Capitolo 5

Le cifre di Pi-greco

In questo capitolo vengono descritte le attività e le sperimentazioni dei laboratori sulle cifre di Pi-greco.

5.1 Le cifre di Pi-greco versione per la SSIG

5.1.1 Introduzione

Con questo laboratorio si vuole stimare per eccesso e per difetto Pi-greco con il fine di poter trarre delle conclusioni sulle prime due cifre decimali di π per poi discutere la natura di questo numero. Lavorando quindi con dei modellini che rappresentano un quarto di cerchio che viene ricoperto di palline e poi di quadretti via via più piccoli, viene calcolata una stima per eccesso e per difetto dell'area del cerchio. Utilizzando poi tale stima si ottiene una stima per difetto e per eccesso di π che permette di fare delle conclusioni sulle cifre decimali di π e sulla natura di tale numero.
Con questo laboratorio, oltre agli obbiettivi già elencati, si vogliono perseguire anche degli obbiettivi trasversali tra i quali sviluppare strategie di conto, lavorare con i numeri decimali e i confronti tra di essi e molti altri già elencati in precedenza nell'introduzione del laboratorio sulla lunghezza della circonferenza 3.1.
L'idea di utilizzare delle palline per ricoprire il quarto di cerchio mi è venuta durante il workshop sulla circonferenza e il cerchio [2]. In questa occasione infatti la professoressa Michela Bonetti ha proposto di appoggiare sopra un disegno di un quarto di cerchio inscritto in un quadrato dei chicchi di riso per stimare π. Ho quindi pensato di utilizzare delle palline per le pistole ad aria compressa, dato che distribuire i chicchi di riso in modo uniforme è molto difficile. Ho poi costruito un modellino di un quarto di cerchio che potesse contenere le palline evitando di farle uscire dai bordi (si veda la foto nella sezione 5.1.2)

L'idea di utilizzare invece dei quadrati sempre più piccoli è nata leggendo le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo di istruzione, nelle quali viene detto che lo studente alla fine delle scuole medie dovrebbe essere in grado di stimare per eccesso e per difetto l'area di una figura delimitata anche da linee curve. Questo laboratorio infatti approfondisce o introduce, nel caso gli studenti non l'abbiano visto precedentemente, il concetto di stima dell'area per eccesso e per difetto.

5.1.2 Descrizione del laboratorio

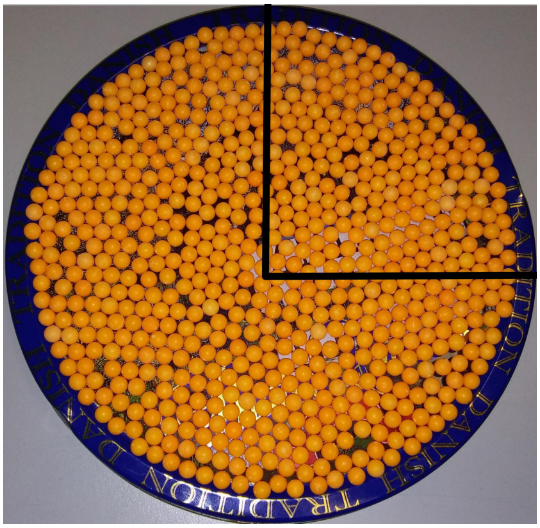
Durata minima: 4 ore.
Anche in questo caso la durata del laboratorio che viene indicata è da intendersi come una stima dato che dipenderà dall'insegnante scegliere se e quali punti dell'attività approfondire. Inoltre il tempo di esecuzione dipende da molti altri fattori tra i quali il livello della classe, l'ambiente di lavoro che si instaura e l'orario scolastico di cui si dispone (alle prime ore i ragazzi sono sicuramente più attivi che nelle ultime).

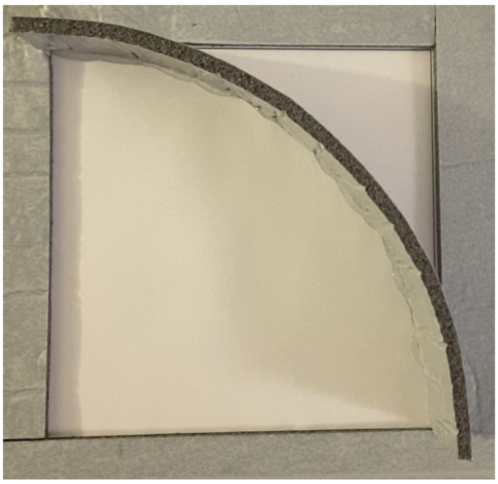
Collocazione nel curricolo
Questo laboratorio è rivolto alle classi terze della scuola secondaria di primo grado ed è una possibile continuazione dell'attività presentata precedentemente sull'area del cerchio. Questa attività si può proporre quando lo studente non conosce ancora il valore di π oppure come approfondimento su tale numero, supponendo comunque che abbia già trattato la formula per il calcolo dell'area del cerchio.

