

Capitolo 4

Arance e spugne: l'area del cerchio

In questo capitolo viene descritto il laboratorio e la sperimentazione della parte del percorso didattico sull'area del cerchio.

4.1 Introduzione

Questo laboratorio è dedicato all'area del cerchio. In particolare si vuole, con delle approssimazioni lecite, guidare il ragazzo ad avere una conoscenza consapevole della formula per calcolare l'area del cerchio. Le protagoniste di questo laboratorio sono delle fette di arancia e delle spugne da cucina tagliate a cerchio, che permettono di visualizzare l'area del cerchio come la somma di settori circolari. Approssimando questi settori circolari con dei triangoli aventi base uguale all'arco di circonferenza corrispondente e altezza uguale al raggio, si può calcolare l'area della nostra figura come la somma delle aree di questi triangoli.

Anche con questo laboratorio, oltre agli obiettivi già elencati, si vogliono perseguire molti obiettivi trasversali già elencati in precedenza nell'introduzione del laboratorio sulla lunghezza della circonferenza 3.1.

L'idea di utilizzare delle fette di arance ha avuto ispirazione da un video del canale youtube di didattica della matematica della Prof.ssa Ornella Robutti [27] e dalle attività presentate dalla Prof.ssa Michela Bonetti durante il Workshop sulla circonferenza e il cerchio [2].

4.2 Descrizione del laboratorio

Durata minima: 2 ore.

Anche in questo caso la durata del laboratorio che viene indicata è da intendersi come una stima dato che dipenderà dall'insegnante scegliere se e quali punti dell'attività approfondire. Inoltre il tempo di esecuzione dipende da molti altri fattori tra i quali il livello della classe, l'ambiente di lavoro che si instaura e l'orario scolastico di cui si dispone (alle prime ore i ragazzi sono sicuramente più attivi che nelle ultime).

Collocazione nel curriculum

Questo laboratorio è rivolto alle classi seconde o terze della scuola secondaria di primo grado ed è una possibile continuazione dell'attività presentata nel capitolo precedente sulla lunghezza della circonferenza.

Arance e spugne in sintesi

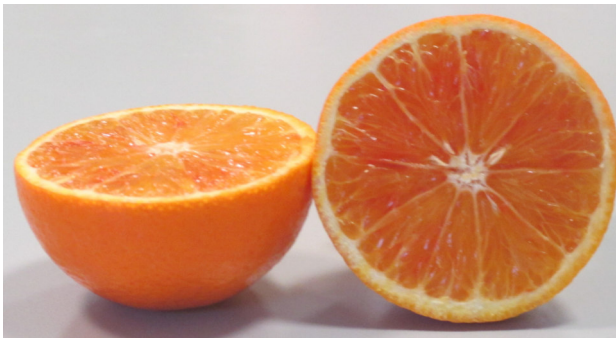
Questa attività si compone di tre fasi. Una prima fase che vede i ragazzi impegnati nelle misurazioni e nel calcolo dell'area di una fetta d'arancia. Nella seconda fase si modella la fetta d'arancia con un cerchio di spugna, sempre per arrivare al calcolo dell'area. Infine, nella terza fase si ricomponi la "fetta d'arancia" di spugna in modo da approssimare un parallelogramma e arrivare alla formula nel modo più consapevole possibile.

FASE 1: Area di una fetta di arancia

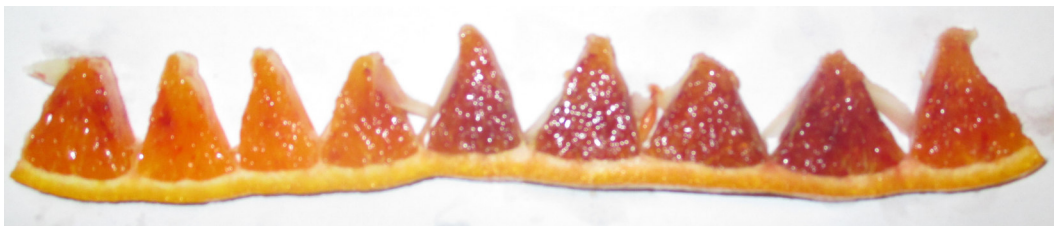
Per iniziare l'attività viene consegnato ad ogni gruppo di lavoro, oltre alle schede preposte, il kit contenente un'arancia, un piattino di plastica e un taglierino. Seguendo le istruzioni delle schede i ragazzi devono ritagliare l'arancia a metà lungo un piano perpendicolare al piano passante per il picciolo e ricavarne poi una fetta dello spessore di circa mezzo centimetro.

