Capitolo 1

Un po' di storia

In questo capitolo si vogliono ripercorrere le tappe dello studio della circonferenza e del cerchio nella storia. Si vogliono inoltre richiamare i momenti essenziali che hanno portato alla scoperta di π, alle sue approssimazioni e agli studi sulla sua natura. Per la stesura di questo capitolo si è fatto riferimento alle seguenti fonti [21], [23], [10], [8].

1.1 La circonferenza e il cerchio nella storia

Quando, verso l'8000 a.C., il clima divenne più mite, gli uomini abbandonarono le caverne e fissarono la loro dimora all'area aperta, spesso sulle rive dei fiumi o dei laghi, dove era più facile procurarsi il cibo: siamo nell'epoca neolitica. Nacque allora una nuova arte, quella che doveva facilitare la vita dell'uomo all'aperto: l'arte del costruire. Risalgono a quell'epoca le prime abitazioni per i vivi e per i morti fatte di terra e pietre. Tutte queste costruzioni erano a pianta rotonda. Ma risalgono anche allo stesso periodo tutti quei mezzi che potevano essere d'aiuto alla caccia e alla pesca ma anche alla coltivazione dei campi e all'allevamento del bestiame. Fra questi mezzi fu inventata certamente ben presto anche la ruota, suggerita forse dall'osservazione del rotolamento dei tronchi d'albero. Così per delimitare le primitive abitazioni e per risolvere problemi di trasporto, è nata la prima figura geometrica regolare piana: il cerchio. Il cerchio si può considerare inoltre la base degli ornamenti geometrici di tutte le epoche ma anche uno dei pilastri dell'architettura e della tecnica.
La parola cerchio deriva dal greco kirkos o dal latino Circus che vuol dire per l'appunto cerchio. Il cerchio è presente in moltissimi alfabeti antichi ed è una delle prime figure disegnate dai bambini.
Era perciò naturale che fin dall'antichità ci si interessasse a tale figura geometrica. Una delle prime trattazioni di tale figura risale al matematico greco Euclide (367

a.C. ca. - 283 a.C.). Nel suo libro *Elementi* viene data la seguente definizione: *Un cerchio è una figura piana contenuta da una linea tale che tutte le linee rette (segmenti), che giungono ad essa da un punto tra quelli interni alla figura sono uguali fra loro. E tale punto è chiamato centro del cerchio.*
Sempre negli *Elementi* di Euclide, in particolare nel III libro, si trovano già esposte le proprietà elementari di tale figura.
Un'altra definizione di cerchio ci viene fornita da ERONE di Alessandria (10 a.C. ca. - 70 ca.) il quale afferma che *Un cerchio è la figura descritta quando una linea retta (segmento), sempre rimanendo nello stesso piano, si muove attorno ad uno dei suoi estremi fino a tornare alla posizione iniziale.*

Lo studio di questa figura fece sorgere ben presto due problemi sui quali indagare:

1. trovare una formula per avere la lunghezza della circonferenza dato il raggio;

2. trovare una formula per avere l'area del cerchio dato il raggio;

Tali problemi prendono il nome rispettivamente di rettificazione e di quadratura del cerchio. Quadrare un cerchio significa costruire un quadrato di area uguale a quella del cerchio, mentre rettificare la circonferenza consiste nel costruire con riga e compasso un segmento avente la stessa lunghezza della circonferenza. Entrambi questi problemi sono legati alla conoscenza del valore e della natura di π dato che essi diventano risolvibili nel momento in cui si conosce il valore di tale numero. Nel prossimo paragrafo ripercorriamo quindi le tappe fondamentali degli studi fatti su π.

1.2 La storia di Pi-greco

La storia di Pi geco si divide fin da subito in due filoni di indagine: la ricerca del suo valore e lo studio della sua natura. Vediamo ora i passi salienti di tale indagine.
Come già detto i tentativi di stimare tale numero risalgono a tempi antichi. Tra tutti i popoli dell'antichità i Babilonesi sono quelli che ne hanno calcolato il valore più preciso. Per loro $\pi = 3.125$. Essi non solo conoscevano il valore di questo numero ma ci hanno tramandato anche una regola per calcolarlo. Tale metodo è scritto nella tavoletta 7302 della Yale Babylonian Collection rinvenuta a Susa che risale agli anni 1750 a.C.