Le cifre di Pi-greco in sintesi
Questo laboratorio è composto di tre fasi. Nella prima fase, con l'utilizzo di un modellino che rappresenta un quarto di cerchio, viene calcolata una stima di π stimando l'area del cerchio, contando il numero di palline in esso contenute. Nella seconda fase si passa al calcolo di una stima per difetto e per eccesso di π contando il numero di quadrati contenuti in un quarto di cerchio e il numero di quelli che lo ricopre. Rimpicciolendo i quadrati si ottengono delle stime sempre più precise che permettono di fare delle conclusioni sulle cifre decimali di π grazie anche all'utilizzo di un file Geogebra. Nella parte finale dell'attività viene invece narrata la natura di π.

FASE 1: La prima cifra di Pi greco

Questa prima fase si apre con una breve spiegazione dell'insegnante nella quale viene fatto notare che non conoscendo il valore di π non è possibile calcolare l'area del cerchio utilizzando la formula. Per trovare una stima di π siamo dunque costretti a trovare dei metodi alternativi alla formula per avvicinarsi al valore dell'area del cerchio. A tal fine viene suggerito di considerare una circonferenza di raggio 10 cm e di riempirla di palline come mostra la figura. La zona coperta dalla proiezione sul cerchio delle palline si avvicina molto alla superficie del cerchio. Per avere una stima dell'area del cerchio bisognerà quindi contare il numero di palline che servono per ricoprirlo. Viene quindi consegnato ai gruppi un modellino che rappresenta un quarto del nostro cerchio. I ragazzi devono riempirlo di palline facendo in modo che non si sovrappongano e contare il numero di palline contenute nel quarto del cerchio per poi calcolare il numero di palline contenute circa all'interno del cerchio.





Con una discussione a classe intera viene fatto osservare che contando solo il numero di palline in un quarto di cerchio otteniamo un valore approssimato di palline

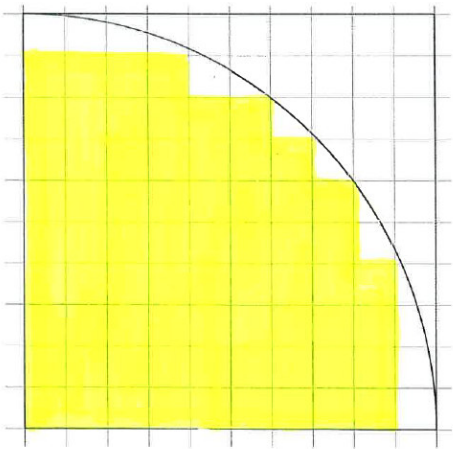
contenute nel cerchio, questo perché le palline che passano per i raggi del settore circolare corrispondente al quarto di cerchio non vengono contate. Viene anche notato che non è conveniente dividere il cerchio in un numero maggiore di parti uguali per evitare di aumentare l'errore.
Una volta calcolato il numero approssimato di palline contenute all'interno del cerchio viene detto ai ragazzi a quanto corrisponde circa l'area di una pallina in cm^2 e viene chiesto loro di calcolare l'area della zona coperta dalle palline e di riportare i risultati ottenuti in una tabella riassuntiva.
Dopo aver confrontato i risultati ottenuti dai vari gruppi viene chiesto ai ragazzi se sono d'accordo che l'area del cerchio è circa uguale all'area della zona coperta dalle palline. Grazie a questa domanda gli viene suggerito un metodo per stimare π: basterà dividere l'area della zona coperta dalle palline per 100 che è il raggio della circonferenza elevato alla seconda dato che

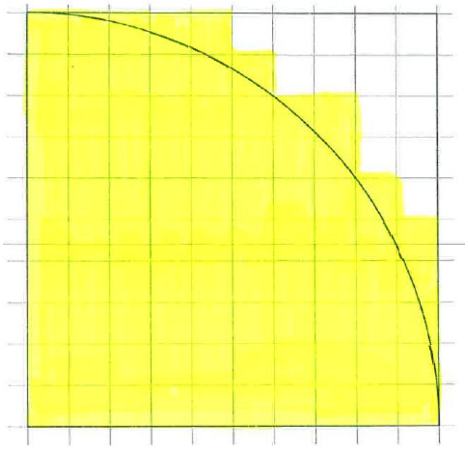
$$\pi * 100\ cm^2 \cong area\ zona\ coperta\ dai\ pallini.$$

Viene fatto notare che le unità di misura spariscono e che quindi possiamo uguagliare i valori numerici perché sono grandezze omogenee. Se avessimo avuto invece $1l = 100cl$ non avremmo potuto uguagliare l'1 con il 100. Si fa anche osservare che π non ha quindi unità di misura, questo perché è un numero.