4.2 Descrizione del laboratorio

59



Una volta concluso questo passaggio avranno a disposizione circa 5 minuti per stimare, con l'aiuto di un righello, la lunghezza del diametro della fetta di arancia. Dovranno poi tagliare la buccia dell'arancia in un punto e srotolare la fetta in modo da ottenere una catena di spicchi come mostra la figura riportata.



Segue quindi una discussione a classe intera sulle osservazioni che si possono fare. Si nota che la fetta di arancia è approssimativamente un cerchio nella quale la buccia corrisponde alla circonferenza e gli spicchi ricoprono quasi completamente l'area del cerchio a parte un piccolo buco centrale in corrispondenza del centro. Una volta srotolata si ottiene una figura composta da tanti triangolini che hanno altezza circa uguale al raggio del cerchio che corrisponde alla fetta di arancia. Si osserva poi che i triangolini non sono tutti uguali perché in natura, per fortuna, nulla è perfetto. Si assume quindi che i triangolini siano uguali e abbiano stessa altezza uguale al raggio della fetta di arancia e si domanda ai ragazzi, lavorando in gruppo, di calcolare l'area della fetta. Gli studenti devono quindi, prima calcolare l'area di uno spicchio e poi moltiplicarla per il numero di spicchi di cui è composta la fetta. Per calcolare la base di uno spicchio possono procedere con due metodi diversi, o misurare la lunghezza della circonferenza e dividerla per il numero di triangolini oppure, in modo un po' meno preciso, misurare direttamente la base di uno spicchio. A conclusione di questa fase si riportano i valori ottenuti da ogni gruppo nella seguente tabella riassuntiva.

	Numero triangoli	Base triangolo	Altezza triangolo	Area triangolo	Area fetta arancia	Altro dato che hai utilizzato (se c'è)
Gruppo 1						
Gruppo 2						
Gruppo 3						
Gruppo 4						
Gruppo 5						
Gruppo 6						

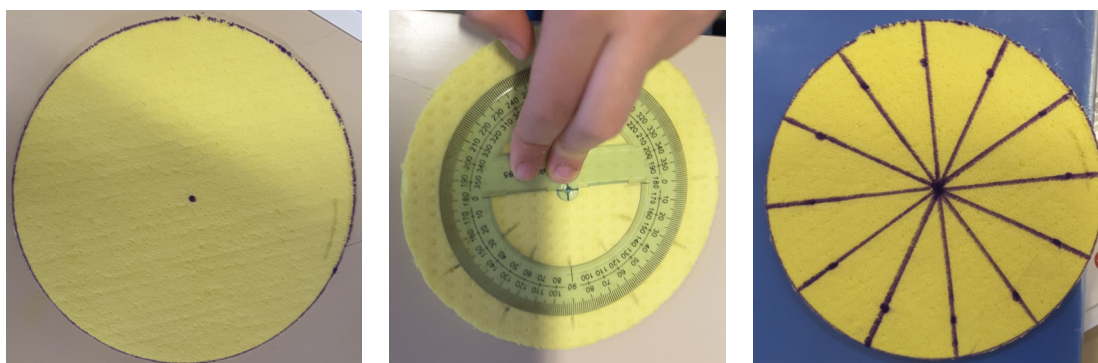
Nella tabella si è scelto di lasciare una colonna dal titolo "altro dato che hai utilizzato" dove possano inserire la lunghezza della circonferenza nel caso in cui abbiano scelto di calcolare la base di uno spicchio utilizzando questa informazione. Questa fase del laboratorio ha principalmente lo scopo di incuriosire gli studenti e innescare l'interesse per quanto verrà fatto successivamente; inoltre è utile per familiarizzare con le tecniche di misurazione, nel caso non abbiano avuto molte occasioni in precedenza. Questa fase può essere ridotta facendo fare solo la prima parte fino alle osservazioni a classe intera sulla fetta d'arancia per poi passare direttamente alla fase successiva e rimandare a questa i calcoli.

FASE 2: Costruiamo l'arancia

Con questa attività si vuole far costruire una fetta di arancia "perfetta" nella quale gli spicchi sono tutti uguali con lo scopo di arrivare alla formulazione, con le approssimazioni fatte, della formula per il calcolo dell'area del cerchio. Viene quindi consegnato ad ogni gruppo il secondo kit contenente un panno di spugna vegetale, un compasso e un goniometro. Seguendo le istruzioni riportate nella scheda di lavoro i ragazzi devono disegnare, con il compasso, sulla spugna una circonferenza di raggio 8 cm e ritagliarla. Con l'aiuto del goniometro devono poi dividere il cerchio di spugna in 12 settori circolari uguali. Per eseguire questa istruzione si devono ricordare che il goniometro è diviso in 360 gradi e che quindi per scoprire ogni quanti gradi devono far passare il lato di un settore devono dividere 360 per 12, cosa non così ovvia come si è notato nella sperimentazione del laboratorio (si veda 4.4).

