5.2 Le cifre di Pi-greco versione per il primo biennio della SSIIG

5.2.1 Introduzione

Questo laboratorio ripropone l'attività con in quadratini via via più piccoli per stimare per eccesso e difetto π ma con delle adeguate modifiche che permettono una trattazione più approfondita dell'argomento e quindi più adatta per il primo biennio delle scuole superiori. Le motivazioni che hanno spinto a progettare un'attività su questo argomento anche per il biennio delle scuole secondarie di secondo grado sono molteplici. Innanzitutto per sviluppare l'idea di una didattica verticale che ripete gli argomenti ma soprattutto i metodi in diversi momenti della carriera scolastica con vari gradi di approfondimento. Questo laboratorio è utile poi per chiarire eventuali dubbi e approfondire alcuni aspetti della figura cerchio. Può essere inoltre la prima occasione che i ragazzi hanno per vedere la stima dell'area di una figura "dall'alto e dal basso" e per introdurre l'idea che sta alla base della definizione di area che ritroveranno all'ultimo anno con lo studio degli integrali. Infine con questo laboratorio si acquisisce anche una prima idea intuitiva di convergenza verso un numero e quindi di limite.

5.2.2 Descrizione del laboratorio

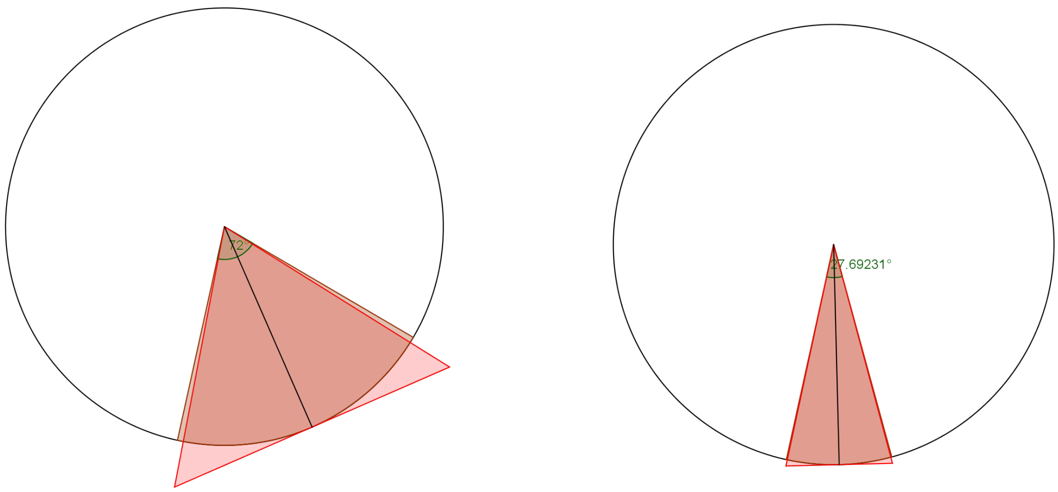
Durata minima: 3 ore.
Anche in questo caso la durata del laboratorio che viene indicata è da intendersi come una stima.

Collocazione nel curricolo
Questo laboratorio è rivolto alle classi del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Esso si può proporre dopo lo studio dei numeri irrazionali oppure come introduzione a tale argomento.

Le cifre di Pi-greco SSIIG in sintesi
Il laboratorio proposto è composto di quattro fasi. La prima fase serve per fare alcune riflessioni sulla formula per calcolare l'area del cerchio mentre le altre tre rispecchiano quelle presenti nel laboratorio per le SSIG con alcune modifiche.