FASE 2: Le altre cifre di Pi greco

Quest'attività si apre con una discussione a classe intera per cercare un metodo alternativo alle palline per ricoprire l'area del cerchio in modo tale da ridurre gli spazi vuoti lasciati dalle palline. Dopo aver notato che conviene provare ad utilizzare dei quadrati, viene osservato che in questo caso non avremmo più buchi interni dato che i quadrati si accostano perfettamente ma, avremmo degli spazi vuoti in prossimità dell'arco di circonferenza. Si considera inizialmente un quarto di cerchio di raggio 10 cm disegnato in un foglio quadrettato con quadretti di lato 1 cm. Viene quindi chiesto ai ragazzi di tracciare la linea che delimita l'insieme dei quadretti interamente contenuti in un quarto di cerchio e quella che delimita i quadretti necessari per ricoprire il cerchio, di tratteggiare la zona trovata e contare i quadretti nei due casi.



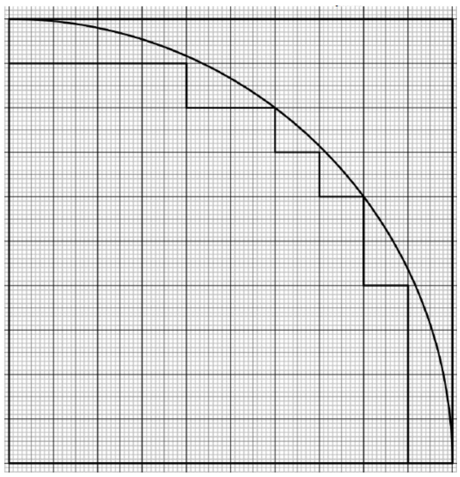


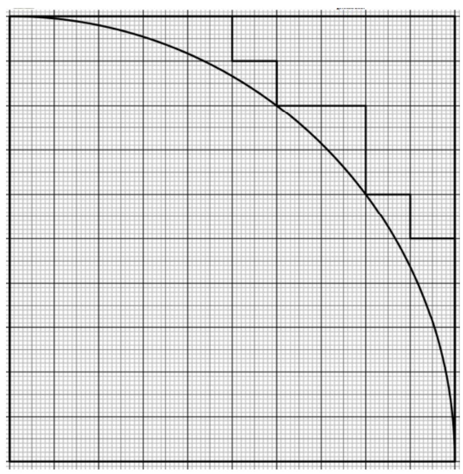
A differenza dell'attività fatta con le palline in questo caso si vuole calcolare un valore per eccesso e uno per difetto dell'area del cerchio per poter "intrappolare" π tra due valori che ci serviranno per fare delle conclusioni sulle cifre del nostro numero. Una volta contati i quadretti i ragazzi devono calcolare una stima dell'area del cerchio per eccesso e per difetto trasformando il numero di quadretti contanti in cm^2, per poi calcolare una stima di π per eccesso e per difetto. Vengono infine riportati i risultati dei conti fatti nella seguente tabella e nella prima riga della tabella presente nel foglio colorato (si veda nella sezione "Schede di lavoro" 5.1.8).

Quadretto grande in cm^2	Numero di quadretti dentro il cerchio	Area per difetto del cerchio (cm^2)	Numero di quadretti per ricoprire il cerchio	Area per eccesso del cerchio (cm^2)	Area con formula del cerchio (cm^2)

Con una discussione a classe intera vengono confrontati i risultati ottenuti dai vari gruppi e viene notato che il risultato per difetto non è soddisfacente perché con le palline avevamo ottenuto una stima migliore di π. Si sceglie quindi di rimpicciolire i quadretti.
Da questo momento dell'attività alcuni gruppi conteranno solo i quadretti contenuti e altri solo quelli che ricoprono il quarto di cerchio. Viene quindi consegnata la continuazione delle schede di lavoro nelle quali i ragazzi trovano una figura del quarto di cerchio ingrandita in scala su un foglio quadrettato con tre tipi di quadretti: quelli grandi di lato reale 1 cm, quelli medi di lato reale 0,5 cm e quelli piccoli di lato reale 0,1 cm. Nella figura viene inoltre riportata anche la linea che delimitava i quadretti di lato reale 1 cm contenuti o che ricoprono il quarto del

cerchio a seconda dei gruppi. Le figure nelle schede sono le seguenti.