4.2 Descrizione del laboratorio

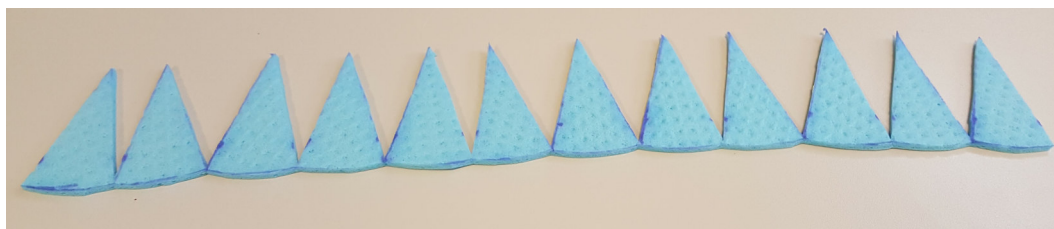
61



Si invitano quindi gli studenti a riflettere sulla figura ottenuta che assomiglia alla fetta d'arancia ritagliata nell'attività precedente. A questo punto i ragazzi devono ritagliare prima un lato di uno spicchio, e poi gli spicchi partendo con la forbice dal centro della circonferenza e rimanendo distanti qualche millimetro dal bordo in modo che gli spicchi rimangano uniti uno all'altro come nella fetta di arancia srotolata.

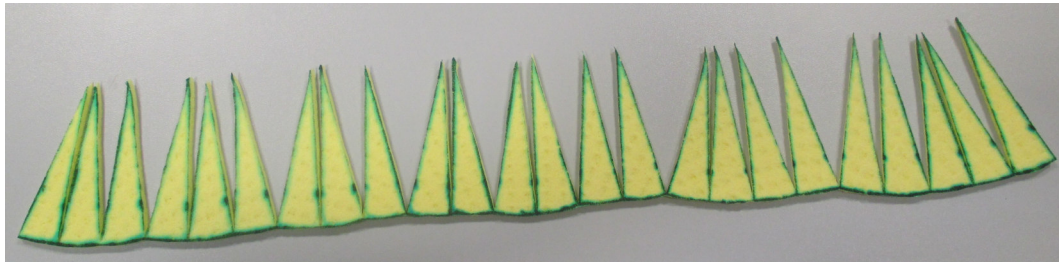


Distendendo la circonferenza si ottiene una catena di figure geometriche uguali che assomigliano a dei triangoli.



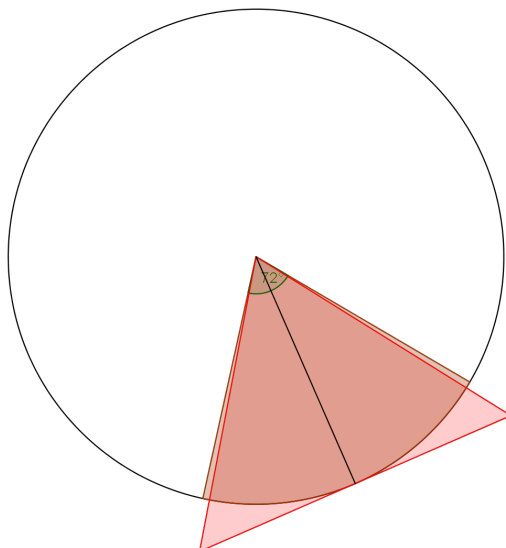
Una volta che ogni gruppo ha finito questi passaggi si passa ad una discussione a classe intera sulla figura ottenuta. Viene fatto osservare che gli spicchi in realtà

non sono dei veri triangoli perché la base non è un segmento ma un arco di circonferenza.¹ Si nota quindi che nel fare i conti per calcolare l'area della fetta di spugna possiamo supporre che siano dei triangoli dato che aumentando il numero di spicchi la base dei triangoli assomiglia sempre di più ad un segmento. Per convincere i ragazzi di questo fatto viene prima mostrato un cerchio di spugna diviso in 24 settori circolari



e poi un cerchio di cartoncino diviso in 36 spicchi, dal quale vengono tagliati i settori circolari e consegnati un paio per gruppo. Viene chiesto agli alunni di poggiare la base dello spicchio su un righello e osservare che con questa divisione la lunghezza dell'arco è approssimabile con quella del segmento.