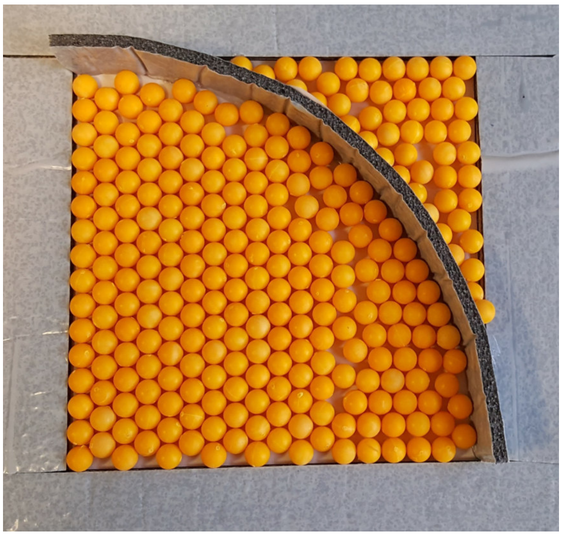
FASE 0: Prima di cominciare

In questa prima fase viene richiesto ai ragazzi di scrivere la formula per calcolare l'area del cerchio e viene chiesto loro di spiegare se sanno come si arriva a tale formula. Dopo averli lasciati discutere tra di loro per qualche minuto con una discussione a classe intera vengono raccolte le risposte date. Nel caso non si sia arrivati ad una risposta soddisfacente viene consegnata loro la spugna divisa in 12 spicchi e viene chiesto di ricomporla a formare approssimativamente un parallelogramma (si veda attività sull'area del cerchio 4). Dopo aver scritto alla lavagna i passaggi che portano alla formula dell'area del cerchio, passando per quella dell'area del parallelogramma, viene fatto notare che stiamo supponendo che la base del parallelogramma sia un segmento quando invece è formato dall'unione di piccoli archi di circonferenza. Stiamo cioè sostituendo gli spicchi della circonferenza con dei triangoli che hanno la base lunga quanto l'arco della circonferenza e l'altezza uguale al raggio, aumentando però il numero di spicchi il triangolo assomiglia sempre di più al settore circolare. Per chiarire questo concetto viene mostrato un file Geogebra che fa vedere uno spicchio di circonferenza e il triangolo con cui lo stiamo approssimando e con l'uso dello slider si mostra che rimpicciolendo lo spicchio assomiglia sempre di più al triangolo. (Si veda la nota sulle approssimazioni fatte 1) Se la classe lo permette si può ulteriormente indagare questo aspetto attraverso gli approfondimenti presentati nella sezione 5.2.5.



FASE 1: La prima cifra di Pi greco

Il laboratorio continua chiedendo ai ragazzi di aiutare i loro compagni delle medie a stimare il valore di π. Si è scelto di riferire l'esercizio agli alunni della scuola media a loro più vicina per rendere più interessante e stimolante il problema.

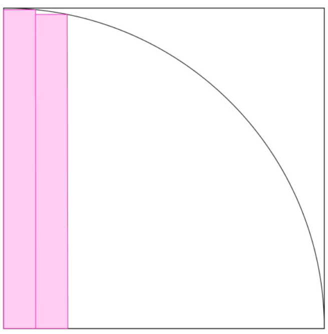


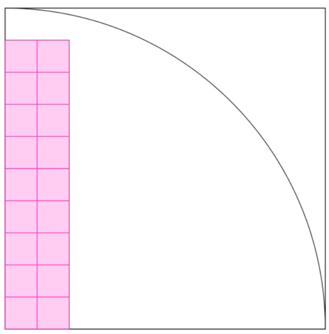
Viene spiegato loro che gli alunni della scuola secondaria di primo grado di Pergine hanno appena scoperto che per calcolare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio devono stimare il valore di π, e che per farlo devono trovare dei metodi alternativi alla formula per avvicinarsi al valore dell'area del cerchio. Hanno quindi riempito di palline un quarto di circonferenza di raggio 10 cm inscritto in un quadrato di lato uguale al raggio e hanno scoperto che in media nel quarto di cerchio ci stanno 241 palline, mentre nella parte esterna al quarto di cerchio ce ne sono mediamente 67. Viene detto loro che arrivati a questo punto i compagni delle medie non sanno più come continuare e che devono aiutarli a stimare l'area del quarto di cerchio. Lavorando in gruppo devono quindi, prima calcolare l'area che ricopre approssimativamente una pallina, per poi moltiplicare tale valore per il numero di palline contenute nel quarto di cerchio. In alternativa possono calcolare direttamente il valore approssimato dell'area del quarto di cerchio mediante una proporzione. A questo punto viene chiesto loro di calcolare un valore approssimato di π e viene suggerito di ricordarsi che i ragazzi delle medie conoscono già l'area del cerchio. Basterà quindi moltiplicare l'area approssimata del quarto di cerchio per 4 per poi dividere tale valore per il raggio elevato alla seconda per ottenere la stima richiesta.
Con una discussione a classe intera si riflette sulla necessità o meno di conoscere la lunghezza del raggio del cerchio per stimare π e si scopre che, non è rilevante ai fini del problema perché basta calcolare il rapporto tra il numero di palline contenute nel cerchio e quelle contenute nel quadrato. (Si veda le Osservazioni sul calcolo dell'area di una pallina 5.1.5)