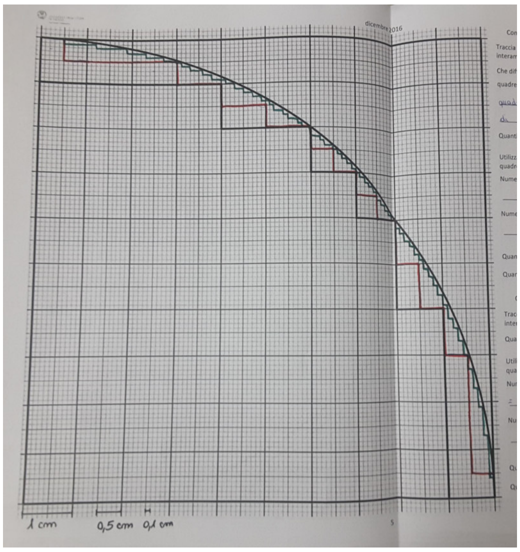


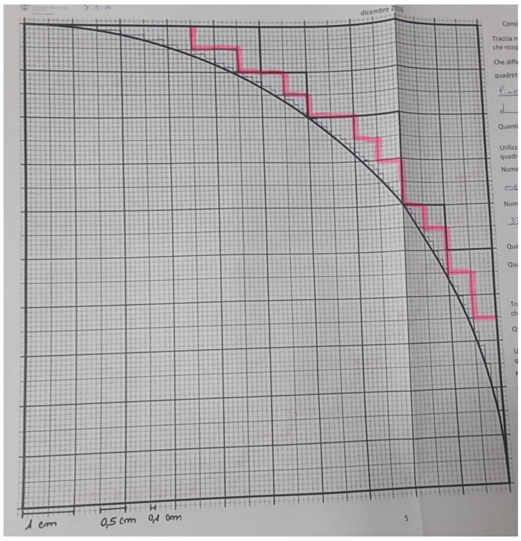
Si è scelto di far contare solamente una serie di quadretti per gruppo per evitare che i tempi si dilunghino troppo dato che con il rimpicciolimento dei quadretti, e quindi con l'aumentare del numero, aumentano le difficoltà di conteggio ed è richiesto l'utilizzo di una strategia che viene suggerita con delle domande nelle istruzioni da seguire. Viene comunque lasciato come esercizio per casa il conteggio dell'altra serie di quadretti. Inoltre si è deciso di inserire l'immagine del quarto di cerchio direttamente nelle schede di lavoro (stampandole quindi in formato A3) mettendo a fianco le istruzioni da seguire, per evitare un numero eccessivo di fogli a disposizione del ragazzo che rischierebbero di confonderlo e di non fargli capire quel che deve fare. Infine si è scelto di fornire la figura del quarto di cerchio ingrandita in scala per permettere una visione più chiara dei quadretti più piccoli.

Viene quindi lasciato del tempo ai gruppi per delimitare e contare i quadretti medi e piccoli. L'insegnante, girando per i gruppi, discute qual è la strategia migliore per contare i quadretti:

- per contare i quadretti medi interamente contenuti conviene trasformare il numero di quadretti grandi contati in precedenza in quadretti medi (in un quadretto grande ci stanno 4 quadretti medi), e aggiungere a tale valore il numero di quadretti medi compresi tra la linea che delimitava i quadretti grandi e quella che delimita i quadretti medi;

- per contare i quadretti medi che ricoprono il quarto di cerchio conviene trasformare il numero di quadretti grandi contati in precedenza in quadretti medi (in un quadretto grande ci stanno 4 quadretti medi), e sottrarre a tale valore il numero di quadretti medi compresi tra la linea che delimitava i quadretti grandi e quella che delimita i quadretti medi.





