

Capitolo 3

Corde di carta e dischi: la lunghezza della circonferenza

In questo capitolo viene descritto il laboratorio e la sperimentazione della parte del percorso laboratoriale che riguarda la lunghezza della circonferenza.

3.1 Introduzione

Con questo laboratorio si vuole indagare, nei casi proposti, la proporzionalità tra la lunghezza della circonferenza e del suo diametro, con il fine di portare i ragazzi ad avere delle ragioni consapevoli, che ovviamente non potremmo dimostrare, del rapporto di proporzionalità che lega queste due misure. L'obiettivo è di arrivare a cogliere la costante di proporzionalità ed arrivare ad una prima approssimazione di questa costante, nei casi esaminati, per poi estendere al caso più generale e arrivare alla formula per il calcolo della lunghezza di una circonferenza.

Oltre agli obiettivi già elencati si vogliono perseguire anche i seguenti obiettivi trasversali che caratterizzano tutte le attività del percorso proposto in questo elaborato: stimolare la collaborazione e la condivisione del sapere, esercitarsi nella misura di oggetti, allenare il calcolo mentale, sviluppare un linguaggio matematico appropriato e abituare i ragazzi a comunicare i loro procedimenti risolutivi.

I protagonisti dell'attività sono dischi di diametro multiplo. L'idea di utilizzare dischi di raggio multiplo mi è venuta durante il Workshop sulla circonferenza e il cerchio [2] quando la professoressa Marzia Genetti ha spiegato che lei fa disegnare ai suoi alunni circonferenze di raggio multiplo per far poi misurare la lunghezza della circonferenza con uno spago. Mi è parso infatti un buon punto di partenza per trattare l'argomento dato che i dischi di raggio multiplo si prestano meglio che oggetti cilindrici qualsiasi per mettere in evidenza, nei casi considerati, la proporzionalità tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro.

3.2 Descrizione del laboratorio

Durata minima: 3 ore.

La durata del laboratorio che viene indicata è da intendersi come una stima dato che dipenderà dall'insegnante scegliere se e quali punti dell'attività approfondire. Inoltre il tempo di esecuzione dipende da molti altri fattori tra i quali il livello della classe, l'ambiente di lavoro che si instaura e l'orario scolastico di cui si dispone (alle prime ore i ragazzi sono sicuramente più attivi che nelle ultime).

Collocazione nel curriculum

Questo laboratorio può essere collocato all'inizio di un percorso didattico sulla circonferenza e il cerchio. Si può proporre in una classe seconda o terza delle scuole secondarie di primo grado dopo lo studio del perimetro e dell'area delle altre figure piane. Può essere prevista una lezione che precede l'attività di ripasso della definizione di circonferenza, cerchio, raggio e diametro oppure si possono richiamare tali concetti svolgendo il laboratorio.

Corde di carta e dischi in sintesi

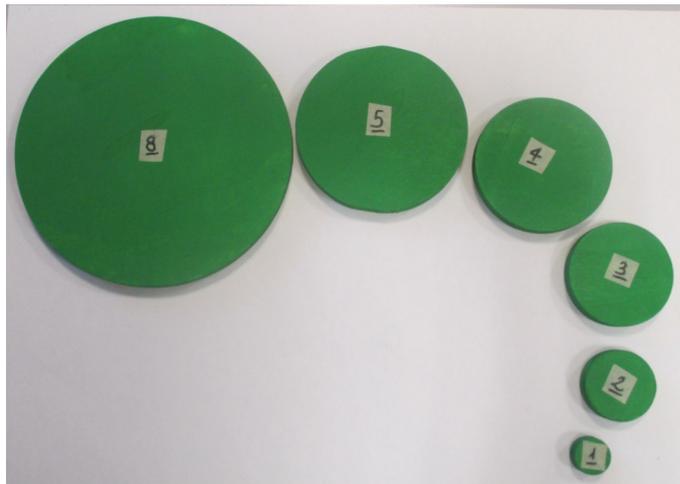
Questo laboratorio si compone di tre fasi. Una prima fase che fa intuire al ragazzo il rapporto di proporzionalità che intercorre tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro. La seconda fase mira attraverso la discussione in classe ad associare il passo prima al fatto che esiste una costante di proporzionalità senza però dimostrarlo ma dichiarandolo e, l'ultima fase che parte da questo rapporto costante per arrivare alla formula della lunghezza della circonferenza.

