistenza di organizzazioni no-profit, i GeoGebra Institute, presenti anche in Italia a Roma, Bari e Torino, che mettono in comunicazione tra loro insegnanti, studenti e sviluppatori. Tra i tanti obiettivi di queste organizzazioni ci sono la realizzazione di materiale libero per l'insegnamento e la formazione insegnanti, l'organizzazione di competizioni per gli studenti, la gestione di seminari frontali e on-line per insegnanti, lo sviluppo di software e l'elaborazione di progetti di ricerca.

Come già detto nella Sezione 4.1, la progettazione di attività didattiche che prevedono l'utilizzo di strumenti informatici, come GeoGebra, è un compito complesso per l'insegnante, il quale deve saper cogliere le potenzialità dello strumento affinché questo contribuisca in maniera positiva allo sviluppo di abilità e competenze negli studenti. Vediamo allora alcune caratteristiche di questo software che lo rendono particolarmente adatto ad essere utilizzato nel laboratorio di matematica (cfr. [8], [12]).

La principale caratteristica di GeoGebra è quella di affiancare ambiente geometrico e ambiente algebrico e quindi di permettere il passaggio da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale). In qualità di software dinamico, permette inoltre un'interazione concreta tra studenti e insegnanti, nel momento in cui entrambi possono interagire su file predisposti dall'insegnante o prodotti dagli studenti stessi. Può risultare particolarmente stimolante infatti assegnare agli studenti un problema e chiedere loro di risolverlo attraverso la realizzazione di un file GeoGebra. Una delle difficoltà principali che gli studenti incontrano, soprattutto nel primo biennio, (cfr. [11]), è capire un testo matematico e in questo senso GeoGebra può essere utilizzato come strumento per interpretare e modellizzare un problema. In tal modo esso si rivela uno strumento utile anche per lo sviluppo dell'abilità di problem posing e problem solving.

Infine questo software può essere un ottimo strumento per “fare dimostrazioni”. È noto che gli studenti incontrano non poche difficoltà nell'attività del “dimostrare”, sia per quanto riguarda la memorizzazione di una dimostrazione, sia per la piena comprensione del ragionamento logico che sottosta alla dimostrazione, sia più in generale per il significato stesso del dimostrare in matematica. Esempi dell'utilità di GeoGebra nel “fare dimostrazioni” sono i software descritti nelle Sezioni A.2 e A.4.

Proseguiamo dunque con la presentazione dei software realizzati, soffermandoci sui dettagli più interessanti di ognuno di essi. Ripercorrendo la strategia risolutiva di Bernoulli, descritta in dettaglio nel Capitolo 2, abbiamo realizzato tre file GeoGebra relativi a un percorso di laboratorio sulla brachistocrona, che sono stati utilizzati durante le attività didattiche raccolte nel Capitolo 4.1. I tre file rispecchiano i tre step principali della strategia risolutiva: il problema del doppio strato, il processo di discretizzazione e di passaggio al limite ed infine i test di esclusione. Nelle prime tre sezioni dunque vogliamo descrivere la costruzione e l'applicazione di questi tre file. Nella quarta sezione presentiamo un file GeoGebra realizzato immaginando un'attività di laboratorio sulla proprietà tautocrona e sulla costruzione del pendolo cicloidale vista nella Sezione 3.2. Nell'ultima sezione, infine, proponiamo un file GeoGebra da inserire in un'attività riguardante la curvatura di un grafico di una funzione descritta nell'approfondimento 5.2.

A.1 Il problema del doppio strato

Riportiamo le fasi principali della costruzione del software che ha lo scopo di studiare e risolvere il problema del doppio strato. Il passo iniziale è quello di modellizzare il problema e di definire in particolare il punto $S = (x_S, 0)$ di ascissa variabile, dal-

la quale dipendono gli oggetti definiti in seguito. Sono presenti quattro caselle di controllo che sono state realizzate, e sono anche da utilizzare, nel seguente ordine:

- *Tempo*: definiamo il tempo T in funzione di x_S e visualizziamone il grafico;
- *Tangente*: tracciamo la retta tangente al grafico di T nel punto $(x_S, T(x_S))$;
- *Pendenza*: calcoliamo la pendenza m della retta tangente e visualizziamo il grafico della pendenza come luogo generato dal punto di coordinate (x_S, m) ;
- *Condizione di brachistocrona*: definiamo gli angoli α_1 e α_2 e i rapporti relativi alla condizione di brachistocrona.

Muovendo il punto S possiamo osservare come si sposta il punto $(x_S, T(x_S))$ e come variano il valore del tempo T , la pendenza della retta tangente e il valore dei rapporti relativi alla condizione di brachistocrona.

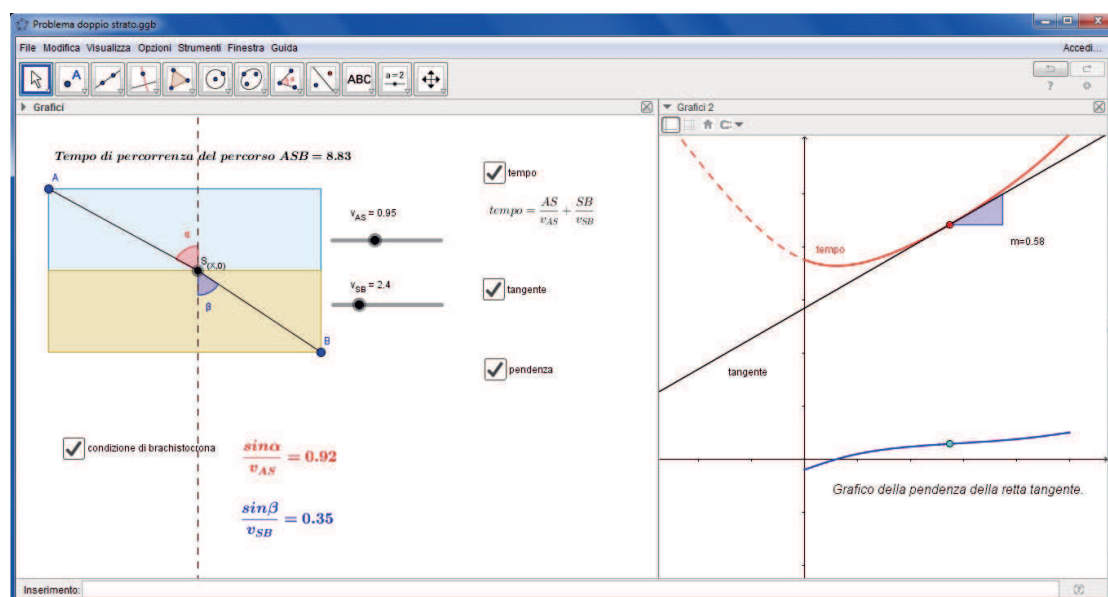


Figura A.1: File "doppio strato". Al variare del punto S cambiano i valori del tempo, della pendenza della retta tangente e dei rapporti che compaiono nella condizione di brachistocrona.