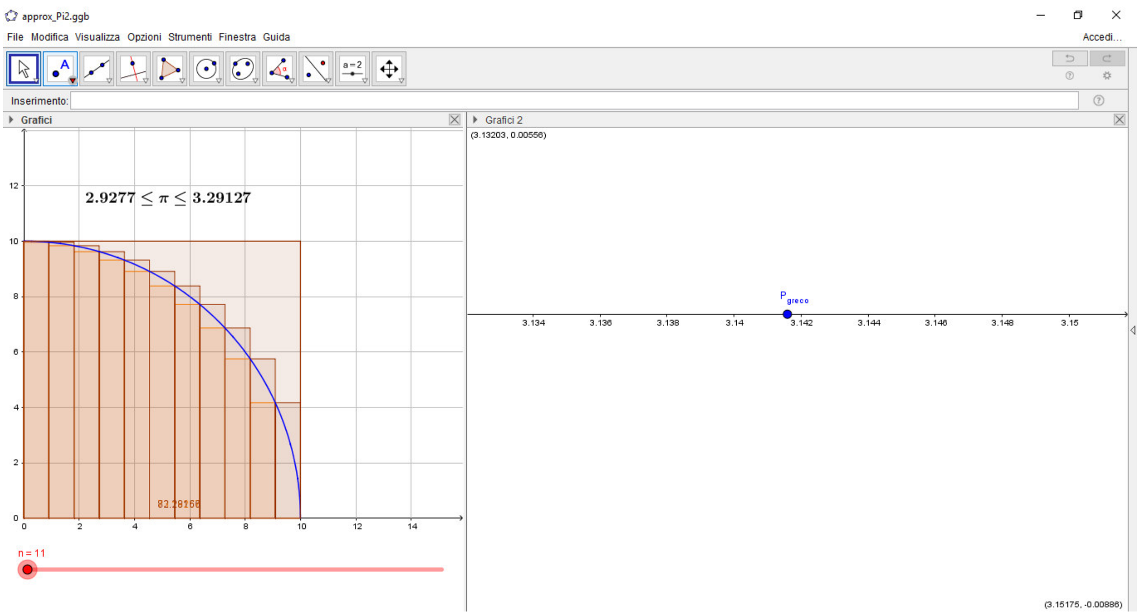
La scoperta della strategia viene suggerita anche dalle domande presenti nelle schede. Viene prima chiesto di osservare che differenza c'è tra la linea che delimitava i quadretti grandi e quella che delimita i quadretti medi e poi di dire il numero di quadretti medi che ci stanno dentro un quadretto grande. Alla fine del conteggio viene inoltre chiesto ai ragazzi di spiegare come hanno fatto a contare i quadretti medi per due motivi: il primo perché se non hanno utilizzato una strategia efficiente per contarli hanno modo di rifletterci ulteriormente prima di passare al conteggio di quelli piccoli, che diventa molto complicato senza l'utilizzo di una strategia; il secondo per abituare i ragazzi ad esprimersi e spiegare i passaggi fatti con un linguaggio appropriato.
Quando tutti i gruppi hanno finito di contare i quadretti e di calcolare la corrispondente area per difetto (o per eccesso) del cerchio, vengono condivisi i risultati ottenuti completando alla lavagna la seguente tabella.

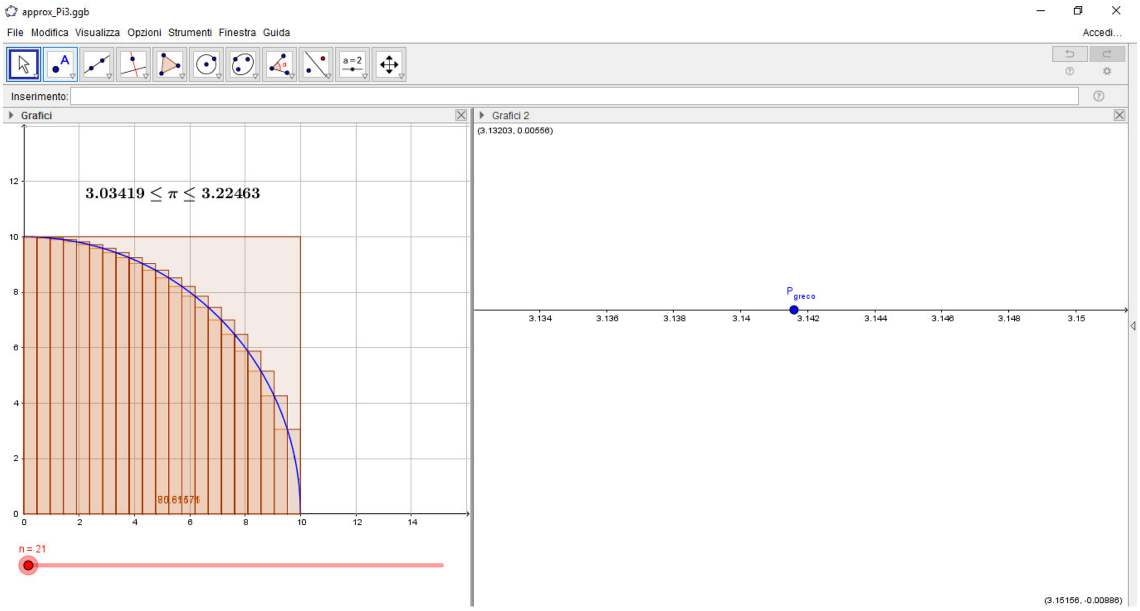
Quadretto	Quadretto in cm^2	Numero di quadretti dentro il cerchio	Area per difetto del cerchio (cm^2)	Numero di quadretti per ricoprire il cerchio	Area per eccesso del cerchio (cm^2)	Area con formula del cerchio (cm^2)
Grande						
Medio						
Piccolo						