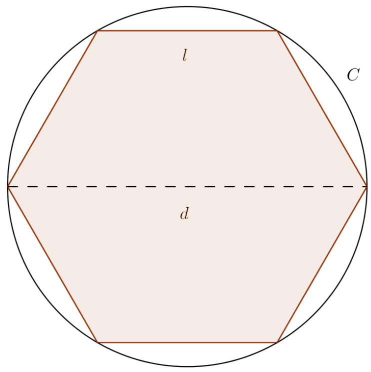

Figura 1.1: Metodo babilonesi

Il loro metodo si basa nell'inscrivere in un cerchio un esagono i cui lati sono la metà esatta del diametro del cerchio: $l = \frac{d}{2}$ e quindi uguali al raggio r del cerchio. I Babilonesi sapevano che il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro è uguale a una costante (che noi chiamiamo π):

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = costante = \pi$$

Calcolando quindi il rapporto tra la circonferenza e il perimetro dell'esagono ($E = 6r$) trovarono che

$$\frac{E}{C} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$$

Inoltre i Babilonesi sapevano anche calcolare il rapporto approssimato tra il lato dell'esagono e la corda che quel lato definisce sul cerchio

$$\frac{E}{C} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2} = 0.96$$

Dunque

$$\frac{E}{C} = 0.96 = \frac{3}{\pi}$$

e quindi

$$\pi = \frac{3}{0.96} = 3.125.$$

Di poco posteriore è invece quello che è noto oggi come il Papiro di Rhind che ci è stato tramandato da uno scriba egiziano di nome Ahmes, intorno al 1650 a.C. Ahmes scrisse:
"Togli $\frac{1}{9}$ a un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio".

Il testo di Ahmes implica quindi che l'area di un cerchio con diametro di 9 unità è pari a quella di un quadrato con un lato di 8 unità. Quindi:

$$Area_{cerchio} = \frac{\pi(diametro)^2}{4} =$$

$$= lato^2 = Area_{quadrato}$$

dunque

$$Area_{cerchio} = \frac{\pi \cdot 81}{4} = 64$$

Con dei passaggi elementari si ottiene allora che

$$\pi = 4 \cdot \frac{64}{81} = 3.16049$$

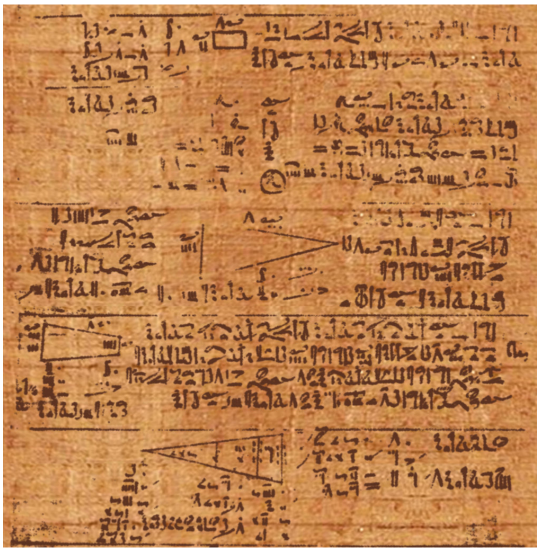

Figura 1.2: Un frammento del Papiro di Rhind

La Bibbia ci fornisce invece informazioni molto chiare sul valore di π raggiunto dagli antichi Ebrei. Nell'Antico Testamento, I Re, 7 : 23, si legge a proposito dell'altare costruito nel tempio di Salomone:
"Poi fece il mare fuso: dieci cubiti da una sponda all'altra cioè completamente rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e una corda di trenta cubiti lo circondava all'intorno".
Questo passo indica che il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro è 3; esso fu scritto probabilmente intorno al VI secolo a.C., anche se descrive il tempio costruito nel X secolo a.C.