FASE 2: Le altre cifre di Pi greco

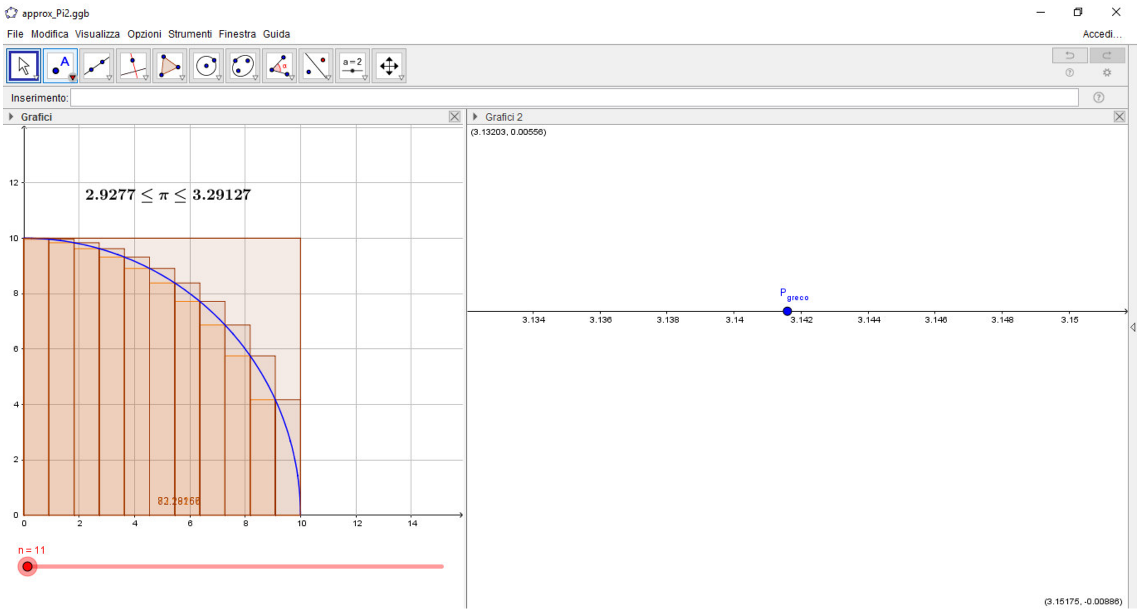
Questa fase del laboratorio è molto simile a quella del laboratorio sulle cifre di Pi greco per le scuole medie. Questa similitudine è motivata dal fatto che questa parte del laboratorio è molto ricca di aspetti che con dei ragazzi del primo biennio della SSIIG si possono approfondire meglio. Facciamo quindi un breve riassunto mettendo in evidenza le differenze e rimandiamo alla descrizione fatta in precedenza 5.1.2. Si incomincia l'attività con una discussione a classe intera per cercare