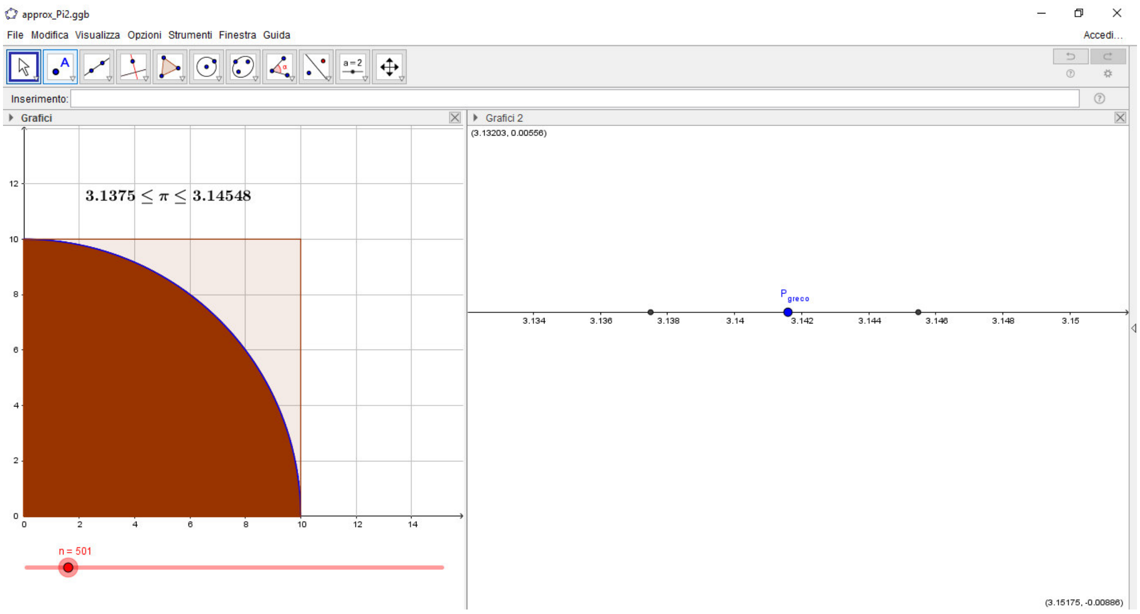
Servendosi dei dati di questa tabella gli studenti devono finire di completare il foglio colorato. Nella seconda tabella del foglio colorato dovrebbero aver ottenuto approssimativamente i seguenti valori.

2.76	2.96	3.10	π	3.18	3.31	3.44

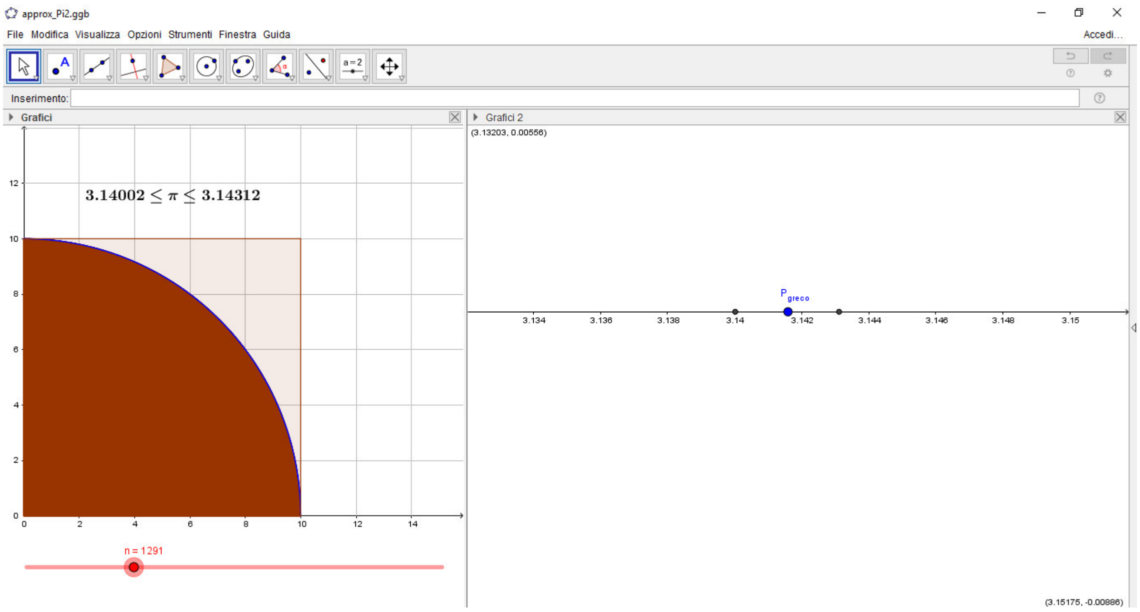
Con una discussione a classe intera si conclude che la prima cifra decimale di π deve essere uguale a 1 dato che è compreso tra i valori 3.10 e 3.18 e che per scoprire la seconda cifra decimale bisogna rimpicciolire ulteriormente i quadretti. In questo caso ci facciamo aiutare da un file preparato con il software di geometria dinamica Geogebra. In questo file vengono considerati dei rettangoli contenuti e che ricoprono il quarto di cerchio invece che dei quadrati e, con uno slider, si possono aumentare il numero di divisioni del raggio e quindi il numero dei rettangoli. Sono inoltre indicati i valori per eccesso e per difetto di π corrispondenti alla divisione considerata. Infine sulla retta dei numeri reali vengono visualizzati con un punto i valori per eccesso e per difetto di π e il valore di π "vero" cioè quello approssimato che utilizza Geogebra.
Vengono prima fatti vedere i casi delle divisioni considerate con i quadretti grandi, medi e piccoli facendo notare che i pallini corrispondenti alle cifre di π per eccesso e per difetto nella retta dei numeri reali si avvicinano sempre di più al valore di π.