Dopo che in Egitto lo scriba Ahmes ebbe riportato le sue scoperte, per un migliaio di anni nessuno dedicò più molte riflessioni al rapporto fra cerchi e quadrati. Per tutto quel tempo Egizi e Babilonesi ritennero che la comprensione elementare del rapporto fosse sufficiente ai fini dell'agrimensura e della costruzione degli edifici. Lo studio della misura del cerchio fu ripreso con rinnovato impegno nel quarto secolo a.C. dai Greci. Il primo pensatore greco a tentare di trovare un rapporto definitivo fra un cerchio e un quadrato fu Anassagora di Clazomene (500-428 a.C.). Poco tempo dopo Antifonte e Brisone di Eraclea, contemporanei di Socrate (469-399 a.C.), tentarono di trovare l'area di un cerchio usando una brillante nuova idea: il *principio di esaustione*. Antifonte sosteneva che se si prende un cerchio e vi si inscrive un quadrato e poi il poligono regolare che ha il doppio dei suoi lati,

l'ottagono, e poi ancora il poligono con il doppio dei lati, 16 lati, e si raddoppia ancora, 32 lati, e si continua così finché il cerchio non è esausto (cioè continuando all'infinito) si ottiene un poligono con il perimetro che coincide con la circonferenza del cerchio. Antifonte stimò l'area di un cerchio, calcolando l'area dei successivi poligoni, dal numero di lati sempre maggiore, in esso inscritti. Brisone fece invece un secondo passo rivoluzionario, calcolò le aree di due poligoni, uno inscritto nel cerchio e l'altro ad esso circoscritto e ipotizzò che l'area del cerchio dovesse essere compresa fra le aree dei due poligoni. Questa fu probabilmente la prima volta che si determinò un risultato usando limiti inferiori e superiori. Un paio di secoli dopo, la sfida fu ripresa da Archimede (287-212 a.C.) uno fra i massimi pensatori della storia, straordinario matematico, fisico e inventore.
Quando rivolse la sua attenzione al cerchio, Archimede usò nei suoi calcoli i metodi di esaustione di Antifonte e Brisone. Si concentrò però sui perimetri dei due poligoni anziché sulle loro aree, trovando così un'approssimazione della lunghezza della circonferenza. Egli raddoppiò quattro volte i lati di due esagoni, ottenendo due poligoni di 96 lati, di cui calcolò i perimetri.

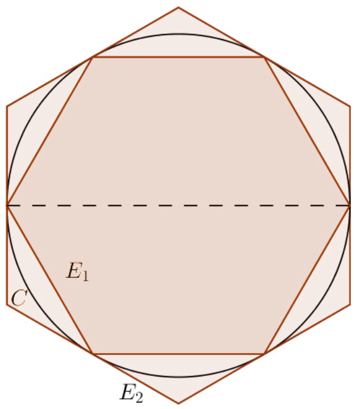

Figura 1.3: Metodo Archimede

Successivamente rese pubbliche le sue scoperte nel libro "Misura del cerchio". Il ragionamento di Archimede è il seguente: se si inscrive un esagono in un cerchio, il perimetro E_1 dell'esagono è inferiore alla circonferenza C del cerchio. Circoscrivendo invece il cerchio con un esagono, il perimetro dell'esagono E_2 è superiore alla circonferenza C del cerchio. Poiché il perimetro di un poligono regolare è facilmente calcolabile si può concludere che

$$E_1 < C < E_2$$

Inoltre Archimede sapeva che il rapporto tra la circonferenza e il diametro d è una costante che noi oggi chiamiamo π.

Si può quindi concludere facilmente che

$$\frac{E_1}{d} < \pi < \frac{E_2}{d}$$

Se si raddoppiano poi i lati del poligono considerando un dodecagono si avrà un'approssimazione migliore di π, cioè

$$\frac{E_1}{d} < \frac{D_1}{d} < \pi < \frac{D_2}{d} < \frac{E_2}{d}$$

Egli procedendo con questo metodo calcola il valore di π sulla base di un poligono di 96 lati inscritto in un cerchio e uno di 96 lati circoscritto in un cerchio ottenendo i valori limite

$$3.140845 < \pi < 3.142857$$

Archimede sapeva di poter descrivere solo i limiti superiore e inferiore del rapporto, ma se si fa una media dei due valori si ottiene 3,141851, con un errore minore dello 0.03% del valore reale.
Nello stesso periodo storico si incominciò anche ad indagare sulla natura di π. Ippaso da Metaponto dimostrò che, al contrario di quello che sosteneva Pitagora, non tutto in natura può essere espresso in termini di numeri interi o di rapporti tra numeri interi, infatti la diagonale del quadrato non gode di questa proprietà ed è quindi un numero incommensurabile. Si iniziò a sospettare quindi che anche π fosse un numero incommensurabile.

