Università degli studi di Trento
Dipartimento di Matematica
Laboratorio DiCoMat

Percorso di formazione per insegnanti

“Approfondimenti e spunti didattici sul tema delle equazioni differenziali”

Dipartimento di Matematica UNITN, 5-14 febbraio 2018
RELATORE: Silvano Delladio

Note di Marta Stach
(con la supervisione di Silvano Delladio)

Indice

Introduzione

In queste note, relative a un corso per docenti di matematica della scuola secondaria di secondo grado, si vuole mettere in luce alcune problematiche poste dall'insegnamento delle equazioni differenziali. In esse si esamina il modo in cui la maggior parte dei manuali scolastici tratta l'argomento, discutendone i punti critici e avanzando proposte migliorative.

Nel primo capitolo si introducono alcune definizioni, tra cui quella di "problema di Cauchy". Si enuncia poi una versione del teorema di esistenza e unicità locale (raramente rintracciabile nei libri di testo) e si mostra come tale risultato possa essere utilizzato per trattare in modo rigoroso e compiuto, ancorchè elementare, le equazioni differenziali a variabili separate.

Il secondo capitolo prosegue esaminando imprecisioni e abusi notazionali presenti in quasi tutti i manuali scolastici relativamente al metodo di separazione delle variabili. Il riferimento principale è alla pratica eccessivamente informale, che purtroppo è diventata una consuetudine, della notazione di Leibniz dy/dx. Uno dei punti fermi del corso è che tale pratica non sia giustificabile e a sostegno di questo argomento si propone una modalità alternativa che coniuga rigore e semplicità.

Il terzo e il quarto capitolo riguardano le equazioni differenziali lineari, rispettivamente del primo e del secondo ordine. Entrambi i capitoli iniziano con la presentazione di alcune proprietà riconducibili alla linearità.
Nel caso del primo ordine, il metodo risolutivo proposto è quello del cosiddetto "fattore integrante", ampiamente utilizzato anche nei manuali scolastici. Per quanto riguarda il secondo ordine (a coefficienti costanti), dobbiamo osservare che la maggior parte dei manuali scolastici si limita a un approccio basato su "ricette" che sorvolano con disinvoltura sul benché minimo aspetto concettuale. Nel caso che l'equazione caratteristica abbia soluzioni reali è invece possibile procedere a una risoluzione semplice e rigorosa, proposta nel corso, basata su due risoluzioni a catena di equazioni lineari del primo ordine. Se invece l'equazione caratteristica non ha soluzioni reali, non disponiamo di modalità risolutive rigorose altrettanto semplici. In questo caso l'approccio procedurale sembra inevitabile.

In appendice sono raccolti degli approfondimenti riguardanti alcune nozioni utilizzate nel corso della trattazione. Viene inoltre presentato il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, utile nella ricerca di una soluzione particolare di un'equazione lineare del secondo ordine.

Queste note si concludono con una piccola raccolta di esercizi risolti che costituisce una "galleria" dei metodi risolutivi presentati nei capitoli precedenti.

Silvano Delladio
Marta Stach

Capitolo 1

Il Problema di Cauchy

1.1 Definizione e prime osservazioni

Definizione 1.1.1. Un'*equazione differenziale ordinaria (EDO)* è un'equazione che ha per incognita una funzione $y(x)$ e che stabilisce una relazione tra la variabile indipendente x, la funzione $y(x)$ e almeno una delle sue derivate $y'(x), y''(x), ...$ cioè è un'equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.1}$$

dove F è una funzione di $n+2$ variabili. Si chiama *ordine della EDO* (1.1) l'ordine massimo delle derivate che compaiono in essa. Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n si dice essere *in forma normale* se è del tipo

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)),$$

con f funzione di $n+1$ variabili.