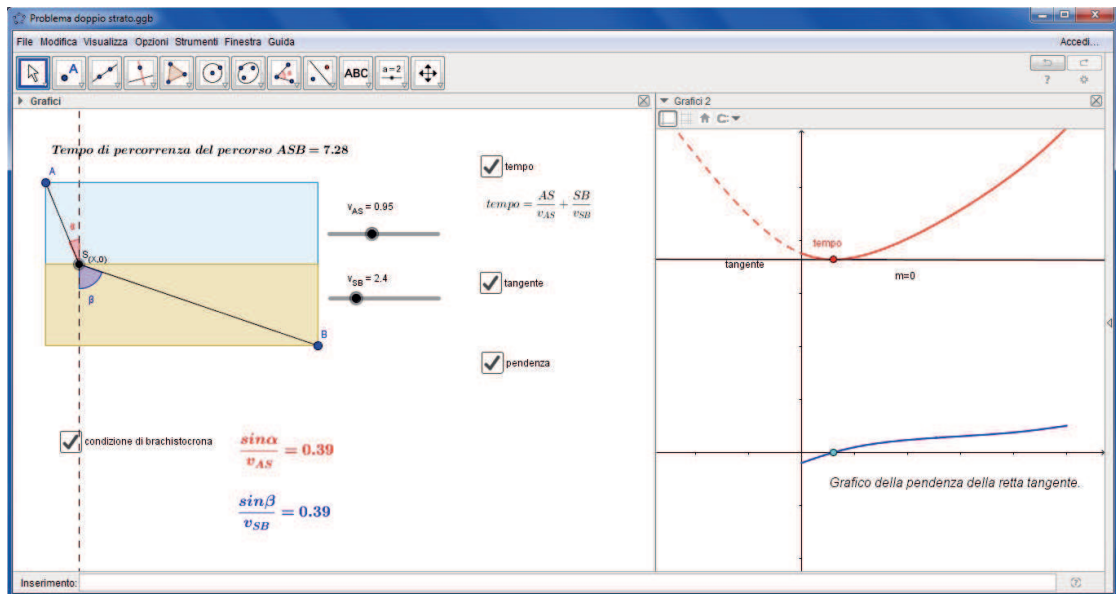


Figura A.2: File “doppio strato”. Posizione di S per la quale il tempo è minimo, la pendenza della retta tangente è nulla ed è soddisfatta la condizione di brachistocrona: il percorso ASB è la soluzione del problema del doppio strato.

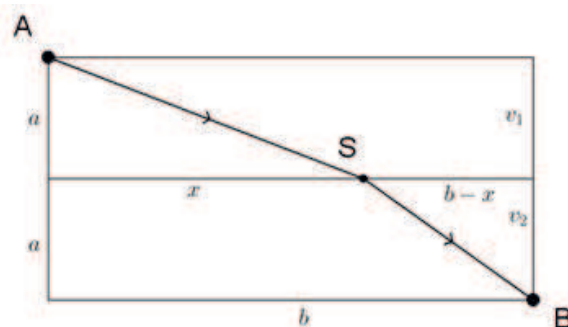
Nel percorso laboratoriale (cfr. Sezione 4.2) questo software è preceduto da una scheda di lavoro realizzata per familiarizzare col problema (**Scheda di lavoro 1**) ed è seguito da un'altra scheda di lavoro che ha lo scopo di guidare lo studente nel corretto utilizzo del software e di far emergere i concetti matematici più interessanti del problema (**Scheda di lavoro 2**).

Scheda di lavoro 1: Problema del doppio strato

Un bambino che sta giocando sulla spiaggia non trova più la sua mamma e scoppia a piangere. Sua mamma, che sta facendo il bagno in mare, sentendo il figlio piangere vuole raggiungerlo nel minor tempo possibile. Quale tragitto le conviene percorrere, sapendo che la velocità con cui nuota in mare è minore della velocità con cui corre sulla spiaggia?

Modellizziamo il problema come segue:

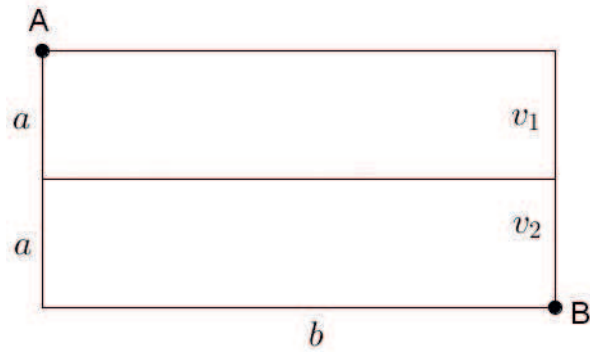
- La mamma occupa il punto A.
- Il bambino occupa il punto B.
- Il punto in cui la mamma passa dal mare alla spiaggia è S.
- La mamma nuota in mare con velocità v_1 e corre sulla spiaggia con velocità v_2 tale che $v_1 < v_2$.



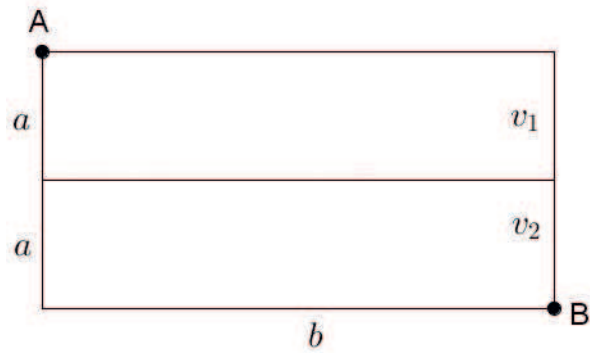
1. Il tempo T impiegato dalla mamma per raggiungere il figlio è dato da:

$$T =$$

2. Qual è il percorso più corto che congiunge i punti A e B?



3. Sapresti indicare un percorso il cui tempo di percorrenza sia inferiore al tempo di percorrenza del segmento AB? Ricorda che $v_1 < v_2$.



Scheda di lavoro 2: file Problema del doppio strato

Un bambino che sta giocando sulla spiaggia non trova più la sua mamma e scoppia a piangere. La mamma, che sta facendo il bagno in mare, sentendo suo figlio piangere vuole raggiungerlo nel minor tempo possibile. Quale tragitto le conviene percorrere, sapendo che la velocità con cui nuota in mare è minore della velocità con cui corre sulla spiaggia?