Per continuare la storia delle approssimazioni di π dobbiamo spostarci in Cina. La Cina fu sede di una fra le più antiche civiltà scientifiche e matematiche. Benché già nel XII secolo a.C. la matematica cinese avesse raggiunto buoni livelli, i Cinesi continuavano ad usare nei loro calcoli il valore di π 3. I progressi della Cina nella misurazione del cerchio si ebbero solamente nel 139 d.C. quando Ch'ang Hong, ministro e astrologo dell'imperatore An-ti, scrisse che il quadrato della circonferenza di un cerchio sta al quadrato del perimetro del quadrato circoscritto come 5 sta a 8. Cioè

$$(\pi d)^2 : (4d)^2 = 5 : 8$$

Dunque

$$\pi^2 d^2 : 16d^2 = 5 : 8$$

Che con dei passaggi elementari diventa

$$\pi^2 = \frac{16d^2 5}{d^2 8} = 16 \cdot \frac{5}{8} = 10$$

$$\pi = \sqrt{10} \cong 3.162$$

Questo valore divenne per molti anni l'approssimazione più popolare per π in tutta l'Asia.
Nel 263 d.C. Liu Hui usando il metodo di esaustione con un poligono di 3072 lati trovò per π il valore di 3.1416.

Figura 1.4: Tsu Ch'ung-chih

L'approssimazione migliore di π si ebbe però ad opera dell'astronomo del V secolo Tsu Ch'ung-chih. Usando poligoni inscritti di almeno 24576 lati egli ottenne approssimativamente un valore di

$$\pi = \frac{355}{113} \cong 3.1415929$$

che è giusto fino alla quinta cifra decimale.
Attorno al 530 il grande matematico indiano Aryabatha trovò un'equazione per calcolare il perimetro di un poligono di 384 lati; ne ricavò un rapporto fra circonferenza e diametro di $\sqrt{9.8684} = 3.1414$. Il più grande matematico indiano del VII secolo, Brahmagupta calcolò i perimetri dei poligoni inscritti di 12, 24, 48 e 96 lati, ottenendo, rispettivamente, i valori delle radici quadrate di 9.65; 9.81; 9.86; 9.87. Poi fece un salto di fede supponendo che, all'approssimarsi dei poligoni al cerchio, i perimetri, e quindi il π, si sarebbero approssimati alla radice quadrata di 10. La radice quadrata di 10 fu quindi il valore da lui adottato e fu il valore che si diffuse dall'India all'Europa e che venne utilizzato nel Medioevo, dai matematici di tutto il mondo, forse anche grazie al fatto che è così facile da trasmettere e da ricordare.

Per avere delle nuove approssimazioni di π bisogna aspettare il medioevo quando anche il continente europeo incomincia ad indagarsi sul suo valore grazie alla traduzione in latino di testi greci di matematica come gli Elementi di Euclide. Il primo europeo ad occuparsi di questo fu Fibonacci che con il suo *Liber abaci* del 1202 contribuì alla diffusione in Europa dei numerali arabi e nel *Practica Geometriae* del 1220 utilizzò come valore di $\pi = 3.141818$. Il metodo di calcolo di Fibonacci si fonda sull'approssimazione del perimetro di un poligono regolare di 96 lati inscritto e circoscritto a un cerchio, con la differenza che ora possono essere utilizzati i numeri decimali sconosciuti da Archimede.

Figura 1.5: Leonardo Fibonacci

Alla metà del Quattrocento il cardinale Niccolò Cusano affermò di avere quadrato esattamente il cerchio, trovando che il rapporto della circonferenza al diametro era di 3,1423. Il suo metodo sarebbe stato in seguito dimostrato falso da Regiomontano (Johannes Muller, 1436-1476).

È nel 500 che si ritorna a discutere sulla natura del nostro numero. Michel Stifel affronta il tema, teorico, della realtà dei numeri irrazionali: un tema che coinvolge anche π, da tempo sospettato di essere irrazionale. Per Stifel π è un non numero che vive sulle nuvole inafferrabili dell'infinito. Questo è il sentimento diffuso a quell'epoca sulla natura di π.