In queste note ci interesseremo di equazioni differenziali ordinarie in forma normale di ordine 1 e 2, cioè del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x)) \ , \qquad y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \tag{1.2}$$

dove f è una funzione continua in un aperto A (rispettivamente di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$).
Il "Problema di Cauchy relativo alla prima EDO di (1.2) con punto iniziale $(x_0, y_0) \in A$" consiste nel determinare una soluzione del sistema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

cioè una funzione $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intervallo aperto I di $\mathbb{R}$ tale che $x_0 \in I$, $y(x_0) = y_0$, il grafico di $y(x)$ sia un sottoinsieme di A e valga

$$y'(x) = f(x, y(x)), \text{ per ogni } x \in I.$$

Analogamente, il "Problema di Cauchy relativo alla seconda EDO di (1.2) con punto iniziale $(x_0, y_0, y_1) \in A$" consiste nel determinare una soluzione $y(x)$ del sistema

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \ , \quad y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{1.4}$$

cioè una funzione $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^2$ in un intervallo aperto I di $\mathbb{R}$ tale che $x_0 \in I$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, il grafico di $y(x)$ sia un sottoinsieme di A e valga

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \text{ per ogni } x \in I.$$

Esempio 1.1.1. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 y)$$

avente come dominio l'insieme aperto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x^2 y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y > -1\}.$$

Osserviamo che la disuguaglianza $x^2 y > -1$ è verificata da tutti i punti del tipo $(0, y)$ (cioè quelli appartenenti all'asse $\mathbb{R}_y$) e da quelli del tipo (x, y), con

$$x \neq 0 \quad \text{e} \quad y > -\frac{1}{x^2}$$

(cioè quelli appartenenti all'epigrafico della funzione $-1/x^2$), vedasi Fig.1.1.

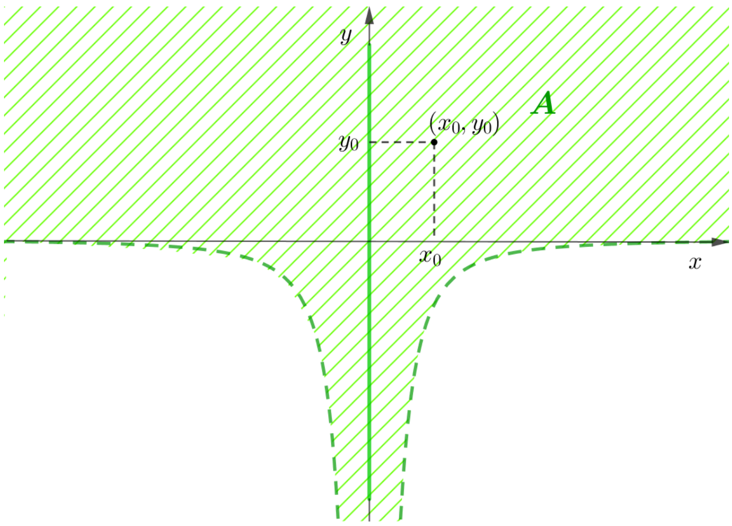


Figura 1.1: Dominio di $\ln(1 + x^2 y)$

In questo caso il Problema di Cauchy 1.3 associato è

$$\begin{cases} y'(x) = \ln(1 + x^2 y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

1.2 Il Problema di Cauchy per una EDO del primo ordine

Come ci si può aspettare, la formulazione precedente del Problema di Cauchy 1.3 è troppo generica per assicurare che valgano proprietà di esistenza e unicità della soluzione.

Il seguente teorema stabilisce l'esistenza e l'unicità della soluzione di (1.3) in un intorno di x_0, sotto l'ipotesi che f sia continua e derivabile con continuità rispetto alla seconda variabile. Tale ipotesi non è strettamente indispensabile per formulare il problema di Cauchy (infatti, in (1.3), non figurano le derivate della funzione f), ma risulta utile nel corso della dimostrazione.

Teorema 1.2.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto e $f \in \mathcal{C}(A)$ derivabile rispetto a y, con tale derivata continua. Allora esiste un intervallo aperto I centrato in x_0 e un'unica funzione $y(x) \in \mathcal{C}^1(I)$ il cui grafico sia contenuto in A (cioè $(x, y(x)) \in A$ per ogni $x \in I$) e valga*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \ \textit{se } x \in I \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

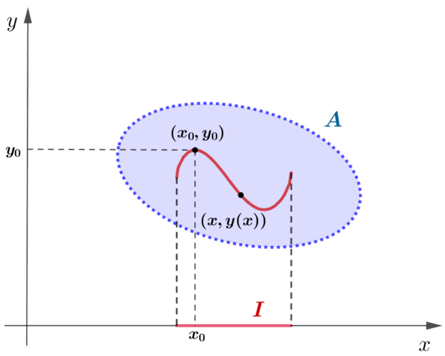


Figura 1.2: Grafico della soluzione $y(x)$ di (1.5)

Osservazione 1.2.1. Si potrebbe pensare che nel caso in cui $A = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$, sempre nelle ipotesi di Teorema 1.2.1, esista necessariamente una soluzione globale $y(x) \in \mathcal{C}^1((\alpha, \beta))$ di (1.5). Il seguente esempio mostra che non è così. Una condizione supplementare capace di assicurare l'esistenza di soluzioni globali è che si abbia

$$f(x, y) \leq K(1 + |y|)$$

per qualche $K \in \mathbb{R}^+$

Esempio 1.2.1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y(x)^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

dove $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è fissato arbitrariamente.