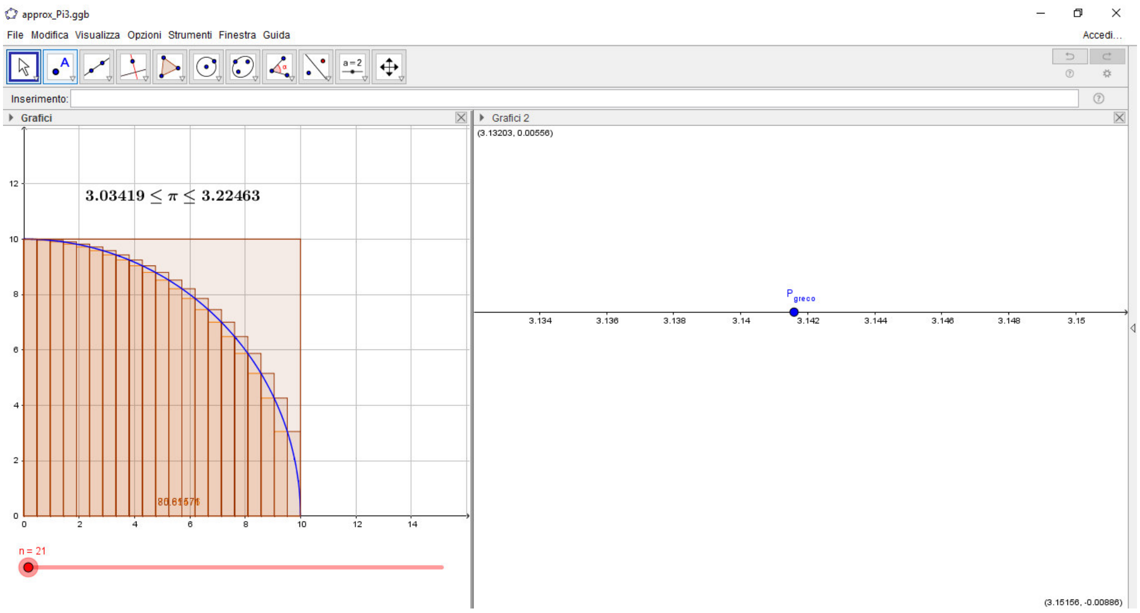
un metodo alternativo alle palline per ricoprire l'area del cerchio e si sceglie di utilizzare dei quadretti. Si considerano inizialmente quadretti di lato 1 cm e viene chiesto ai ragazzi di tracciare la linea che delimita l'insieme dei quadretti interamente contenuti in un quarto di cerchio e quella che delimita i quadretti necessari per ricoprire il cerchio, di tratteggiare la zona trovata e contare i quadretti nei due casi. Con una discussione vengono confrontati e esaminati i risultati ottenuti e si sceglie quindi di rimpicciolire i quadretti. Da questo momento dell'attività alcuni gruppi conteranno solo i quadretti contenuti e altri solo quelli che ricoprono il quarto di cerchio. Viene quindi consegnata la continuazione delle schede di lavoro nelle quali i ragazzi trovano una figura del quarto di cerchio ingrandita in scala su un foglio quadrettato e la linea che delimitava i quadretti contenuti o che ricoprono il quarto del cerchio a seconda dei gruppi (le misure reali sono: il cerchio ha raggio 10 cm, i quadretti più grandi hanno lato 1 cm, quelli medi 0,5 cm e quelli piccoli 0,1 cm). Prima di lasciare che i ragazzi contino i quadretti si discutono a classe intera delle strategie di calcolo per evitare di dilatare troppo i tempi.
Quando tutti i gruppi hanno finito di contare i quadretti e di calcolare la corrispondente area per difetto (o per eccesso) del cerchio, vengono condivisi i risultati ottenuti completando alla lavagna una tabella riassuntiva. Servendosi dei dati di questa tabella devono finire di completare il foglio colorato. Con una discussione a classe intera si commentano i risultati ottenuti: si conclude che la prima cifra decimale di π deve essere uguale a 1 e che per scoprire la seconda cifra decimale bisogna rimpicciolire ulteriormente i quadretti. Viene anche fatta notare la differenza tra il valore ottenuto con le palline e quello ottenuto con i quadrettini. Mentre con le palline abbiamo calcolato una stima della prima cifra decimale di π con i quadratini abbiamo invece scoperto che la prima cifra decimale è proprio 1.
Viene quindi mostrato il file Geogebra preparato per la stima di π. Viene fatta precedere alla spiegazione del funzionamento del file una piccola discussione sulla differenza tra il considerare quadratini e rettangoli di base fissata e altezza variabile.
A tal fine viene proiettata la seguente figura