FASE 1: Diametri che raddoppiano, triplicano, quadruplicano...

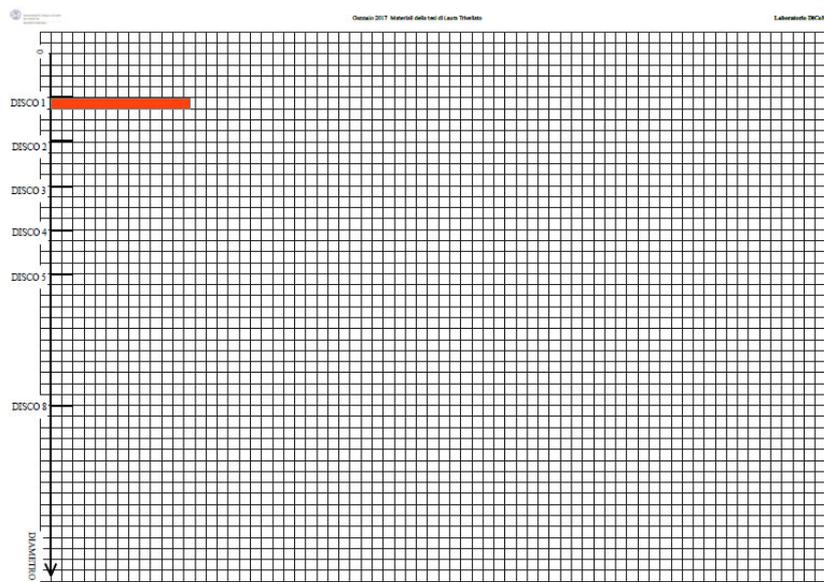
Per iniziare il laboratorio viene consegnato ad ogni gruppo di lavoro il primo kit contenente dei dischi numerati da 1 a 5 di raggio rispettivamente 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm e 5 cm; due fogli A3 prestampati e delle corde di carta (=stelle filanti).

3.2 Descrizione del laboratorio

37



Gli studenti dovranno misurare con la corda di carta la lunghezza della circonferenza di base dei dischi per verificare che la corda corrispondente al disco 1 è contenuta un numero intero di volte in quelle corrispondenti agli altri dischi. I fogli A3 prestampati che sono a disposizione degli studenti sono stati predisposti in modo tale che possano diventare un piano cartesiano che rappresenti il grafico diametro/ lunghezza della circonferenza. Per permettere che ciò accada, i posti assegnati per incollare le strisce di carta corrispondenti alle lunghezze delle circonferenze di base dei dischi sono stati posizionati in una semiretta orientata a distanza dall'origine uguale al diametro del disco considerato. I fogli sono quindi fatti così



Come si può osservare dalla figura riportata, si è scelto di dare già la prima striscia di carta stampata sul foglio A3 perché essendo la misura unità sulla quale devono confrontare le altre se sbagliano a misurare la circonferenza del primo disco si compromette l'intera attività. Essendo inoltre essa la striscia di carta corrispondente al disco più piccolo risulta più difficile fare una misura accurata. Infine averla già stampata nel foglio A3 serve come esempio per far vedere come incollare le altre strisce.

Si è deciso inoltre, di consegnare due fogli A3 per gruppo perché uno per ragazzo dilaterrebbe troppo i tempi di esecuzione dell'attività, mentre uno solo per gruppo è troppo poco perché alcuni componenti del gruppo rimarrebbero senza nulla da fare, favorendo quindi la possibilità di distrarsi.

Dopo una breve spiegazione dei passaggi da seguire, gli studenti dovranno avvolgere il disco di raggio 2 cm con la corda di carta e tagliarla in modo tale da formare una striscia che avvolga esattamente il disco per poi confrontare le misure delle due strisce di carta: quella appena ritagliata e quella già presente nel foglio A3. Gli studenti notano ovviamente che la striscia ricavata dal disco 2 è più lunga di quella corrispondente al disco 1. Per portarli ad un confronto più preciso viene chiesto di riportare la lunghezza della circonferenza 1 sulla striscia lunga quanto la circonferenza 2. I ragazzi scoprono in questo modo che la striscia della circonferenza 1 si può riportare due volte in quella del disco 2 e che quindi la lunghezza della circonferenza 2 è il doppio di quella della circonferenza 1.