In questo caso, si ha $A = \mathbb{R}^2$ e $f(x, y) = 1 + y^2$ (quindi $f \in \mathcal{C}(A)$, anzi $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$). Tale problema si risolve facilmente osservando che l'equazione differenziale equivale a

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = 1$$

cioè

$$D[\arctan y(x)] = 1$$

che equivale a sua volta a

$$\arctan y(x) = x + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale in (1.6) è dunque

$$y(x) = \tan(x + C) \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Tale risultato mostra chiaramente (ancor prima di procedere a determinare C, imponendo che si abbia $y(x_0) = y_0$) che il dominio della soluzione $y(x)$ non può essere $\mathbb{R}$.

Osservazione 1.2.2. Nell'ipotesi che f sia solo continua, esiste una teoria dell'esistenza locale che però non assicura l'unicità. Il seguente celebre esempio, dovuto a Giuseppe Peano (1858-1932), illustra chiaramente la possibilità che in questo caso esistano più soluzioni.

Osservazione 1.2.3. In questa trattazione non siamo interessati alla dimostrazione di Teorema 1.2.1. Osserviamo però che la stessa dimostrazione basata sul teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli che si trova per esempio in [3] prova sia il caso del problema di Cauchy scalare che quello del problema di Cauchy vettoriale.

Esempio di Peano: Sia $(x_0, y_0) := (0, 0)$ e

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \frac{3}{2} y^{1/3}.$$

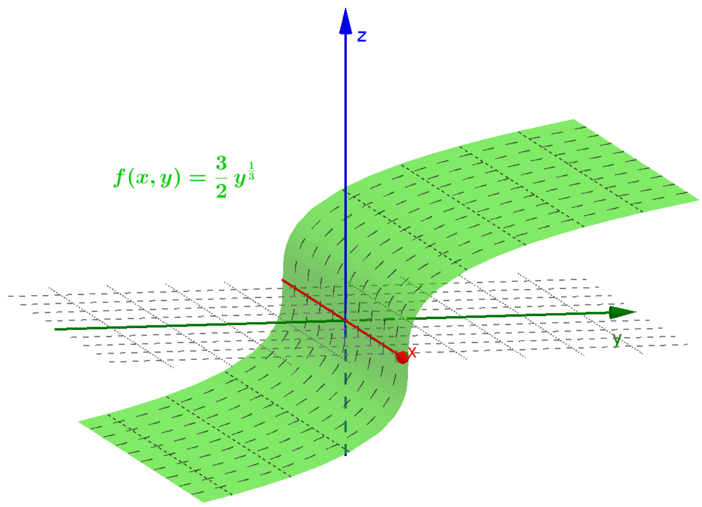


Figura 1.3: La funzione $f(x, y)$ non è derivabile rispetto a y nei punti di $\mathbb{R}_x$.

Allora si ha effettivamente $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, mentre è evidente che $\partial f/\partial y$ non esiste nei punti dell'asse delle x e quindi le ipotesi di Teorema 1.2.1 non sono tutte verificate (vedasi Fig.1.3). Il corrispondente problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{3}{2} y(x)^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Come premesso, tale problema ha più di una soluzione (locale). Più precisamente, consideriamo la seguente funzione $y_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dove $a \geq 0$:

$$y_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ (x-a)^{\frac{3}{2}} & \text{se } x > a. \end{cases} \tag{1.8}$$

Allora, per ogni $a \geq 0$, si ha che $y_a(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e vale

$$y_a'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} y_a(x)^{\frac{1}{3}} & \text{se } x > a. \end{cases} \tag{1.9}$$

Quindi, per ogni $a \geq 0$, la funzione $y_a(x)$ è soluzione del Problema di Cauchy 1.7.