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano tale che:

- L'asse delle ascisse coincida con la linea di separazione tra mare e spiaggia
- La mamma occupi il punto di coordinate A(0,a)
- Il bambino occupi il punto di coordinate B(b,-a)
- Il punto in cui la mamma passa dal mare alla spiaggia sia S(x,0)

Supponiamo che la mamma nuoti in mare con velocità v_1 e corra sulla spiaggia con velocità v_2 tale che $v_1 < v_2$.

Seleziona il *tempo*. In rosso è disegnato il grafico della funzione

$$T(x) = \frac{AS}{v_1} + \frac{SB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{v_2}.$$

1. Esiste un valore di x per il quale $T(x)$ è minimo?

Seleziona la *tangente*: appare la retta tangente al grafico di T nel punto rosso $(x, T(x))$.

2. Descrivi il segno della pendenza della retta tangente al variare di S.

Seleziona ora il grafico della *pendenza* della retta tangente e verifica la correttezza delle risposte precedenti.

3. Sposta il punto S nella posizione che minimizza il tempo: che valore assume in questo caso la pendenza?

4. Puoi affermare che esiste un unico punto di sbarco ottimale?

Seleziona infine la *condizione di brachistocrona*. Muovi il punto S ed osserva come cambiano i rapporti in blu e in rosso.

5. Cosa succede a tali rapporti quando S si trova nella posizione che minimizza il tempo?

A.2 Discretizzazione

Il secondo software da utilizzare nel percorso sulla brachistocrona rappresenta il processo di discretizzazione e di passaggio al limite. Esso permette di costruire la poligonale che è soluzione per il multistrato.

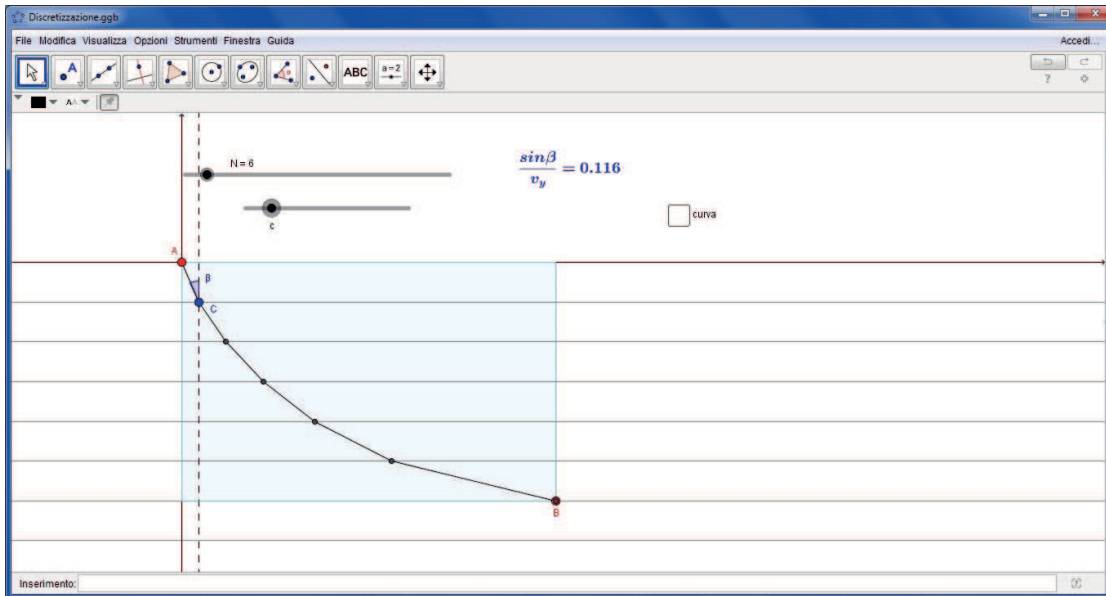


Figura A.3: File “discretizzazione”. Problema a 6 strati e relativa soluzione.

Per quanto riguarda la costruzione del file, è stato innanzitutto definito uno slider N che indica il numero di strati, di spessore uniforme $d_N = \frac{y_B}{N}$, in cui viene suddivisa la regione di piano compresa tra i punti A e B . Data una particella in caduta fra A e B , supponiamo che in ogni strato la sua velocità si mantenga costantemente uguale a

$$v_i = \sqrt{2g} \sqrt{id_N}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Si parte con la definizione di un punto C sulla retta che separa primo e secondo strato, la cui ascissa si può cambiare con lo slider c . La posizione di C determina l'angolo β_1 , formato dal segmento \overline{AC} e dalla verticale per C , e di conseguenza anche il rapporto $\sin \beta_1 / v_1$. Determiniamo l'angolo β_2 che il secondo segmento della poligonale deve formare con la verticale imponendo che valga la condizione di brachistocrona

$$\frac{\sin \beta_2}{v_2} = \frac{\sin \beta_1}{v_1}$$

cioè

$$\beta_2 = \arcsin \left(\frac{\sin \beta_1}{v_1} v_2 \right).$$

Analogamente, determiniamo l'angolo β_3 che il terzo segmento della poligonale deve formare con la verticale, imponendo che valga la condizione di brachistocrona

$$\frac{\sin \beta_3}{v_3} = \frac{\sin \beta_2}{v_2}$$

cioè

$$\beta_3 = \arcsin \left(\frac{\sin \beta_2}{v_2} v_3 \right).$$

E così via. Alla fine di tale procedura siamo certi che la condizione di brachistocrona lungo la poligonale che vogliamo costruire è soddisfatta. Ora muoviamo c finché l'ultimo segmento della poligonale termina in B : abbiamo così costruito la soluzione per il multistrato.

Successivamente, all'aumentare di N , osserviamo che la poligonale approssima sempre meglio una curva e, immaginando di far tendere N all'infinito, la poligonale coincide con la curva rappresentata in rosso nel software: la cicloide (vedi Figura A.4). Questo permette quindi di approfondire il concetto di passaggio al limite.