Dopo aver incollato la striscia di carta lunga quanto il contorno del disco 2 nel foglio A3 nel posto assegnato i ragazzi devono ripetere lo stesso procedimento sui rimanenti dischi e completare la seguente tabella.

3.2 Descrizione del laboratorio

39

Disco / Circonferenza	Lunghezza del raggio	Lunghezza del diametro	Numero di volte che il diametro $\underline{1}$ è contenuto nel diametro che stai considerando	Numero di volte che la striscia C_1 è contenuta nella striscia che stai misurando
C_1				
C_2				
C_3				
C_4				
C_5				

Viene ora consegnato il disco 8 di raggio 8 cm con il quale i ragazzi dovranno ripetere le stesse misure fatte con gli altri dischi e completare la seguente tabella.

Disco / Circonferenza	Lunghezza del raggio	Lunghezza del diametro	Numero di volte che il diametro $\underline{1}$ è contenuto nel diametro che stai considerando	Numero di volte che la striscia C_1 è contenuta nella striscia che stai misurando
C_1				
C_2				
C_4				
C_8				

Il completamento di queste due tabelle fa intuire ai ragazzi che nelle misure da loro fatte all'aumentare del diametro aumenta anche la circonferenza e che quindi il diametro e la lunghezza della circonferenza sono grandezze proporzionali. Per rafforzare questo concetto vengono posti ai ragazzi due problemi:

Luca e Carlo possiedono entrambi un disco. Il disco di Carlo ha raggio doppio di quello di Luca. Con una corda Luca ha scoperto che la lunghezza della circonferenza corrispondente al suo disco è 1 m. Quanto ti aspetti sia lunga la circonferenza corrispondente al disco di Carlo?

Supponi ora che il disco di Carlo abbia raggio 6 volte più grande di quello di Luca. Quanto ti aspetti misuri la lunghezza della circonferenza corrispondente al disco di Luca se quella corrispondente al disco di Carlo è lunga 12 cm?

Infine, con una discussione a classe intera, vengono sottolineate le conclusioni a questa attività. Si osserva che, le misure da loro prese fanno supporre che il rapporto tra il diametro di un disco e il diametro del disco 1 sia uguale al rapporto tra la lunghezza della circonferenza dello stesso disco e la lunghezza della circonferenza del disco 1 e quindi che, la lunghezza della circonferenza e il diametro siano grandezze proporzionali, almeno per i dischi considerati. Viene anche proposta ai ragazzi la seguente sfida con lo scopo di consolidare la conclusione ottenuta.

Se avessimo un disco di raggio 90 cm quante volte ci starebbe la lunghezza della circonferenza corrispondente al disco 5 (di raggio 5cm) nella lunghezza della circonferenza del disco di raggio 90 cm?

Questi problemi sono anche un ottimo pretesto per esercitare il calcolo mentale, per esempio in quest'ultimo si può discutere su come dividere un numero per 5.

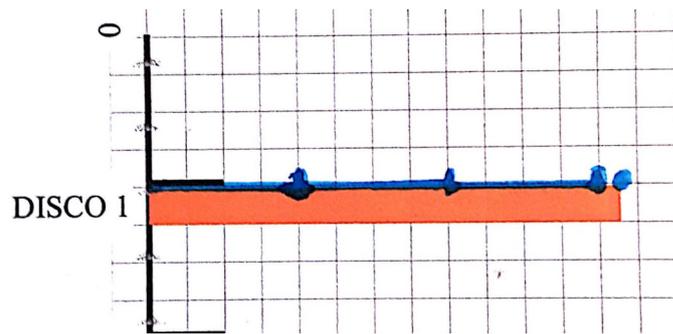
FASE 2: Legame tra circonferenza e diametro

Con questa attività si vuole estendere al caso generale il rapporto di proporzionalità che c'è tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro. Si vuole in particolare associare alle conclusioni ottenute con l'attività precedente il fatto che esiste una costante di proporzionalità. L'insegnante fa da garante sul fatto che questa proprietà vale sempre. In questa fase si arriverà anche ad avere una prima stima di π che risulterà essere un numero maggiore di 3 e minore di 3,25.