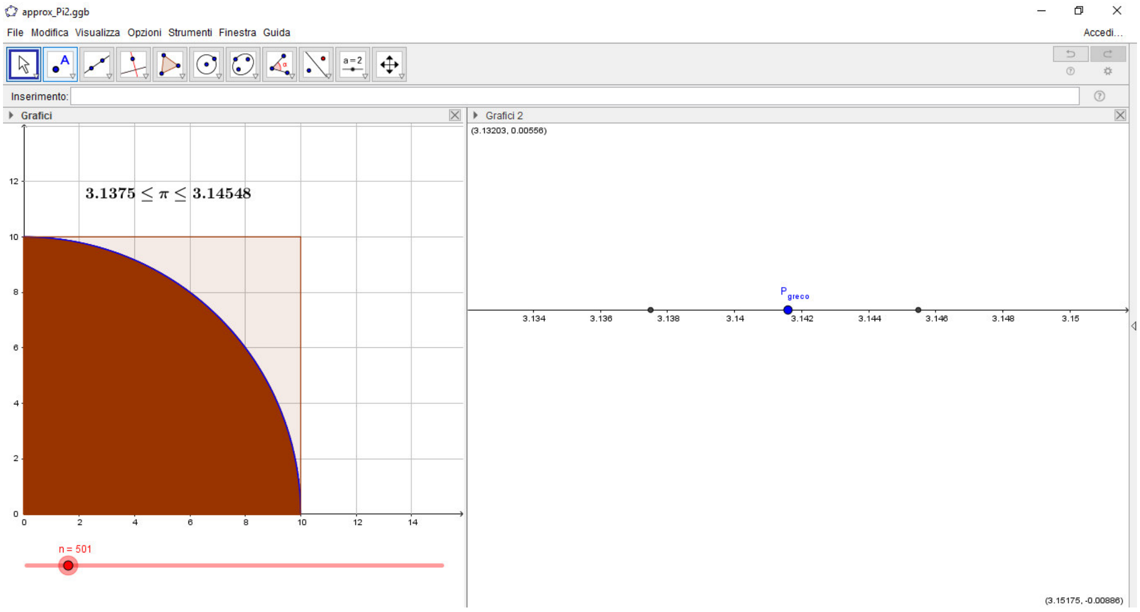




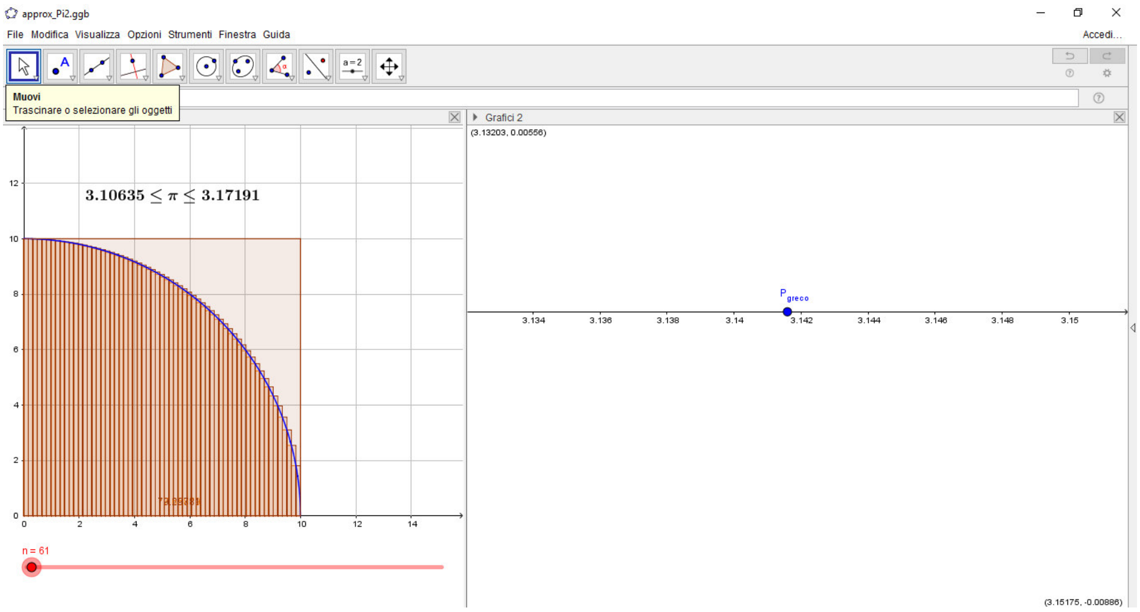
e viene chiesto secondo loro quale dei due disegni approssima meglio l'area del quarto di cerchio e perché. (Si veda l'osservazione sull'utilizzo dei rettangoli nel file Geogebra 5.1.6) Vengono quindi fatti vedere i casi che hanno lo stesso numero di divisioni del raggio di quelle considerate con i quadretti grandi, medi e piccoli facendo notare come i valori stimati per eccesso e per difetto di π siano migliori di quelli calcolati con i quadratini.