1



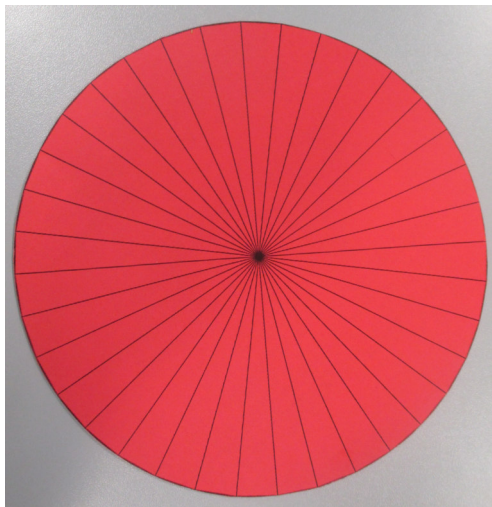
L'insegnante deve essere consapevole che nel supporre che gli spicchi siano dei triangoli stiamo bluffando ma che è meglio spigare l'area del cerchio utilizzando quest'attività, imbrogliando quindi gli studenti, piuttosto che dare semplicemente la formula e dirgli di impararla a memoria. L'imbroglio sta nel fatto che stiamo sostituendo lo spicchio di spugna (il settore circolare) con un triangolo che ha la base lunga quanto l'arco di circonferenza e l'altezza uguale al raggio. Stiamo quindi portando i ragazzi, con un'approssimazione plausibile, a considerare il triangolo equivalente allo spicchio, sapendo che

$$A_{\text{spicchio}} = \frac{\pi r^2 \frac{2\pi}{n}}{2\pi} = \frac{\pi r^2}{n} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\pi r}{n} * r = A_{\text{triangolo}}$$

4.2 Descrizione del laboratorio

63



Per convincerli ulteriormente viene fatto un esempio che si basa sull'esperienza del ragazzo. Essi sanno infatti che la terra è tonda ma essendo molto grande e trovandoci noi in una piccola parte il campo da calcio della scuola lo vediamo dritto e non curvo. Lo stesso succede aumentando il numero degli spicchi: essendo l'arco di circonferenza sempre più piccolo assomiglia sempre di più ad una linea retta.

Viene quindi chiesto ai ragazzi, lavorando in gruppo e utilizzando le semplificazioni fatte, di calcolare l'area di uno spicchio di spugna senza utilizzare il righello. Essi dovranno quindi calcolare la lunghezza della circonferenza con la formula che già conoscono e poi dividerla per il numero di spicchi in cui è stata divisa per trovare la base del triangolo. Notiamo che, nel percorso così pensato, gli studenti non conoscono ancora il valore di π però sanno che è un po' più di 3, quindi nella formula per calcolare la lunghezza della circonferenza utilizzano come valore approssimato di π il numero 3.

$$b = \frac{2\pi r}{12} = \frac{2 * 3 * 8}{12} = 4 \text{ cm}$$

Per calcolare l'area del triangolo basterà quindi ricordarsi che l'altezza è uguale al raggio del cerchio di spugna e quindi

$$A_{\text{triangolo}} = \frac{b * h}{2} = \frac{4 * 8}{2} = 16 \text{ cm}^2.$$

Una volta calcolata l'area di uno spicchio viene chiesto loro di calcolare l'area della fetta di spugna. In questo caso basterà moltiplicare l'area di uno spicchio per il numero di spicchi in cui è stata divisa la fetta

$$A_{\text{fetta spugna}} = A_{\text{cerchio}} = A_{\text{triangolo}} * 12 = 16 * 12 = 192 \text{ cm}^2$$

Con una discussione a classe intera si ragiona infine sul caso generale di una circonferenza di raggio r . Per calcolare l'area di uno spicchio bisogna prima calcolare la base

$$b = \frac{\text{lunghezza circonferenza}}{12} = \frac{2\pi r}{12}$$

e ricordandosi che l'altezza è uguale al raggio si ottiene che

$$A_{\text{triangolo}} = \frac{1}{2}b * h = \frac{1}{2} \frac{2\pi r}{12} * r = \frac{\pi r^2}{12}.$$

Quindi

$$A_{\text{fetta spugna}} = A_{\text{cerchio}} = A_{\text{triangolo}} * 12 = \frac{\pi r^2}{12} * 12 = \pi r^2.$$

Questi passaggi di formalizzazione, che possono sembrare ovvi, in realtà per gli studenti non sono così semplici da interiorizzare e richiedono di essere ripetuti più volte.