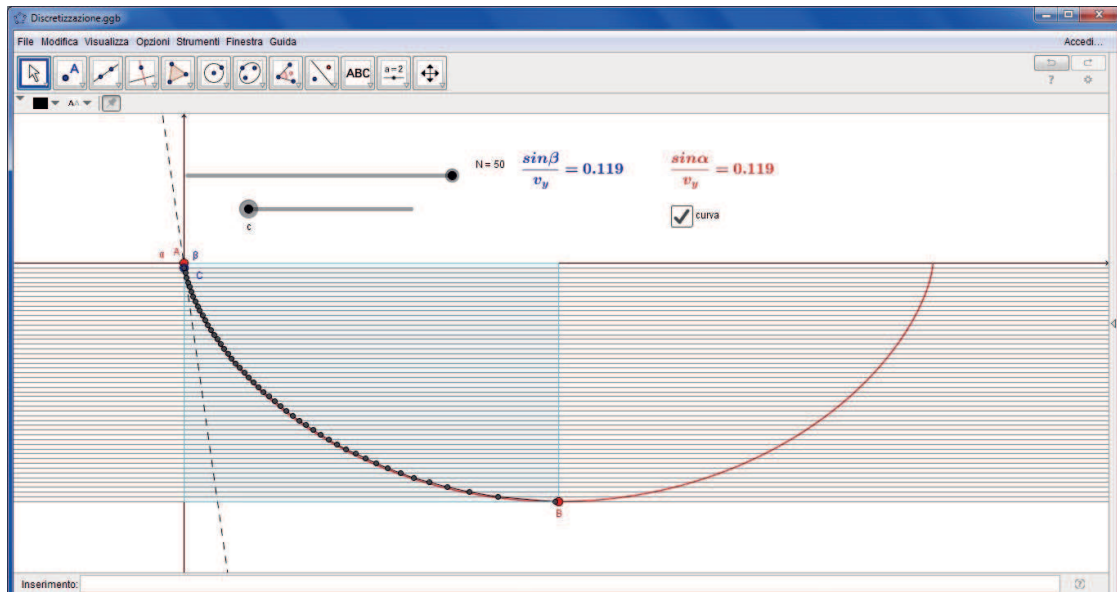


Figura A.4: File “discretizzazione”. Aumentiamo il numero di strati: la poligonale aderisce sempre meglio alla cicloide e il rapporto in blu riferito alla poligonale approssima sempre meglio il rapporto di brachistocrona in rosso riferito alla cicloide.

Osservazione A.2.1. *L'idea alla base di questo software può essere usata per dimostrare rigorosamente l'esistenza della soluzione del problema a N strati. Per farlo definiamo la funzione f che associa all'ascissa x del punto finale del primo segmento l'ascissa $f(x)$ del punto finale dell'ultimo segmento (vedi Figura A.5). Allora è ovvio che f è funzione continua e crescente. Inoltre*

- Per x molto piccolo, $f(x) < x_B$;
- Per x grande, $f(x) > x_B$.

Dunque esiste $x \in (0, x_B)$ tale che $f(x) = x_B$, cioè esiste una posizione di C tale che la poligonale termina in B .

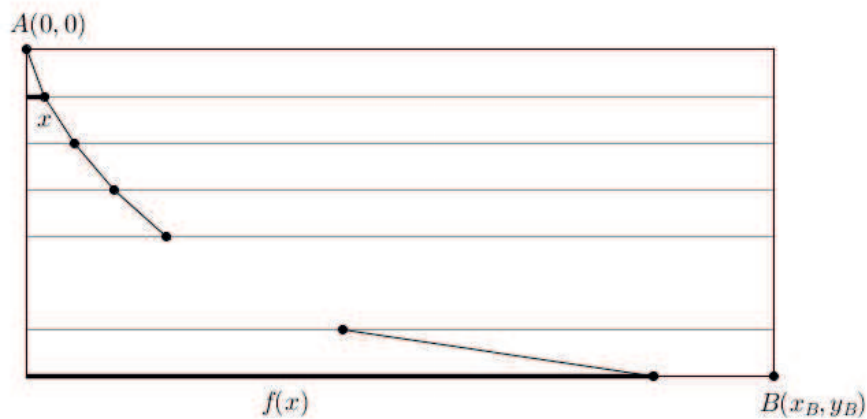


Figura A.5

Riportiamo di seguito anche la scheda di lavoro che accompagna questo software.

Scheda di lavoro 3: file Discretizzazione

Lo slider N indica il numero di strati, di spessore uniforme $d_N = y_B / N$, in cui viene suddivisa la regione di piano compresa tra i punti A e B. Data una particella in caduta fra A e B, supponiamo che in ogni strato la sua velocità si mantenga costantemente uguale a $v_i = (2g i d_N)^{1/2}$ per $i = 1, \dots, N$. Definiamo un punto C sulla retta che separa primo e secondo strato, la cui ascissa si può cambiare con lo slider c. La posizione di C determina l'angolo β_1 formato dal segmento AC e dalla verticale per C, e di conseguenza anche il rapporto $\sin \beta_1 / v_1$. Determiniamo l'angolo β_2 che il secondo segmento della poligonale deve formare con la verticale imponendo che valga la condizione di brachistocrona

$$\sin \beta_1 / v_1 = \sin \beta_2 / v_2 \quad \text{cioè} \quad \beta_2 = \arcsin (v_2 * \sin \beta_1 / v_1).$$

Analogamente, determiniamo l'angolo β_3 che il terzo segmento della poligonale deve formare con la verticale, imponendo che valga la condizione di brachistocrona

$$\sin \beta_2 / v_2 = \sin \beta_3 / v_3 \quad \text{cioè} \quad \beta_3 = \arcsin (v_3 * \sin \beta_2 / v_2).$$

E così via. Alla fine di tale procedura siamo certi che la condizione di brachistocrona lungo la poligonale che vogliamo costruire è soddisfatta.

1. Aumenta il numero di strati N e muovi C per costruire la poligonale che congiunge A e B.
2. All'aumentare di N la poligonale che si forma approssima sempre meglio la curva brachistocrona che è soluzione del problema continuo. In base al profilo definito dalla poligonale, quali curve puoi scartare dall'essere soluzione del problema continuo?

3. Per N grande osserva come si dispone la poligonale nel punto di partenza.

Sulla base della risposta precedente, puoi fare qualche ipotesi sulle caratteristiche della soluzione continua nel punto di partenza?

4. Seleziona con il cursore la *curva*: la poligonale sta approssimando questa curva rossa. Hai qualche idea sull'identità di questa curva?

Con α è stato indicato l'angolo formato dalla tangente alla curva rossa in un suo punto con la verticale. In rosso trovi il rapporto tra il seno di questo angolo e la velocità nel punto considerato.