Infine viene chiesto ai ragazzi di bloccare l'insegnante, che fa scorrere lo slider, nel momento in cui anche la seconda cifra decimale viene scoperta.



I ragazzi scoprono in questo modo che la seconda cifra decimale di π è 4. Viene fatto notare anche che i valori per eccesso e per difetto di π riportati da Geogebra hanno 5 cifre decimali perché abbiamo scelto noi quante cifre decimali volevamo e che quindi l'approssimazione non si ferma a 5 cifre decimali.

FASE 3: Possiamo calcolare tutte le cifre di π?

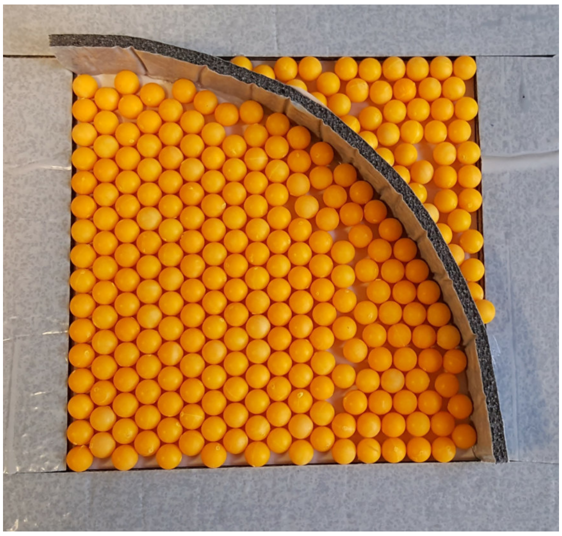
Questo laboratorio si conclude con un'attività che ha lo scopo di far capire che π è un numero irrazionale non periodico. Viene chiesto ai ragazzi secondo loro fino a quando posso continuare a rimpicciolire i quadretti per ottenere tutte le cifre di Pi greco. Dopo aver fatto le loro ipotesi, per rispondere a questa domanda viene mostrato un estratto di un episodio di Star Trek nel quale un computer sfuggito al controllo minaccia di distruggere la nave stellare sulla quale lavorano i protagonisti della serie. L'equipaggio per sgominare il computer gli domanda di calcolare l'ultima cifra di π. Il computer dopo aver urlato "No!!!" smette di funzionare. I ragazzi scoprono in questo modo che non è possibile calcolare l'ultima cifra di π. Il perché viene svelato dall'insegnante che spiega che π è un numero con infinite cifre decimali non periodico e che i numeri di questo tipo vengono chiamati irrazionali. Tutti i valori di π che si trovano sono quindi delle approssimazioni e, se nei calcoli si utilizza al posto di π uno di questi valori approssimati, allora avranno un risultato approssimato, se invece vogliono un risultato esatto devono lasciare indicato il simbolo π. A questo punto viene fatta una parentesi sulla storia di π e sul numero di cifre decimali conosciute fino ad oggi che sono talmente tante che, se inseriamo la nostra data di nascita in un programma in internet per la ricerca all'interno delle cifre decimali di π, la probabilità che la trovi è molto alta. I ragazzi possono quindi fare delle prove.

5.1.3 Materiali

- Schede fornite dall'insegnante presenti nella sezione 5.1.8 (una copia per ragazzo);
- foglio colorato con tabelle riassuntive presente in allegato (una copia per ragazzo);
- kit contenente un modellino che rappresenta un quarto di cerchio di raggio 10 cm, una confezione di palline per pistole ad aria compressa, dei piattini di plastica (uno per gruppo);
- file Geogebra che stima con il metodo dei plurirettangoli il valore di π per eccesso e per difetto all'aumentare delle divisioni del raggio;
- video di un estratto di un episodio di Star Trek;
- sito internet che cerca la data di nascita all'interno delle cifre di π
- calcolatrice, colori e righello.