Figura 1.6: Michael Stifel

Verso la fine del 500 emergono anche nuove possibilità di calcolare con sempre maggiore precisione il suo valore grazie a nuovi strumenti come le tavole trigonometriche, l'invenzione delle frazioni decimali e dei logaritmi. Inoltre è iniziata l'era dei *cacciatori di cifre* matematici interessati a scoprire sempre più cifre decimali di π. Nel 1579 Viète usò il metodo di Archimede dei poligoni inscritti e circoscritti per stabilire che π era maggiore di 3,1415926535 e minore di 3,1415926537. Per ottenere questo risultato raddoppiò i lati di due esagoni sedici volte, trovando il perimetro dei poligoni, inscritto e circoscritto, di 393.216 lati ciascuno.

Figura 1.7: François Viète

Ma Viète fu anche il primo a introdurre nel 1593 un metodo nuovo e alternativo a quello di Archimede per il calcolo di π. Viète misura il rapporto tra l'area A di un poligono con n lati e l'area del cerchio in cui è inscritto. Poi procede usando l'area di un poligono con 2n lati inscritto nel medesimo cerchio. Poi ancora con l'area di un poligono con 4n lati e così via all'infinito. Col crescere del numero di lati l'area del poligono approssima sempre di più quella del cerchio. Con l'uso della trigonometria e con la nozione di limite che Viète ancora non conosceva potremmo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} A(2^k n) = \pi r^2$$

Fu quindi il primo a scrivere π usando un prodotto infinito. Anche tre matematici olandesi del tardo cinquecento usarono il metodo di Archimede dei poligoni per calcolare π. Nel 1585 Adriaan Anthonisz trovò che $\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$. In notazione decimale, ciò significa $3.14151 < \pi < 3.14167$. Otto anni dopo Adriaan van Roomen determinò π fino al quindicesimo decimale, usando un poligono inscritto di più di cento milioni di lati. Infine, Ludolph van Ceulen spese vari anni a calcolare π fino alla ventesima cifra decimale usando lo stesso metodo di Archimede, con la differenza che i suoi poligoni avevano più di

Figura 1.8: Leibniz

Figura 1.9: Newton

32 miliardi di lati ciascuno. Quando morì, nel 1610, Van Ceulen aveva calcolato 35 cifre decimali, con gli stessi metodi usati dai matematici per migliaia di anni. Ma la ricerca dei cacciatori di cifre non è finita e dato che il metodo di esaustione era troppo scomodo per essere usato da molti altri nel tentativo di procedere oltre, nel 1621 il matematico olandese Willebrord Snell trovò un metodo di stima fondato più sull'intelligenza che sulla resistenza. Mentre i suoi predecessori avevano ogni volta raddoppiato il numero dei lati di un poligono, Snell trovò un'approssimazione migliore usando lo stesso numero di lati. Semplicemente inscrivendo e circoscrivendo un esagono a un cerchio, poté determinare che π è compreso fra 3.14022 e 3.14160. Usando un poligono di 96 lati, Snell riuscì a determinare il valore di π fino alla sesta cifra decimale e, con un po' più di lavoro, riuscì a verificare le 35 cifre decimali di Van Ceulen. Il matematico inglese John Wallis (1616-1703) affrontò in modo nuovo il problema di trovare l'area di un cerchio. L'equazione di Wallis, come quella di Viéte, è un prodotto infinito, ma ne differisce per il fatto di implicare solo operazioni razionali senza alcun bisogno di radici quadrate.

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

Un enorme passo avanti nella stima di π si ebbe quando James Gregory trovò una soluzione estremamente elegante del calcolo delle arcotangenti, che condusse poi a un metodo completamente nuovo di calcolare π: le serie di arcotangenti.

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Tre anni dopo che Gregory ebbe trovato questa nuova soluzione, il tedesco Leibniz (1646-1716) scoprì indipendentemente la serie di arcotangenti. Leibniz fu uno dei padri del calcolo infinitesimale. L'altro padre fu Newton (1642-1727). Entrambi utilizzarono la serie delle arcotangenti per stimare π. Per determinare il rapporto della circonferenza al diametro non bastavano più calcoli elementari. Il calcolo infinitesimale e le serie di arcotangenti permisero ai matematici di compiere calcoli molto più rapidi rispetto alla misurazione di poligoni; in effetti il calcolo di soli quattro termini di una delle serie di Newton dà 3.1416. Ben presto il vero problema divenne quello dell'efficienza: trovare un'equazione che convergesse a π con la massima rapidità. Alla fine del seicento, disponendo di questi nuovi strumenti, la ricerca delle cifre decimali di π fece un brusco salto in avanti. Nel 1699 Sharp trovò 72 cifre decimali; nel 1706 Machin 100 decimali. Settantacinque anni dopo, Vega calcolò 140 cifre.