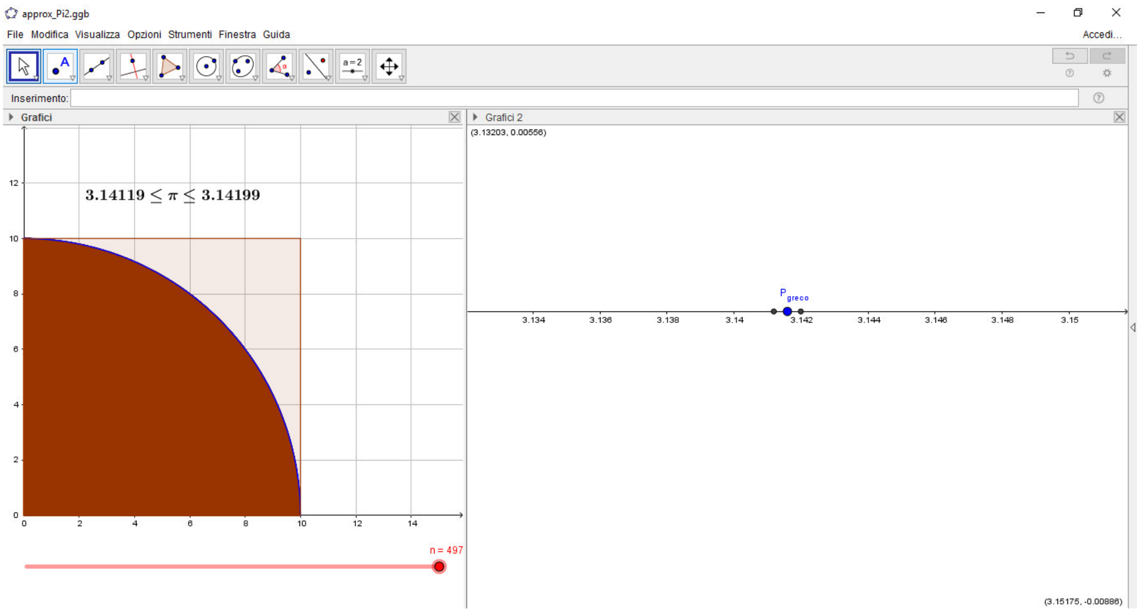




Per avere circa lo stesso valore calcolato con i quadretti piccoli con i rettangoli bastano 60 divisioni.



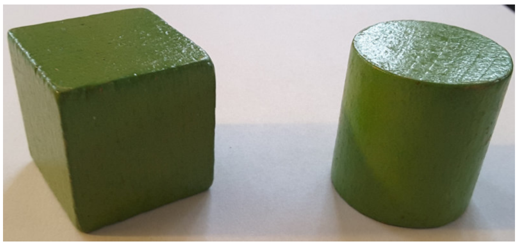
Si nota anche che i pallini corrispondenti alle cifre di π per eccesso e per difetto nella retta dei numeri reali si avvicinano sempre di più al valore di π aumentando il numero di divisioni. Infine viene chiesto ai ragazzi di bloccare l'insegnante, che fa scorrere lo slider, prima nel momento in cui anche la seconda cifra decimale viene scoperta e poi quando si arriva al valore della terza cifra. Si scopre così che $\pi \cong 3.141$



FASE 3: Possiamo calcolare tutte le cifre di π?