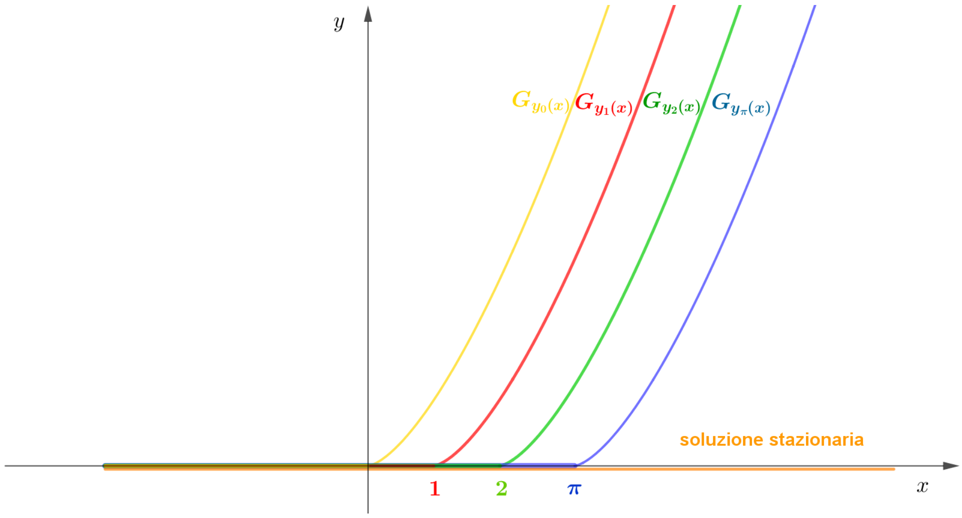


Figura 1.4: Baffo di Peano

1.3 Riduzione al primo ordine del problema di Cauchy del secondo ordine

Consideriamo ora il problema di Cauchy del secondo ordine

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{1.10}$$

con $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto e $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Allora:

- Se $y(x)$ è una soluzione di (1.10) e poniamo

$$z(x) := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

si trova

$$z'(x) := \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ f(x, y(x), y'(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ f(x, z_1(x), z_2(x)) \end{pmatrix},$$

cioè $z(x)$ è soluzione del seguente problema di Cauchy vettoriale del primo ordine

$$\begin{cases} z'(x) = F(x, z(x)) \\ z(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.11}$$

con

$$F(x, z) = F(x, z_1, z_2) := \begin{pmatrix} z_2 \\ f(x, z_1, z_2) \end{pmatrix}.$$

- Viceversa, se supponiamo che

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

con $z_1(x), z_2(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intervallo aperto centrato in x_0, sia soluzione di (1.11),

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ f(x, z_1(x), z_2(x)) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1(x_0) \\ z_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x)) \\ z_1(x_0) = y_0, \ z_2(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Ora, posto

$$y(x) := z_1(x),$$

si ha che

$$y'(x) = z_1'(x) = z_2(x)$$

e

$$y''(x) = z_2'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x)) = f(x, y(x), y'(x)).$$

Concludiamo che $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy del secondo ordine

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = z_1(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_2(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Dunque, queste considerazioni permettono di applicare al problema di Cauchy del secondo ordine la teoria relativa al problema di Cauchy del primo ordine (cfr. Osservazione 1.2.3).

Osservazione 1.3.1. Nel caso particolare del problema di Cauchy per un'equazione lineare del secondo ordine (a coefficienti costanti)

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{1.12}$$

si ha

$$f(x, z_1, z_2) = g(x) - bz_1 - az_2$$

e quindi, per quanto abbiamo visto precedentemente, il problema 1.12 equivale al sistema

$$\begin{cases} z'(x) = F(x, z(x)) \\ z(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

con

$$F(x, z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ g(x) - bz_1 - az_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} z.$$

Rimane così provato che il problema di Cauchy 1.12 per un'equazione lineare del secondo ordine scalare (a coefficienti costanti) equivale al seguente problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine vettoriale

$$\begin{cases} z'(x) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & a \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \\ z(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

1.3.1 Considerazioni didattiche

Esempio 1.3.1. Consideriamo il seguente esempio

$$y'(x) + xy(x) = 0 \tag{1.13}$$

per discutere il modo in cui molti libri di testo risolvono le EDO lineari omogenee del primo ordine. Essi procedono come segue (o similmente):