5. Cambia il numero di strati e la posizione di C ed osserva come variano il rapporto blu e il rapporto rosso.

A.3 Il campo gara

Per completare il percorso sulla brachistocrona proponiamo il seguente file attraverso il quale si confrontano i tempi di percorrenza di alcune curve: cicloide, cicloidi generalizzate CSC e CS , ellisse, circonferenza, parabola e segmento. Dal punto di vista della realizzazione, dei tre file relativi al percorso sulla brachistocrona, questo è il più complesso. Riportiamo i passaggi più significativi della costruzione. Innanzitutto, per trovare i tempi di percorrenza di ciascuna curva, approssimiamo ogni curva con una poligonale di 100 punti. Vogliamo calcolare il tempo di percorrenza di ogni poligonale. A questo scopo definiamo uno slider t che indica lo scorrere del tempo. Consideriamo due punti P_i e P_{i+1} di una poligonale e indichiamo con y_i la quota di P_i , con y_{i+1} la quota di P_{i+1} e con s la lunghezza del segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$. Allora l'equazione del moto è

$$s = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

dove la velocità si ricava dal bilancio energetico

$$v_i = v(y_i) = \sqrt{2gy_i}$$

e l'accelerazione è data da

$$a = g \sin \alpha$$

con α l'angolo formato dal segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$ con la direzione positiva dell'asse orizzontale. Possiamo dunque ricavare il tempo per percorrere $\overline{P_i P_{i+1}}$

$$t = \frac{-v_i \pm \sqrt{v_i^2 + 2as}}{a}.$$

In particolare, indicata con m la pendenza del segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$, abbiamo che:

- se $m < 0$ allora $v_i > 0$, $a > 0$, quindi

$$t = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2as}}{a}$$

- se $m > 0$ allora $v_i < 0$, $a < 0$, quindi

$$t = \frac{|v_i| - \sqrt{v_i^2 - 2|a|s}}{a}.$$

Il tempo della poligonale è dato dalla somma dei tempi di percorrenza di tutti i segmenti della poligonale. Otteniamo così un'approssimazione del tempo di percorrenza della curva.

In seguito, vogliamo visualizzare un grave che scende lungo ciascuna curva nel tempo di percorrenza proprio di quella curva. Sfruttiamo l'equazione del moto uniformemente accelerato. Consideriamo una poligonale e, per ogni suo segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$, definiamo un punto in movimento di coordinate

$$(x(t), y(t)) = P_i + \left[v_i(t - t_i) + \frac{1}{2} a_i(t - t_i)^2 \right] n$$

dove t_i indica il tempo di percorrenza della poligonale fino al punto P_i , e n è il vettore $(P_{i+1} - P_i)/s$. Infine creiamo una lista di punti composta dai punti in movimento lungo i segmenti della poligonale.

Anche per questo software è stata realizzata una scheda di lavoro che porti lo studente ad osservare gli aspetti matematici più significativi. In particolare questo software permette di verificare che le cicloidi generalizzate CSC e CS , pur soddisfacendo la condizione di brachistocrona, non sono soluzioni al problema.

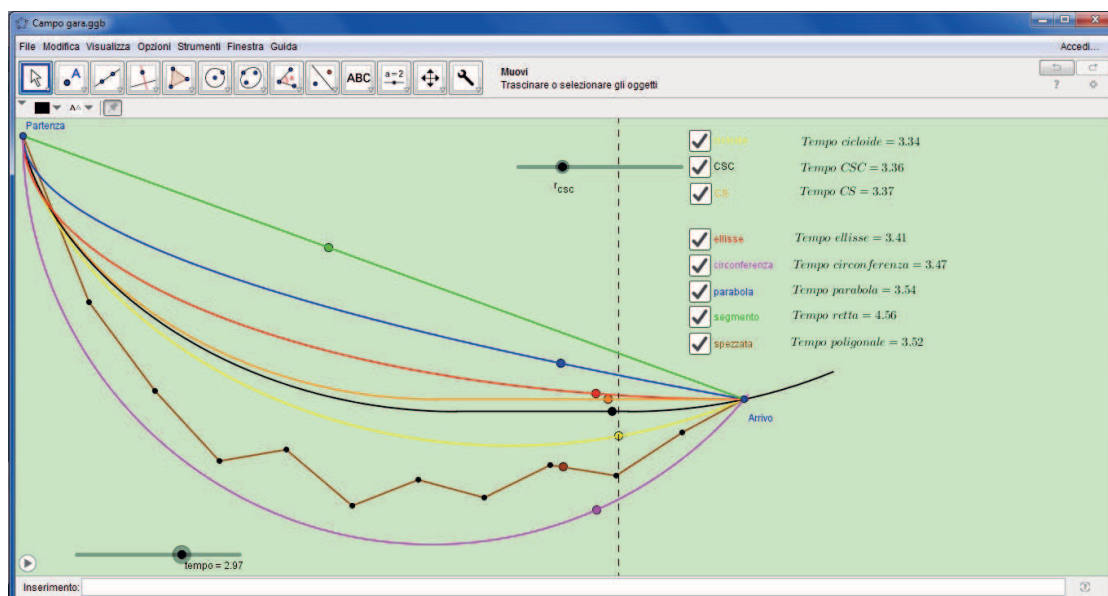


Figura A.6: File "campo gara". Confronto tra i tempi di percorrenza di varie curve. In giallo è la cicloide.

Scheda di lavoro 4: file Campo gara

Abbiamo a disposizione varie curve che congiungono il punto di partenza col punto di arrivo. Tra queste, possiamo provare sperimentalmente qual è la curva di minimo tempo.

1. Quale proprietà deve avere la soluzione al problema? Quali tra le curve proposte possiede tale proprietà?

2. Elenca nella tabella le curve dalla più veloce alla più lenta, fai partire il tempo e riporta i tempi di percorrenza nella seconda colonna. In base ai tempi ottenuti riscrivi nel giusto ordine le curve.

Classifica provvisoria	Tempo di percorrenza	Classifica definitiva

3. Costruisci nuovi percorsi con la spezzata cercando di diminuire il tempo di percorrenza.

Confronta in particolare i tempi di percorrenza della cicloide, della CSC e della CS. Tali curve soddisfano tutte la condizione di brachistocrona.

4. I tempi di percorrenza di queste tre curve sono uguali?

5. Osserva che il raggio della CSC assume valori compresi tra il raggio della CS e il raggio della cicloide. Al variare del raggio di CSC, come cambia il tempo di percorrenza della CSC rispetto ai tempi della cicloide e della CS?

6. Confronta i tempi delle CSC e CS rispetto alle altre curve (diverse dalla cicloide). Cosa puoi affermare al riguardo?

A.4 Il pendolo cicloidale

L'altra importante proprietà della cicloide è la tautocronia, facilmente sperimentabile con il modellino in legno della cicloide (vedi Appendice B). Un'applicazione della proprietà tautocrona è il pendolo cicloidale, che abbiamo descritto nella Sezione 3.2. La costruzione che abbiamo presentato risulta molto interessante ed è proponibile anche in una classe di liceo scientifico. L'unico punto critico riguarda il calcolo della lunghezza del tratto di filo "steso", cioè che non aderisce al profilo cicloidale, perché richiede l'utilizzo di integrali che vengono introdotti solo al quinto anno. Il software seguente è stato realizzato quindi per calcolare tale lunghezza evitando di introdurre l'integrale in questione. Indicando con θ il parametro della cicloide e ricordando il formalismo usato nella Sezione 3.2, la lunghezza del filo che non aderisce al profilo cicloidale è pari alla lunghezza dell'arco di cicloide compreso tra $\gamma(\pi)$ e $\gamma(\theta)$. Tracciamo il grafico della funzione $4 \cos(\theta/2)$ (comprensibile da studenti del triennio del liceo scientifico). Definiamo uno slider N e approssimiamo l'arco di cicloide che ci interessa con una poligonale di N punti. Il software calcola la lunghezza L della poligonale e mostra che