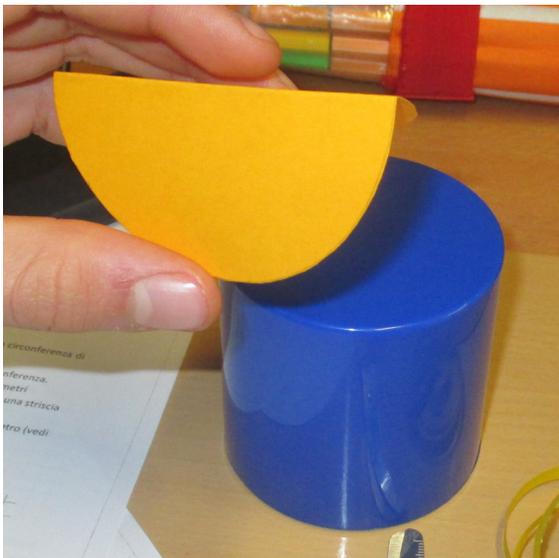
Viene chiesto ai ragazzi di riportare il diametro di ogni disco sul bordo più alto della striscia incollata sul foglio A3 corrispondente alla circonferenza e di segnare un punto alla fine della striscia.

3.2 Descrizione del laboratorio

41



Gli studenti osservano così che il diametro sta sempre tre volte più un pezzettino nella lunghezza della sua circonferenza. Unendo poi tutti i punti segnati si ottiene una retta.

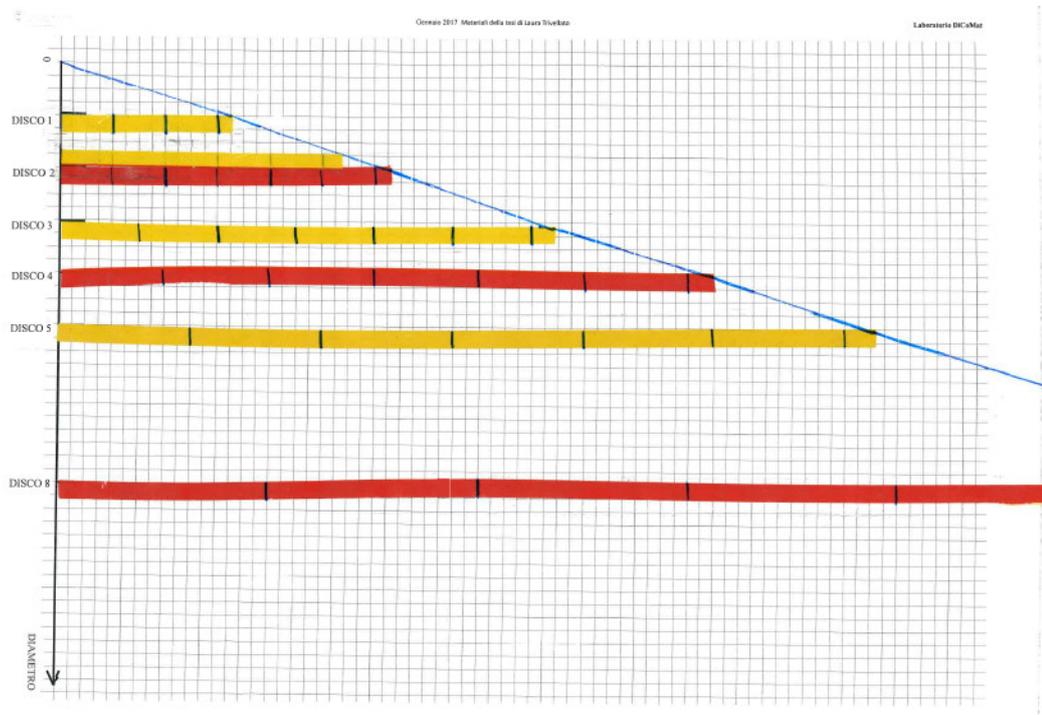


Viene allora consegnato ai ragazzi il secondo kit contenente un oggetto cilindrico e una circonferenza di carta uguale alla circonferenza di base del cilindro. Essi devono prima piegare a metà la circonferenza di carta per trovarne il diametro, poi riportare il diametro sulla retta dei diametri presente nel foglio A3 a partire dallo 0, avvolgere l'oggetto con una corda di carta tagliata in modo tale da ottenere una striscia che avvolga completamente la circonferenza e infine, incollare tale corda a partire dal punto corrispondente al suo diametro segnato in precedenza. Si osserva che la striscia di carta finisce esattamente sulla retta e che quindi dato un diametro possiamo prevedere quanto sarà circa

lunga la circonferenza guardando il grafico.