Anche questa fase del laboratorio è molto simile a quella del laboratorio sulle cifre di Pi greco per le SSIG. Facciamo anche in questo caso un breve riassunto mettendo in evidenza le differenze e rimandiamo alla descrizione fatta in precedenza 5.1.2. Dopo aver chiesto ai ragazzi fino a quando possiamo rimpicciolire i rettangoli e aver ascoltato le loro risposte, viene mostrato il video di Star Trek. Con una discussione a classe intera si osserva che non è possibile calcolare l'ultima cifra di π perché è un numero irrazionale.

L'attività si conclude lanciando agli studenti una sfida:



Archimede, per stimare l'area di figure curve, confrontava il peso della figura con il peso di una figura nota. Per stimare Pi greco applicando questo metodo avrebbe quindi utilizzato il seguente procedimento. Si sarebbe ricavato dallo stesso materiale un parallelepipedo a base quadrata e un cilindro con il diametro di base uguale al lato l del quadrato di base del parallelepipedo tali che l'altezza dei due solidi fosse uguale. Li avrebbe quindi pesati e avrebbe calcolato che

$$\pi = 4 * \frac{peso\ cilindro}{peso\ parallelepipedo}$$

Sai spiegare il perché si può applicare questo procedimento? Per avere un valore più preciso avrebbe allora potuto pesare oggetti di materiale diversi e poi fare la media di tutte le stime di π trovate.
Per rispondere a questa domanda gli studenti devono quindi ragionare sul volume dei due solidi

$$4 * \frac{peso\ cil}{peso\ paral} = 4 * \frac{volume\ cil * peso\ specifico}{volume\ paral * peso\ specifico} = 4 * \frac{area\ cerchio}{area\ quadrato} = \pi.$$

5.2.3 Materiali

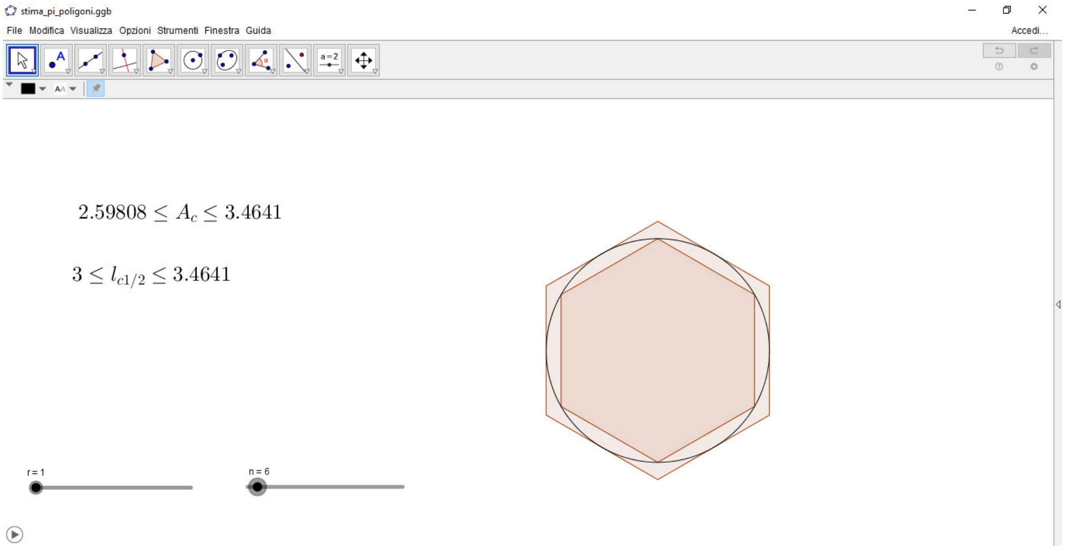
- Schede fornite dall'insegnante presenti nella sezione 5.2.6 (una copia per ragazzo);
- foglio colorato con tabelle riassuntive presente in allegato (una copia per ragazzo);
- kit contenente un panno di spugna vegetale da cucina tagliata a forma di cerchio e divisa in 12 spicchi uguali come quella dell'attività *Costruiamo l'arancia* sull'area del cerchio (uno per gruppo);
- file Geogebra che stima con il metodo dei plurirettangoli il valore di π per eccesso e per difetto all'aumentare delle divisioni del raggio;
- video di un estratto di un episodio di Star Trek;
- sito internet che cerca la data di nascita all'interno delle cifre di π
- calcolatrice, colori, forbici e righello.