$$L \propto 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

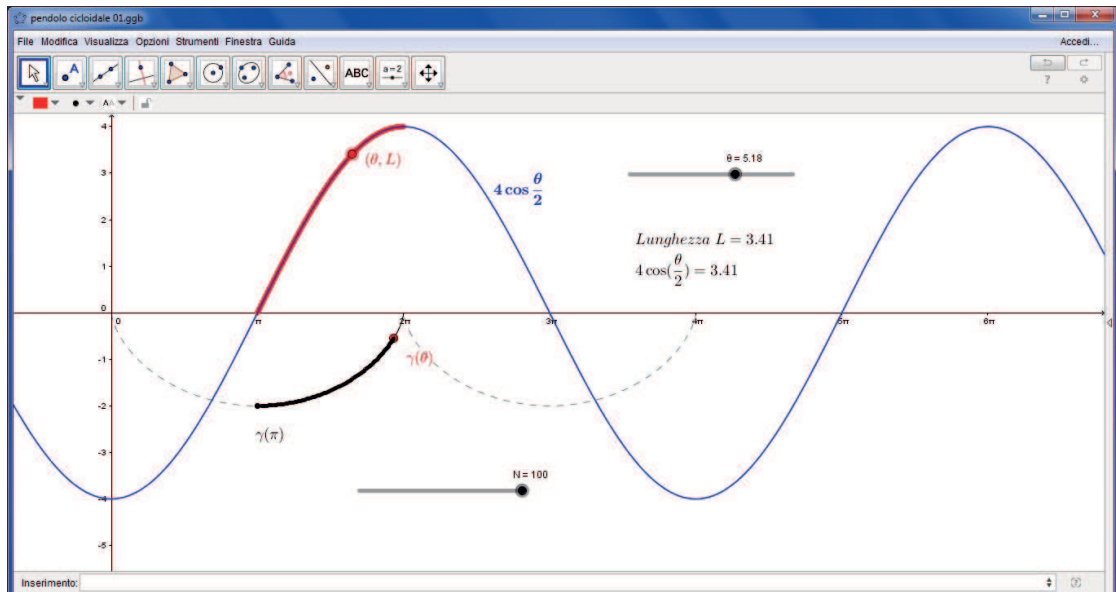


Figura A.7: File "pendolo cicloidale". Con $N = 100$ il punto (θ, L) si muove sul grafico della funzione $4 \cos(\theta/2)$.

Infatti, per N grande, muovendo lo slider $\theta \in [\pi, 2\pi]$, e quindi il punto $\gamma(\theta)$, si osserva che il punto (θ, L) si muove lungo il grafico della funzione $4 \cos(\theta/2)$.

Grazie a questo software è quindi possibile proporre in classe anche la costruzione del pendolo cicloidale e realizzare così un percorso completo sulla proprietà tautocrona.

A.5 La curvatura di un grafico

L'ultimo software che presentiamo è collegato all'approfondimento riguardante la curvatura di un grafico, e quindi ai concetti di circonferenza osculatrice e di evoluta. Esso permette di inserire una funzione a piacere, di costruire la circonferenza osculatrice in un punto del grafico della funzione e di calcolarne il raggio. La costruzione della circonferenza osculatrice si basa sulla definizione del punto P , dello slider h e del punto Q e segue esattamente il procedimento descritto nella Sezione 5.2.

Noto il raggio di curvatura si può ricavare la curvatura del grafico della funzione. Muovendo il punto P si può osservare come varia la circonferenza osculatrice e in particolare che valori assume il raggio di curvatura.

Infine il software permette di rappresentare il luogo dei centri delle circonferenze osculatrici, cioè l'evoluta della funzione data in input.

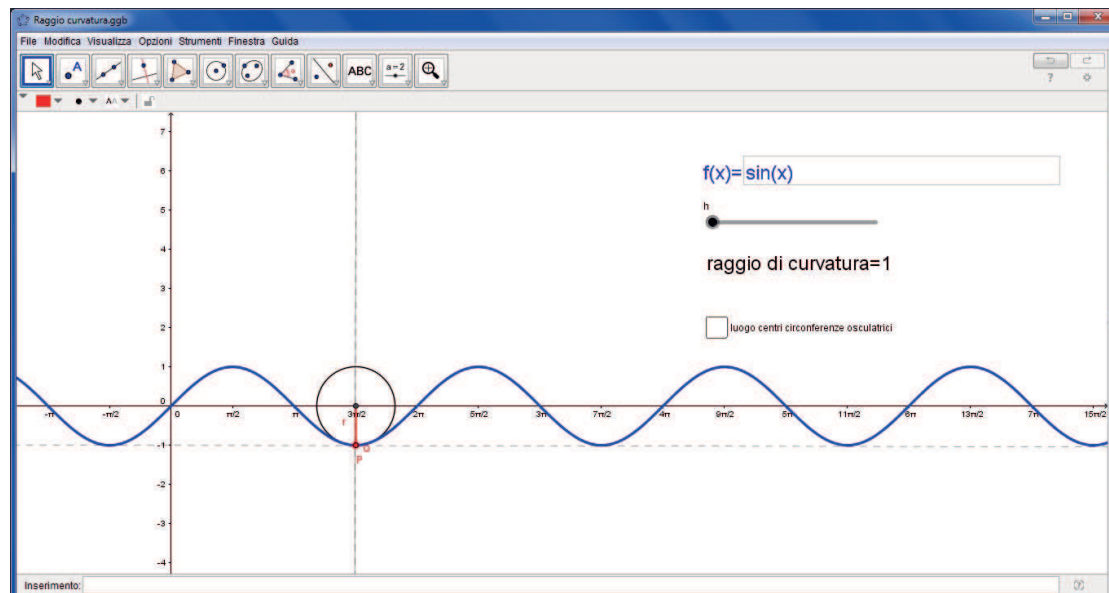


Figura A.8: File "raggio di curvatura". Esempio: $f(x) = \sin x$.