Se ai ragazzi è già nota la proporzionalità diretta si può far posizione il foglio A3 con il lato corto come base e far tracciare l'altro asse cartesiano in corrispondenza del quale risulteranno riportate le lunghezze della circonferenza di base dei dischi. Si scopre quindi che intercorre un rapporto di proporzionalità diretta tra diametro e lunghezza della circonferenza dato che abbiamo ottenuto una retta passante per l'origine. In tal caso si può anche osservare che data la lunghezza della circonferenza possiamo, guardando la retta, intuire quale sarà circa il valore del diametro. Questi ultimi passaggi sono probabilmente un po' elevati per dei ragazzi di ter-

za media e sarebbero più adatti alle scuole superiori, ma nel caso di una classe particolarmente brillante l'insegnante può decidere di approfondire questi aspetti.



FASE 3: La lunghezza della circonferenza

L'ultima fase di questo laboratorio ha l'obiettivo di applicare i risultati ottenuti nella precedente fase per arrivare attraverso passi graduali alla formula per calcolare la lunghezza della circonferenza.

Viene consegnato ad ogni gruppo l'ultimo kit contenente delle strisce di carta lunghe o quanto il diametro o quanto la circonferenza di alcuni oggetti cilindrici. Le tre strisce di carta verdi che gli studenti hanno a disposizione sono lunghe quanto il diametro di tre oggetti cilindrici. I ragazzi devono ritagliare una striscia di carta lunga circa quanto la lunghezza della circonferenza di questi oggetti e descrivere poi il procedimento utilizzato. In questo caso possono procedere con due metodi diversi: o riportano tre volte il diametro sulla corda di carta oppure con un righello misurano la lunghezza del diametro, moltiplicano tale valore per tre e poi ritagliano una striscia di carta lunga quanto il valore trovato.

Le tre strisce di carta rosse sono invece lunghe quanto la circonferenza di tre oggetti cilindrici. I ragazzi devono misurare la lunghezza delle tre strisce e stimare quanto è circa lungo il diametro del disco dal quale è stata ricavata la striscia e

3.3 Materiali

43

infine riportare i risultati in una tabella. Anche in questo caso viene richiesto di spiegare il procedimento utilizzato: dividere per tre la misura della lunghezza della circonferenza.

L'attività si conclude con una discussione a classe intera con lo scopo di scrivere insieme in linguaggio matematico quello che si è scoperto. Si è visto nelle attività che per calcolare la lunghezza di una circonferenza dato il diametro bisogna moltiplicare il diametro per una costante che è un po' più di 3 e viceversa che per calcolare il diametro bisogna dividere la circonferenza per un po' più di 3. Viene detto che tale costante viene chiamata storicamente Pi greco e indicata con il simbolo π e, osservando che il diametro equivale al raggio moltiplicato per due, si può ottenere la seguente formula

$$C = d * \pi = 2r\pi = 2\pi r.$$

Quest'ultimo passaggio di formalizzazione per passare dall'attività alla formula può sembrare ovvio ma, in realtà, richiede un certo sforzo perché per gli studenti non risulta così semplice trasformare e sistematizzare quanto imparato in linguaggio matematico.

3.3 Materiali

- **Schede** fornite dall'insegnante presenti nella sezione 3.6 (una copia per ragazzo);
- kit contenente dischi numerati con raggio uguale a 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 8 cm (uno per gruppo),
- corde di carta (stelle filanti);
- **foglio A3 prestampato** presente in allegato per incollare le strisce di carta (due per gruppo);
- kit contenente un oggetto cilindrico e una circonferenza di carta uguale alla circonferenza di base del cilindro (uno per gruppo);
- kit contenente tre strisce di carta verdi lunghe quanto il diametro di tre oggetti cilindrici qualsiasi e tre strisce di carta rosse lunghe quanto la circonferenza di tre oggetti cilindrici qualsiasi (uno per gruppo);
- colla, forbici, stecca da 60 cm, un pennarello colorato.

3.5 Possibili approfondimenti

Tale attività dà la possibilità all'insegnante di fare i seguenti approfondimenti.