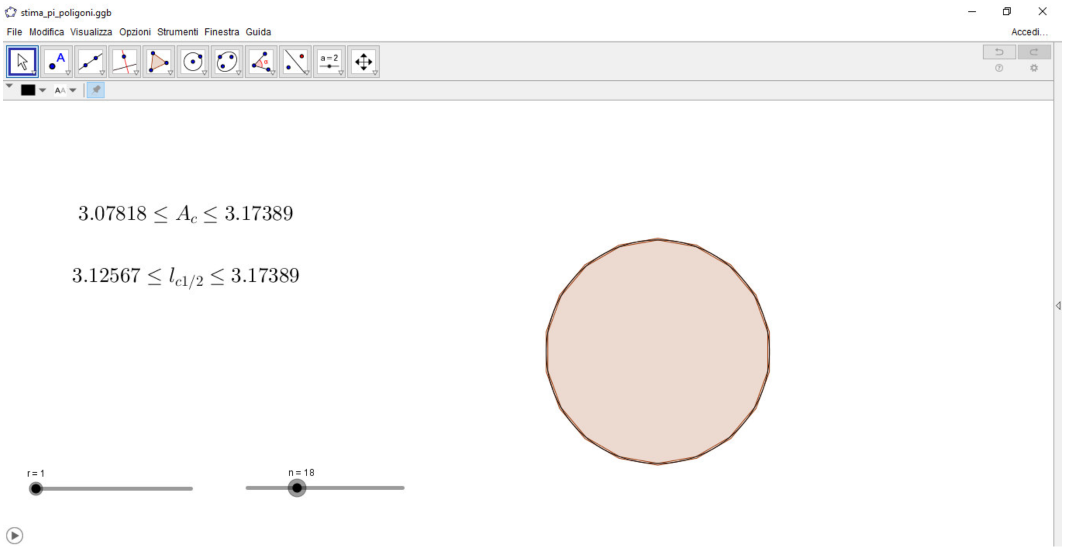
5.2.5 Possibili approfondimenti

Tale attività dà la possibilità all'insegnante di fare i seguenti approfondimenti:

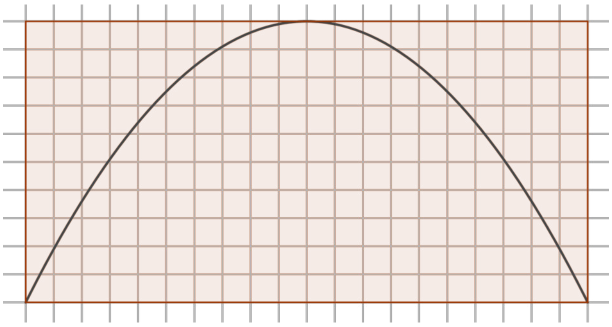
- **Stima di π con il metodo di esaustione di Archimede:** con l'utilizzo di un file Geogebra si può illustrare il metodo di esaustione utilizzato da

Archimede per stimare il valore di π. In alternativa, si può far costruire direttamente dai ragazzi tale file facendo prima una breve lezione in cui l'insegnate spiega il metodo applicato da Archimede.(Per una descrizione di questo metodo si veda il capitolo 1)





- **Stima dell'area del mezzo segmento parabolico:**si può prevedere un'attività che stimi l'area per eccesso e per difetto con il metodo dei quadratini su un segmento di parabola. In questo caso bisogna inscrivere il segmento di parabola in un rettangolo e non in un quadrato come con il quarto di cerchio. Gli studenti devono quindi modificare il procedimento utilizzato tenendo presente questa differenza.



Questa attività ha dei collegamenti interessanti con la fisica, in particolare si può prevedere una collaborazione con l'insegnante di fisica per quanto riguarda la trattazione della stima dell'errore che si ottiene con le stime calcolate di π.