- Si osserva che la funzione $y(x) \equiv 0$ è soluzione di (1.13);
- Si dà per scontato che ogni soluzione $y(x)$ di (1.13) diversa dalla soluzione identicamente nulla considerata nel punto precedente non si annulla mai, e quindi essa soddisferà l'identità

  $$\frac{y'(x)}{y(x)} = -x \ ,$$

  cioè

  $$D(\ln |y(x)|) = -x \ ,$$

  da cui

  $$\ln |y(x)| = -\frac{x^2}{2} + k \ , \qquad k \in \mathbb{R}$$

  ossia

  $$|y(x)| = Ce^{-x^2/2} \ , \qquad C \in \mathbb{R}^+$$

  da cui si conclude

  $$y(x) = Ce^{-x^2/2} \ , \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Questa procedura è corretta, ma non del tutto "trasparente" (ci riferiamo naturalmente al secondo punto). Infatti essa non chiarisce le ragioni per cui se una soluzione non è identicamente nulla allora essa non può annullarsi almeno per qualche valore di x, come si dà per scontato.
Vogliamo qui fornire una spiegazione basata su Teorema 1.2.1.

Infatti, sia $\overline{y}(x)$ una soluzione non identicamente nulla di (1.13) e supponiamo per assurdo che esista $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $\overline{y}(x_1) = 0$. Allora l'insieme

$$Z := \{x \in \mathbb{R} \mid \overline{y}(x) = 0\}$$

è non vuoto. Inoltre, poiché $\overline{y}(x)$ non è identicamente nulla, esiste anche $x_2 \in \mathbb{R}$ tale che $\overline{y}(x_2) \neq 0$.
Si hanno due casi:

- Caso 1: $x_1 < x_2$: Allora, poiché Z è chiuso, esiste $x_0 := \max(Z \cap [x_1, x_2])$ e si ha

$$\overline{y}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{y}(x) \neq 0 \quad \text{se } x \in (x_0, x_2); \tag{1.14}$$

- Caso 2: $x_2 < x_1$: Allora, poiché Z è chiuso, esiste $x_0 := \min(Z \cap [x_2, x_1])$ e si ha

$$\overline{y}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{y}(x) \neq 0 \quad \text{se } x \in (x_2, x_0). \tag{1.15}$$

In entrambi i casi, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) = 0 \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

ha come soluzione la funzione $\overline{y}(x)$. D'altra parte, per la proprietà di unicità attestata da Teorema 1.2.1 si ha che

$$\overline{y}(x) = 0 \quad \text{in un intorno di } x_0,$$

il che contraddice (1.14) e (1.15).

1.3.2 Riferimenti bibliografici

Per le generalità sul problema di Cauchy rimandiamo il lettore a [1] e [3]. Quest'ultima opera include anche una dimostrazione di Teorema 1.2.1 che fa ricorso al teorema di punto fisso di Banach-Cacciopoli.

Capitolo 2

Equazioni Differenziali a variabili separate

In molti manuali scolastici, le equazioni differenziali a variabili separate vengono trattate in maniera non rigorosa: in particolare, si opera impropriamente con la notazione di Leibniz

$$\frac{dy}{dx}$$

"maneggiandola" come se questa fosse una frazione. Inoltre succede spesso che in queste trattazioni si compiano operazioni di divisione senza controllare che il divisore non si annulli. Ecco un esempio tipico di trattazione riscontrabile in tali manuali.

Esempio 2.0.1. Per risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \tag{2.1}$$

dove $g \in \mathcal{C}(I)$ e $h \in \mathcal{C}^1(J)$, con I e J intervalli aperti di $\mathbb{R}$, si procede come segue:

- Si riscrive (2.1) utilizzando la notazione di Leibniz,

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

- Si separano le variabili, cioè si suppone che $h(y) \neq 0$ e si moltiplicano entrambi i membri per $dx/h(y)$. Si ottiene

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx.$$

  In questo passaggio si concentrano i due errori a cui abbiamo accennato nella premessa.

- Si integra membro a membro, ottenendo

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

  e quindi, dall'uguaglianza trovata, si ricava y in funzione di x.

- Si esaminano a parte i casi relativi alla condizione "scartata" $h(y) = 0$.