- **Proporzionalità diretta:** nel caso non sia ancora stato trattato questo argomento si può partire dal grafico nel foglio A3 per introdurlo e poi spiegarlo con altre attività; se invece la classe conosce già l'argomento è un buon pretesto per riprenderlo e ripassarlo.
- **Storia di Pi greco:** nel caso in cui l'insegnante non abbia in mente di svolgere un'attività sulle cifre di π tipo quella proposta si può prevedere una lezione sulla storia di questo numero e sulle sue approssimazioni.

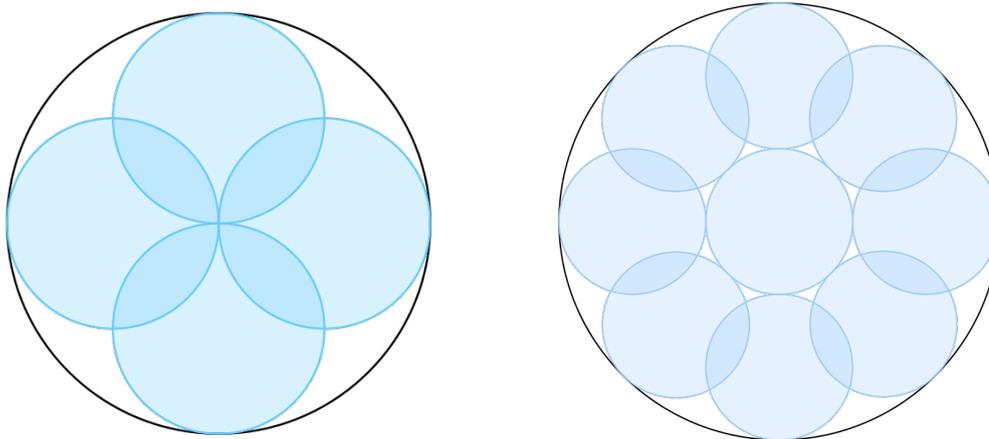
Si possono prevedere anche dei collegamenti interdisciplinari interessanti con le scienze e l'arte per quanto riguarda la presenza della circonferenza in natura e in opere d'arte e architettoniche.

Nell'ottica di un insegnamento verticale, utilizzando i dischi usati per questo laboratorio si può progettare un'attività per il primo biennio delle SSIIG che permette di avere un esempio concreto di una "crescita quadratica": l'area del cerchio cresce quadraticamente rispetto al raggio e non linearmente come la lunghezza della circonferenza.

Si può chiedere ai ragazzi di tracciare i cerchi di base dei dischi dal 2 al 5 e di tracciare all'interno di essi tanti cerchi come il disco uno quanti ne servono per ricoprire l'area.

3.6 Schede di lavoro

49



Vengono riportate le immagini del disco 2 e 3 dalle quali si può notare che servono rispettivamente 4 e 9 cerchi corrispondenti al disco 1. Infatti i pezzi nei quali si accavallano sono in ugual numero ai pezzi vuoti e si può stimare che servono per colmarli. Quindi utilizzando gli strumenti dell'algebra gli studenti possono fare anche una verifica formale.

$$A_{\text{cerchio } 2} = 4A_{\text{cerchio } 1} = 4\pi = 2^2\pi = r^2\pi$$

$$A_{\text{cerchio } 3} = 9A_{\text{cerchio } 1} = 9\pi = 3^2\pi = r^2\pi$$

Generalizzando e considerando un disco di raggio r e il disco di raggio doppio si ha

$$A_{\text{cerchio } 2r} = 4A_{\text{cerchio } r} = 4r^2\pi$$

Con una classe di studenti del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado si può anche farne una dimostrazione. Si considera un cerchio di raggio r uno di raggio kr e ricordando che l'area del cerchio di raggio r è πr^2 si ottiene

$$A_{\text{cerchio } kr} = \pi(kr)^2 = \pi k^2 r^2 = k(\pi r^2) = k^2 A_{\text{cerchio } r}.$$

Si può inoltre far disegnare sul piano cartesiano i dati ottenuti. Si avrà così il grafico della parabola $y = \pi r^2$ che rappresenta la crescita quadratica e mette in evidenza quanto velocemente cresce l'area rispetto al raggio.

3.6 Schede di lavoro

Vengono riportate di seguito le schede di lavoro che vengono consegnate ai ragazzi (una copia a testa) che servono per guidarli nello svolgimento dell'attività. Inoltre viene allegato anche il foglio A3 prestampato che gli studenti utilizzano per incollare le strisce di carta (per una sua visione in formato originale si veda gli allegati a fine tesi).