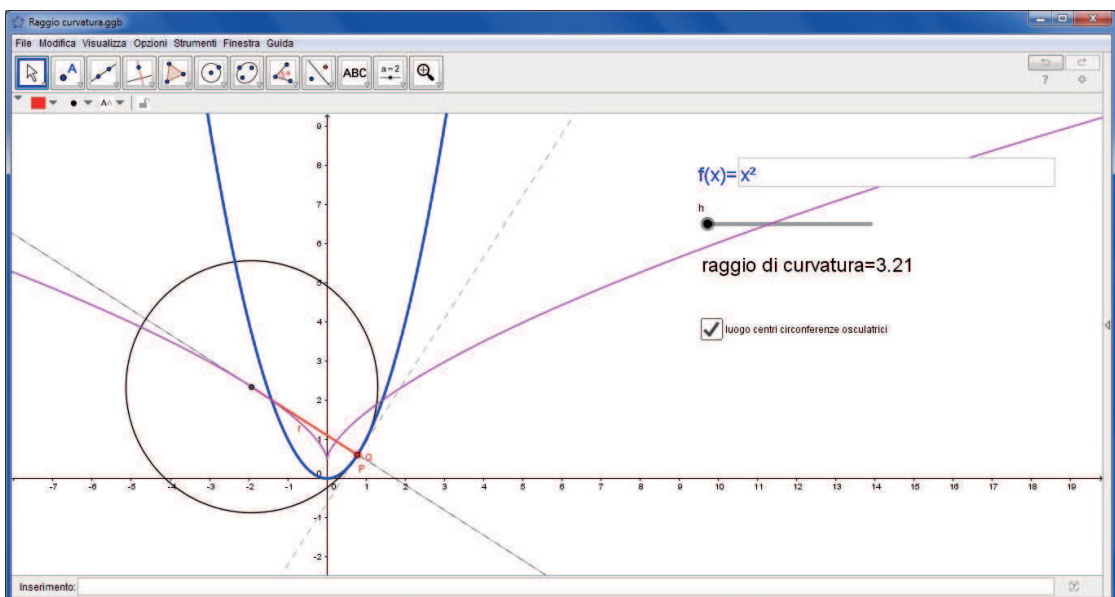


Figura A.9: File "raggio di curvatura". Esempio: $f(x) = x^2$

Appendice B

Oggetti del laboratorio

Oltre ai software, nel corso delle attività sono stati usati anche gli oggetti matematici che presentiamo di seguito, due dei quali sono stati progettati e realizzati durante il mio tirocinio: un tracciatore di cicloidi e un profilo per il pendolo cicloidale.

B.1 Brachistocrona

Il seguente modellino in legno riproduce un arco di cicloide ed è il prototipo usato per la costruzione della brachistocrona da esposizione riportata in Figura B.2. Le due opere sono state realizzate dall'Istituto d'arte Vittoria di Trento.



Figura B.1: *Cicloide trasportabile.*

Questi oggetti permettono di verificare la tautocronia della cicloide: ponendo due biglie sul binario a profilo cicloidale, ad altezze diverse, e lasciandole nello stesso istante, si può osservare che esse si urtano sempre nel punto più basso della curva, e quindi il tempo di discesa non dipende dal punto di partenza. Inoltre, a fianco del binario a forma di cicloide è stato realizzato un binario rettilineo. In questo modo è possibile confrontare i tempi di discesa di due palline poste sui due binari e verificare che quella che scende lungo la cicloide arriva prima.



Figura B.2: *Cicloide da exhibit.*

B.2 Tracciatore di cicloidi

Con la collaborazione di Fabrizio Gottardi, responsabile del Servizio Criogenico del Dipartimento di Fisica, abbiamo progettato un tracciatore di cicloidi, il quale è stato poi costruito presso l'officina meccanica dell'università a Povo.

Il funzionamento del tracciatore rispecchia la definizione della curva cicloide. Lo strumento infatti è costituito essenzialmente da una ruota che rotola senza strisciare su una retta orizzontale ed è munita di un supporto regolabile dove deve essere inserita la matita per tracciare le curve.

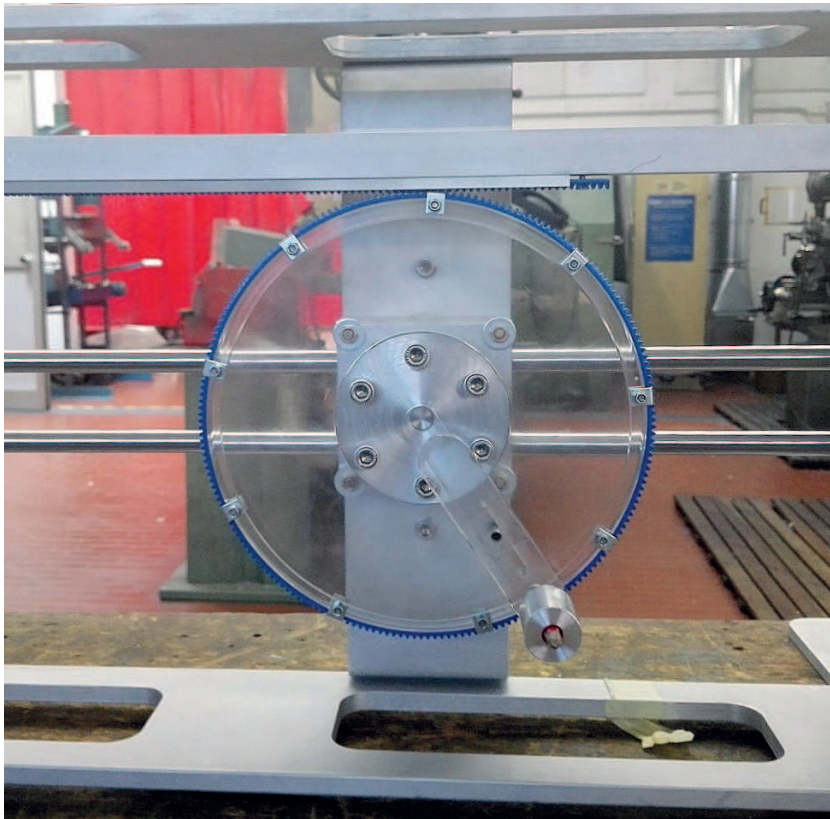


Figura B.3: *Dettaglio del tracciatore: la ruota con il supporto per la matita.*

Abbiamo deciso di costruire lo strumento in modo da disegnare cicloidi rovesciate, poiché nel corso delle attività progettate e svolte abbiamo sempre considerato cicloidi di questo tipo. La ruota, sul cui bordo esterno è stata applicata una cremagliera flessibile, viene dunque fatta ruotare su un'asta orizzontale posta sopra di essa, anche questa munita di cremagliera. È poi stato realizzato un supporto orizzontale al quale è ancorato il centro della ruota per non farla cadere.

Il tracciatore, riportato in Figura B.4, permette di disegnare tre tipi di cicloidi, come rappresentato in Figura B.5 la cicloide normale (in rosso), la cicloide allungata (in verde) e la cicloide accorciata (in blu).