Esporremo di seguito una trattazione rigorosa di (2.1) che però richiede le seguenti considerazioni preliminari (in particolare, la seconda replica sostanzialmente l'argomento usato nella discussione del secondo punto in Esempio 1.3.1):

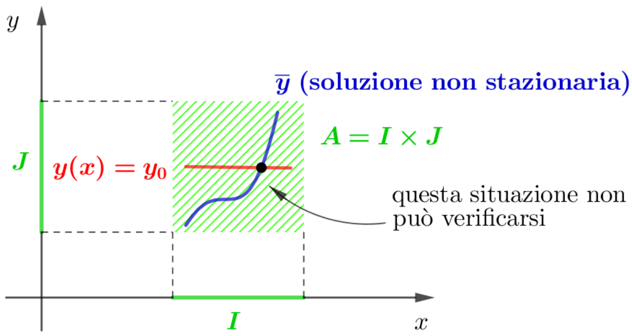
(1) Sia
$$R := h^{-1}(0) = \{y_0 \in J \mid h(y_0) = 0\}.$$
Allora, per ogni $y_0 \in R$, la funzione $y(x) \equiv y_0$ è una soluzione (stazionaria) di (2.1), in quanto:
$$y'(x) = 0 = g(x)h(y_0) = g(x)h(y(x)).$$

(2) Ogni soluzione non stazionaria $\overline{y} : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $I_1 \subset I$ intervallo, non assume mai valori in R. Infatti, sia $y_0 \in R$ e supponiamo per assurdo che
$$Z := \{x \in I_1 \mid \overline{y}(x) = y_0\} \neq \emptyset,$$
cioè che esista $x_1 \in I_1$ tale che $\overline{y}(x_1) = y_0$. Poiché $\overline{y}$ non è stazionaria esiste $x_2 \in I_1$ tale che $\overline{y}(x_2) \neq y_0$. Analogamente a quanto avviene nel secondo punto di Esempio 1.3.1, si presentano due casi:

– <u>Caso 1: $x_1<x_2$</u>: Allora, poiché Z è chiuso, esiste $x_0 := \max(Z \cap [x_1, x_2])$ e si ha
$$\overline{y}(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \overline{y}(x) \neq y_0 \quad \text{se } x \in (x_0, x_2); \tag{2.2}$$

– <u>Caso 2: $x_2<x_1$</u>: Allora, poiché Z è chiuso, esiste $x_0 := \min(Z \cap [x_2, x_1])$ e si ha
$$\overline{y}(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \overline{y}(x) \neq y_0 \quad \text{se } x \in (x_2, x_0). \tag{2.3}$$

In entrambi i casi, il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = g(x)h(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$
ha come soluzione $\overline{y}(x)$. D'altra parte, per Teorema 1.2.1 (che possiamo applicare in quanto $f(x,y) := g(x)h(y)$, con $h \in \mathcal{C}^1(J)$), si deve avere $\overline{y}(x) = y_0$ in un intorno di x_0, che contraddice (2.2) e (2.3).



Grazie a queste premesse, procediamo con la trattazione formalmente corretta per la risoluzione dell'equazione e a variabili separabili (2.1).

- Si determinano le soluzioni stazionarie, ovvero le funzioni $y(x) = y_0$ con $y_0 \in R = h^{-1}(0)$.
- Si cercano le soluzioni $y(x) : I_1 \to \mathbb{R}$ non stazionarie di (2.1). Come abbiamo visto, si ha $h(y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I_1$ e quindi è possibile dividere per $h(y(x))$, ottenendo

$$\frac{1}{h(y(x))} y'(x) = g(x).$$

- Integrando membro a membro si trova

$$\int \frac{1}{h(y(x))} y'(x) dx = \int g(x) dx,$$

e ricordando la formula di integrazione per sostituzione si ha che

$$\left(\int \frac{1}{h(y)} dy \right)_{\big| y=y(x)} = \int g(x) dx. \tag{2.5}$$

A questo punto per concludere l'esercizio basta calcolare i due integrali di (2.5).

Esempio 2.0.2. Risolviamo l'EDO (non lineare) del primo ordine

$$y'(x) = -2xy(x)^2.$$

Osserviamo che $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$, $g(x) = -2x$ e $h(y) = y^2$ (e quindi $g \in \mathcal{C}^1(I),\ h \in \mathcal{C}^1(J)$).