In questo periodo, precisamente nel 1706, venne utilizzato per la prima volta da William Jones nel suo libro *"A new introduction to Mathematics"* il simbolo π. Benché lo stesso simbolo fosse stato utilizzato in precedenza per indicare la circonferenza del cerchio. La notazione diventò standard dopo che la utilizzò Eulero. In entrambi i casi π è la prima lettera di $\pi\varepsilon\rho\iota\varepsilon\tau\rho\sigma$ (perimetros), che significa *"misura attorno"* in greco. Alla metà del settecento, rivolse la sua attenzione al calcolo di π uno fra i massimi e più prolifici matematici, Leonhard Euler (1707-1783) (meglio noto come Eulero). Eulero trovò molte formule di arcotangenti e serie per calcolare π ed usò un metodo per calcolare 20 cifre decimali in una sola ora.

Figura 1.10: Leonhard Euler

La più interessante delle serie trovate da Eulero è certamente la seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nello stesso periodo Eulero riportò all'attualità il tema sulla natura di π. Egli si domandò se è un numero razionale o irrazionale e affermò che era giunta l'ora di stabilirlo una volta per tutte. Nel 1794 Johann Heinrich Lambert dimostrò quindi in maniera definitiva che π è un numero irrazionale. Più tardi, nel 1794, Adrien-Marie Legendre provò in modo più rigoroso non solo che π è un numero irrazionale ma anche che il suo quadrato π^2 è irrazionale. Questa nuova scoperta portò il francese Joseph Lioville nel 1844 a dimostrare l'esistenza dei numeri trascendenti.

Figura 1.11: Ferdinand Von Lindemann

Le ricerche sulla natura di π si concludono nel 1882 quando Ferdinand Von Lindemann dimostra che π è un numero irrazionale trascendente.
Queste dimostrazioni mettono fine anche ai problemi della quadratura e della rettificazione del cerchio che risultano quindi impossibili.

Dopo i brillanti passi avanti di Eulero, l'Ottocento sembra decisamente scarso se ci si limita a considerare i progressi compiuti nei metodi per il calcolo di π. In effetti, solo all'inizio del XX secolo un altro matematico avrebbe trovato un nuovo insieme di equazioni da applicare al problema. I cacciatori di cifre continuarono tuttavia a trovare un numero di cifre sempre maggiore: Callet 152 (1837), Rutherford 208 (1841), Clausen 248 (1847), Rutherford 440 (1853), Shanks 607 (1853) e 707 (1873). Nel 1945 D.F. Ferguson calcolò 530 cifre di π con una formula con arcotangenti. Questo risultato fu il frutto di un intero anno di lavoro con carta e penna, al ritmo medio di poco più di una cifra al giorno. Nel 1947 Ferguson, con l'aiuto di una delle prime calcolatrici da tavolo, aveva trovato 808 cifre di π. Nel 1948 Smith e Wrench trovarono la millesima cifra decimale. Nel 1949 G. Reitwiesner, J. von Neumann e N.C. Metropolis usarono il computer Eniac, con 19.000 valvole e centinaia di migliaia di resistori e capacitori, per calcolare 2037 cifre. Questo calcolo richiese solo settanta ore con una media di una cifra ogni due minuti. Con l'avvento dei computer elettronici, nel 1954, si potè calcolare 3089 cifre in soli tredici minuti (circa 4 cifre al secondo). Nel 1958 le prime 704 cifre in soli 40 secondi, le prime 10.000 cifre in un'ora e quaranta minuti. Nel 1961 con un Ibm 7090 furono trovate 100.265 cifre con un tempo medio di 3 cifre al secondo. Nel 1973 J. Guilloud e M. Bouyer trovarono la milionesima cifra. Nel 1982 si trovò il valore di π fino all'8388608-esimo decimale in poco meno di sette ore. La combinazione di computer sempre più potenti e dell'algoritmo di Gauss-Brent-Salamin hanno lanciato i calcoli di π verso altezze stratosferiche. Nel 1997 Kanada e Takahashi hanno calcolato e verificato più di 51 miliardi di cifre decimali di π e, nel 2003, lo stesso Kanasa ha calcolato 1.241.100.000.000 cifre, utilizzando 64 computer Hitachi SR8000/MPP, in più di 600 ore.