5.1.5 Osservazioni sul calcolo dell'area di una pallina

Nella fase 1 di questa attività si è scelto di dare l'area di una pallina in cm^2 invece di lasciarla calcolare ai ragazzi perché i passaggi per arrivare a calcolarsela da soli possono risultare non così banali per dei ragazzi delle SSIG. Se la classe lo permette si possono portare gli studenti a fare il seguente ragionamento. Dato un cerchio di raggio r la sua area equivale a moltiplicare il valore di π per l'area di un quadrato costruito sul raggio della circonferenza:



$$A_{cerchio} = \pi A_{quadrato}$$

Riempiendo di palline il quadrato si ottiene che

$$\frac{A_{quadrato}}{numero\ palline_{quadrato}} = A_{pallina}$$

Osserviamo anche che al fine di stimare un valore di π non è rilevante conoscere il raggio della circonferenza e quindi il lato del quadrato, infatti

$$numero\ palline_{cerchio} * A_{pallina} = A_{cerchio}$$

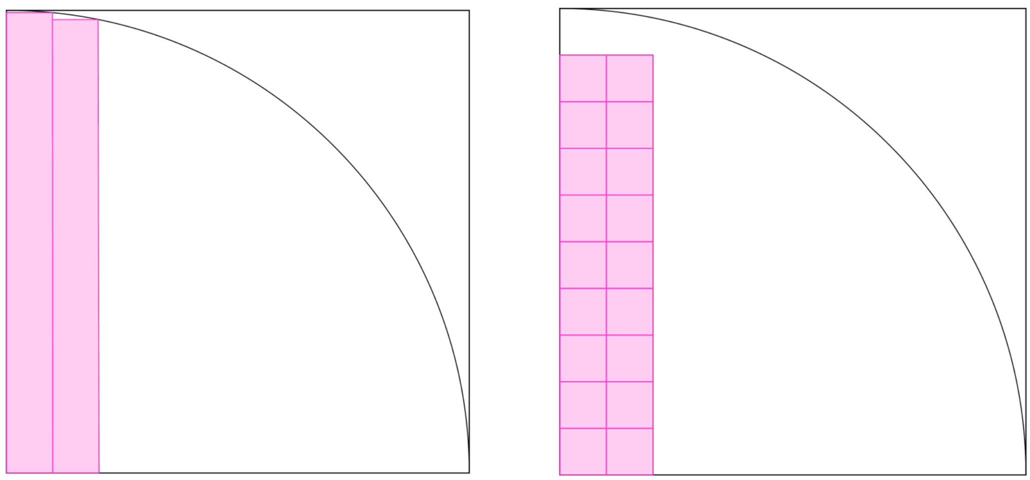
e di conseguenza

$$\pi = \frac{numero\ palline_{cerchio} * \frac{A_{quadrato}}{numero\ palline_{quadrato}}}{A_{quadrato}} = \frac{numero\ palline_{cerchio}}{numero\ palline_{quadrato}}.$$

Come si può osservare da quest'ultima relazione per stimare π basta fare il rapporto tra il numero di palline dentro il cerchio e il numero di palline dentro il quadrato e quindi tale rapporto non dipende dal raggio.

5.1.6 Osservazioni sull'utilizzo dei rettangoli nel file Geogebra

Nel file Geogebra che viene mostrato ai ragazzi a conclusione della fase 2 utilizza rettangoli al posto dei quadratini. L'insegnante deve essere quindi consapevole del fatto che stiamo in questo caso considerando un'approssimazione dell'area per eccesso e per difetto migliore rispetto al ricoprimento con i quadrati come si può osservare dalla figura riportata.



Questo perché riempiendo la figura con dei quadratini siamo limitati dall'altezza del quadrato: dobbiamo fermarci quando non è più possibile inserire un altro quadrato. Nel caso dei rettangoli invece, solo la base del rettangolo è fissa mentre per altezza possiamo prendere l'altezza massima (o minima nel caso per eccesso) che ci permette di ottenere un rettangolo interamente contenuto (o che ricopre completamente).

5.1.7 Possibili approfondimenti

Come approfondimento dell'argomento l'insegnate può prevedere una lezione che descrive il metodo dei poligoni inscritti e circoscritti che utilizzò Archimede per il calcolo di una stima di π (si veda 1). Nella spiegazione di tale metodo il docente può utilizzare un file Geogebra tipo quello del quale vengono riportate le immagini.