- Si risolve $h(y) = y^2 = 0$, trovando così l'unica soluzione stazionaria $y(x) \equiv 0$;
- Si cercano le soluzioni non stazionarie $y(x)$. Come visto, esse non si annullano e quindi l'equazione equivale a

$$\begin{aligned}
y'(x) = -2xy(x)^2 \iff & \frac{1}{y^2(x)} y'(x) = -2x \\
& \int \frac{1}{y^2(x)} y'(x) dx = \int -2x dx \\
& \left(\int \frac{1}{y^2} dy \right)_{\big| y=y(x)} = \int -2x dx \\
& \left(-\frac{1}{y} \right)_{\big| y=y(x)} = -x^2 + C \ , \qquad (C \in \mathbb{R}) \\
& -\frac{1}{y(x)} = C - x^2 \\
& y(x) = \frac{1}{x^2 - C}.
\end{aligned}$$

Osservazione: Se $C<0$ allora $y(x)$ è definita su $\mathbb{R}$. Se invece $C \geq 0$ allora $y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \neq \pm\sqrt{C}$.

2.0.1 Riferimenti bibliografici

Per una trattazione con riferimenti espliciti alla pratica diffusa ma non rigorosa del tipo considerato in Esempio 2.0.1, alla quale segue anche una trattazione completa delle equazioni differenziali a variabili separate, che ricalca la discussione che segue Esempio 2.0.1, si rimanda il lettore a [2].

Capitolo 3

Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine

3.1 Definizione e prime osservazioni

Definizione 3.1.1. Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n si dice *lineare* se è della forma

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_n(x)y(x) = g(x), \tag{3.1}$$

dove

$$g, a_1, ..., a_n \in \mathcal{C}(I),$$

con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Nel caso particolare in cui $g(x) = 0$ per ogni $x \in I$, l'equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n si dice *omogenea*.

In questo capitolo tratteremo le equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine, che scriveremo nella forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x), \tag{3.2}$$

dove $g, a \in \mathcal{C}(I)$, con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$.
Risolvere (3.2) significa determinare tutte le soluzioni $y(x) \in \mathcal{C}^1(I)$ che soddisfano (3.2).

Osservazione 3.1.1. Per $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, poniamo

$$L(\varphi) := \varphi' + a\varphi.$$

L'operatore L così definito è lineare. Ciò significa che se consideriamo

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(I)$$

allora si ha

$$L(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 L(\varphi_1) + \alpha_2 L(\varphi_2). \tag{3.3}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(x) &= (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)'(x) + a(x)(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(x) \\ &= \alpha_1\varphi_1'(x) + \alpha_2\varphi_2'(x) + \alpha_1 a(x)\varphi_1(x) + \alpha_2 a(x)\varphi_2(x) \\ &= \alpha_1[\varphi_1'(x) + a(x)\varphi_1'(x)] + \alpha_2[\varphi_2'(x) + a(x)\varphi_2'(x)] \\ &= \alpha_1 L(\varphi_1(x)) + \alpha_2 L(\varphi_2(x)). \end{aligned}$$

L'identità (3.3) è la ragione per cui la EDO (3.2), che si può anche scrivere come

$$(Ly)(x) = g(x),$$

è detta lineare. Analoghe considerazioni possono essere facilmente estese alla EDO (3.1).

Proposizione 3.1.1. *Si considerino un'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine*

$$(Ly)(x) = y'(x) + a(x)y(x) = g(x) \tag{3.4}$$

e l'equazione differenziale omogenea ad essa associata

$$(Ly)(x) = y'(x) + a(x)y(x) = 0, \tag{3.5}$$

dove $g, a \in \mathcal{C}(I)$ (I intervallo aperto di $\mathbb{R}$). Allora valgono i seguenti fatti:

(1) Se $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1(I)$ è soluzione di (3.4) e $\psi \in \mathcal{C}^1(I)$ è soluzione di (3.5), allora

$$\varphi_0 + \psi$$

è soluzione di (3.4).

(2) Se $\varphi_0, \varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ sono soluzioni di (3.4), allora

$$\varphi = \varphi_0 + \psi,$$

con $\psi \in \mathcal{C}^1(I)$ soluzione di (3.5).

Dimostrazione: (1) Grazie a Osservazione 3.1.1, si ha che

$$L(\varphi_0 + \psi) = L(\varphi_0) + L(\psi). \tag{3.6}$$

Ora, poiché φ_0 è soluzione di (3.4) e ψ è soluzione di (3.5), si ha che

$$L(\varphi_0) = g(x)\ , \quad L(\psi) = 0. \tag{3.7}$$

Per (3.6) e (3.7), si ha

$$L(\varphi_0 + \psi) = g,$$

da cui la tesi.