Figura B.4: *Il tracciatore di cicloidi.*

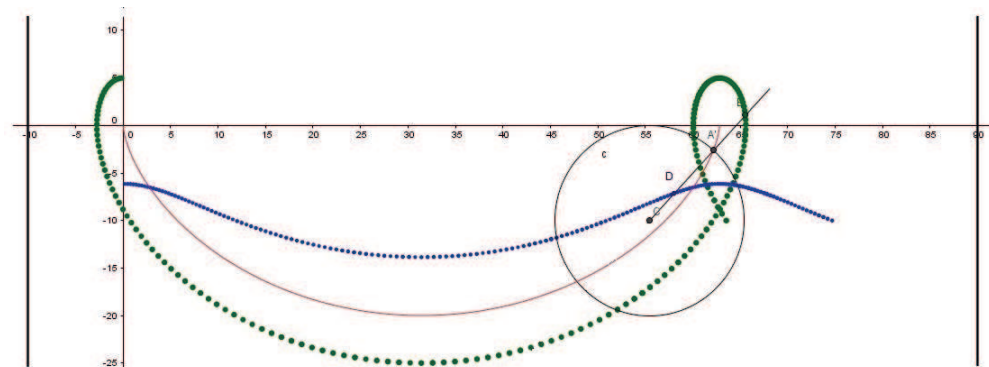


Figura B.5: *Disegno con GeoGebra dei tre tipi di curve che si possono tracciare con il tracciatore.*

B.3 Profilo cicloidale per il pendolo di Huygens

Altro strumento ideato nel corso del tirocinio, e realizzato poi da Diego Giovannella, un mio conoscente appassionato di falegnameria, è un profilo per il pendolo cicloidale (cfr. Sezione 3.2). Esso è formato da due archi di cicloide in legno, e la cuspide presente tra i due archi costituisce il punto di sospensione del filo del pendolo. All'estremo libero del filo è fissata una matita: tenendo il filo teso e muovendolo tra i due archi di cicloide la matita lascia una traccia. Si può verificare che tale traccia è un arco di cicloide uguale agli archi cicloidalici in legno. Tale strumento permette quindi di osservare ed approfondire il funzionamento del pendolo cicloidale e di studiare le proprietà dell'evolvente della cicloide.



Figura B.6: *Profilo per il pendolo cicloidale.*

Bibliografia

- [1] Benson D. C., *An elementary solution of the brachistochrone problem*, Amer. Math. Monthly **76**, 1969, 890-894.
- [2] Bruce J. W., P. J. Giblin, *Curves and singularities*, Cambridge University Press, 1984.
- [3] Franchini Valeria, *Experimental Mathematics at high school level. Some Examples*, Tesi di Laurea in Matematica, Università di Trento, 2013-2014.
- [4] Magnaghi-Delfino Paola, Norando Tullia, *La cicloide o la bella Elena della matematica. Parte prima e parte seconda*, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano.
- [5] Modesto Cristina, *Il problema della brachistocrona*, Tesi di Laurea in Matematica, Università di Trento, 2005-2006.
- [6] Occhetta Gianluca, *Introduzione alla Geometria differenziale*, dispensa per il corso di Geometria differenziale, Università degli studi di Trento, Dipartimento di Matematica.
- [7] Sambucini Anna Rita , *Un problema proposto da Bernoulli: la brachistocrona*, note di una conferenza tenutasi il 21 Maggio 1999 presso la sezione Mathesis di Orvieto.

Sitografia

- [8] Faggiano Eleonora, *“Integrare” le tecnologie nella didattica della Matematica: un compito complesso.*, rivista Bricks, Dicembre 2012.
<http://bricks.maieutiche.economia.unitn.it/la-rivista/2012-dicembre/>

- [9] Indicazioni Nazionali per gli obiettivi specifici di apprendimento per i licei (2010).
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
- [10] *La matematica dello sci alpino*.
<http://ulisse.sissa.it/biblioteca/saggio/2007/Ubib070316s001>.
- [11] Linee Guida per l'elaborazione dei piani di studio delle istituzioni scolastiche (prima stesura 2013) Provincia autonoma di Trento, Liceo Scientifico.
https://www.vivoscuola.it/c/document_library/get_file?uuid=46cb3ef1-2e22-4eac-b4ab-5b72553f5f66&groupId=10137
- [12] Montone Antonella, *Il mio nome è GeoGebra: uno strumento per migliorare le pratiche didattiche.*, rivista Bricks, Dicembre 2012.
<http://bricks.maieutiche.economia.unitn.it/la-rivista/2012-dicembre/>
- [13] Weisstein, Eric W, *Tautochrone Problem.*, from MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>
- [14] <http://www.progettolaureescientifiche.eu/>
http://attiministeriali.miur.it/media/264962/pls_26102015_linee%20guida.pdf
- [15] <http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/>
- [16] http://crf.uniroma2.it/labfis/laboratori%202010_2011/Laboratorio%20Tempo/LAB_3_classi/La%20cicloide.pdf

Ringraziamenti

Voglio dedicare una pagina di questo lavoro a tutte le persone che mi hanno sostenuto in questi anni universitari e mi hanno aiutato nella realizzazione di questa tesi.

Un sincero ringraziamento va al mio relatore, il Professore Silvano Delladio, per avermi dedicato tempo e attenzione e per avermi accompagnato con grande entusiasmo in questo percorso di tirocinio e tesi.

Ringrazio i professori Elisabetta Ossanna, Stefano Pegoretti, Giancarlo Dorigotti e Luciano Cappello per i loro consigli sulle attività didattiche che ho svolto. Ringrazio anche Fabrizio Gottardi e il personale dell'officina meccanica dell'università a Povo, e Diego Giovanella con i quali ho collaborato per la realizzazione degli oggetti da laboratorio.

Un ringraziamento all'Istituto di Istruzione Lorenzo Guetti di Tione di Trento, e in particolare alla professoressa Alessandra Boroni, per avermi dato la possibilità di tenere alcune lezioni riguardanti la parte didattica e laboratoriale della mia tesi.

Un grazie infinito ai miei genitori per avermi dato coraggio nei momenti di difficoltà ed avermi accompagnata con orgoglio a questo importante traguardo. Ringrazio anche mio fratello Matteo, perché riesce sempre a farmi sorridere. Un grazie particolare a mamma, papà e Matteo perché in questo mese hanno lavorato sodo per costruire la nuova “baracca” e la “scala” di Manez in tempo per la mia festa di laurea! Ringrazio i miei nonni per il loro costante sostegno morale.

Ringrazio infine gli amici che mi hanno incoraggiata in questi anni: Ilaria, Maria, Elia, Alberto, Almudena, Manuela (per la sua infinita pazienza!), le mie ex coinquiline Elena, Francesca e Giulia e le mie due compagne di corso preferite, Eva e Federica.