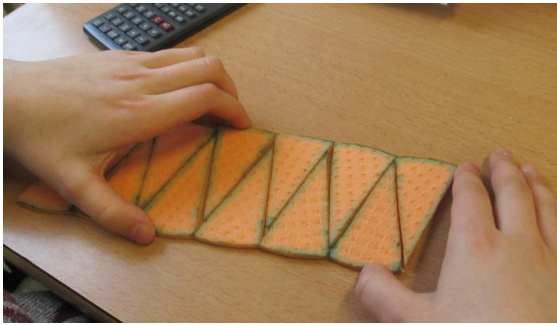
Osservazione: ai fini dei nostri conti, non è rilevante conoscere in quanti settori circolari è diviso il cerchio dato che, il numero di settori nei passaggi per arrivare alla formula dell'area si semplifica visto che compare sia al numeratore che al denominatore. In realtà, perché sia credibile l'approssimazione che assimila lo spicchio a un triangolo, è necessario dividere il cerchio in un numero congruo di spicchi.

FASE 3: L'area del cerchio

Questo laboratorio si conclude con un'attività che mostra ai ragazzi un altro metodo per arrivare alla formula dell'area del cerchio. Si è scelto di concludere questo laboratorio illustrando un'altra tecnica per scoprire la formula dell'area del cerchio per due motivi principali: il primo per far passare il messaggio che non esiste un modo solo per arrivare alle conclusioni e che non serve imparare tutto a memoria, ma basta usare gli strumenti che si hanno per ricavare ciò che ci serve; il secondo per fare in modo che anche chi non aveva capito con la tecnica precedente possa imparare un modo per scoprire la formula per calcolare l'area del cerchio.

4.3 Materiali

65



A tal fine viene chiesto ai ragazzi di dividere a metà la catena di spicchi di spugna che avevano costruito nell'attività precedente, e di incastrare insieme le due catene così ottenute mettendone una con gli spicchi a testa in giù e una con gli spicchi a testa in su. Con una discussione a classe intera si osserva che si ottiene approssimativamente un parallelogramma che ha la base lunga quanto metà circonferenza e l'altezza uguale al raggio. Anche in

questo caso bisogna considerare le approssimazioni fatte in precedenza per i triangoli nella nota 1. Si calcola poi insieme l'area di tale figura e quindi l'area della fetta di spugna nel caso di un raggio generico r .

$$A_{\text{parallelogramma}} = A_{\text{cerchio}} = b * h = \frac{\text{lunghezza circonferenza}}{2} * r = \frac{2\pi r}{2} * r = \pi r^2.$$

4.3 Materiali

- **[Schede]** fornite dall'insegnante presenti nella sezione 4.6 (una copia per ragazzo);
- kit contenente un'arancia, un piattino di plastica, un taglierino e della carta assorbente (uno per gruppo);
- kit contenente un panno di spugna vegetale da cucina, un compasso e un goniometro (uno per gruppo);
- spugna a forma di cerchio divisa in 24 spicchi uguali (una per l'insegnante);
- cerchio di cartoncino diviso in 36 spicchi uguali (due: uno per l'insegnante e uno da ritagliare in spicchi da consegnare ai gruppi);
- calcolatrice, un pennarello, forbici e righello.



4.5 Possibili approfondimenti

69

4.5 Possibili approfondimenti

Come approfondimento a tale attività l'insegnante può scegliere di mostrare un'altra tecnica per scoprire la formula dell'area del cerchio. Questo metodo ha alla

base una serie di circonferenze concentriche e a seconda del grado di approfondimento che si vuole ottenere si può prevedere un'altra attività di tipo laboratoriale oppure solamente descriverla, casomai aiutandosi con l'utilizzo di un file Geogebra. L'idea è quella di aprire la serie di circonferenze concentriche lungo un raggio e distenderle in modo da ottenere un triangolo con la base uguale alla lunghezza della circonferenza e l'altezza uguale al raggio.

I materiali da utilizzare nel caso si voglia fare un laboratorio sono: un rotolo di striscia autoadesiva parafreddo per porte e finestre, un pennarello e un taglierino.



$$A_{\text{cerchio}} = A_{\text{triangolo}} = \frac{2\pi r * r}{2} = \pi r^2$$



Si possono inoltre, prevedere dei collegamenti interessanti con le scienze e l'arte per quanto riguarda la presenza del cerchio in natura e in opere d'arte e architettoniche.