(2) Poniamo

$$\psi := \varphi - \varphi_0$$

da cui

$$\varphi = \varphi_0 + \psi.$$

Grazie a Osservazione 3.1.1 si ha

$$L(\psi) = L(\varphi - \varphi_0) = L(\varphi) - L(\varphi_0). \tag{3.8}$$

Inoltre, poiché per ipotesi φ e φ_0 sono soluzioni di (3.4), vale

$$L(\varphi) = L(\varphi_0) = g. \tag{3.9}$$

Da (3.8) e (3.9) segue allora

$$L(\psi) = g - g = 0.$$

Dunque ψ è soluzione di (3.5).

$\square$

Osservazione 3.1.2. Se $a(x), g(x) \in \mathcal{C}^1(I)$ allora, utilizzando Teorema 1.2.1 e un ulteriore risultato di estensione delle soluzioni, è possibile provare che esiste un'unica soluzione $y(x) \in \mathcal{C}^1(I)$ del problema di Cauchy relativo all'equazione (3.2).

3.2 Metodo del fattore integrante

Questo metodo risolutivo può essere applicato ad ogni equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine. Consideriamo

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x) \tag{3.10}$$

con $a(x), g(x) \in \mathcal{C}^1(I)$, come in Sezione 3.1. Sia $A(x)$ una qualsiasi primitiva di $a(x)$. Moltiplicando (3.10) per $e^{A(x)}$, otteniamo

$$e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)y(x) = e^{A(x)}g(x). \tag{3.11}$$

Osserviamo che, essendo $e^{A(x)} \neq 0$ per ogni $x \in I$, le equazioni differenziali (3.10) e (3.11) sono equivalenti, ovvero

$$y(x) \text{ è soluzione di (3.10) se e solo se } \; y(x) \; \text{ è soluzione di (3.11).}$$

A questo punto, poiché

$$D\left[e^{A(x)}\right] = e^{A(x)}a(x)$$

e ricordando la regola di Leibniz, possiamo riscrivere (3.11) come segue:

$$D\left[y(x)e^{A(x)}\right] = e^{A(x)}g(x).$$

Allora

$$y(x)e^{A(x)} = \int e^{A(x)}g(x)dx + C \;, \quad (C \in \mathbb{R})$$

e quindi concludiamo

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}g(x)dx + Ce^{-A(x)}$$

che fornisce la soluzione generale di (3.10). Per comprensibili ragioni, la funzione $e^{A(x)}$ viene detta "*fattore integrante*" (di (3.10)).

Osservazione 3.2.1. Se avessimo voluto risolvere il problema di Cauchy lineare del primo ordine, avremmo svolto gli stessi passaggi, con l'unica differenza che avremmo integrato tra x_0 e x (dove $x_0 \in I$ è l'ascissa del punto iniziale del problema di Cauchy)

$$y(x)e^{A(x)} - y(x_0)e^{A(x_0)} = \int_{x_0}^{x} D\left[y(t)e^{A(t)}\right] dt = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)dt \qquad (x \in I)$$

da cui segue

$$y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)dt \;, \qquad (x \in I).$$

Esempio 3.2.1. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) - 2xy(x) = e^{x^2}\cos x. \tag{3.12}$$

Osserviamo che $a(x) = -2x$ e che $A(x) = -x^2$ è una primitiva di $a(x)$. Il fattore integrante è quindi

$$e^{-x^2}.$$

Moltiplicando (3.12) per tale fattore, otteniamo

$$e^{-x^2} y'(x) - 2xe^{-x^2} y(x) = e^{-x^2} e^{x^2} \cos x,$$

e cioè

$$D\left(e^{-x^2} y(x)\right) = \cos x.$$

A questo punto, integrando membro a membro, si ha

$$e^{-x^2} y(x) = \sin x + C \ , \quad (C \in \mathbb{R})$$

da cui si conclude

$$y(x) = e^{x^2} \sin x + Ce^{x^2}.$$

3.2.1 Considerazioni didattiche

- Sovente, nei manuali scolastici, si determina la soluzione generale di un'equazione differenziale omogenea del primo ordine trattando tale equazione come equazione differenziale a variabili separate. Rileviamo che tale procedimento è soggetto alle considerazioni critiche esposte in Capitolo 2.
- Non è chiaro come mai il fattore integrante debba essere proprio la funzione $e^{A(x)}$: gli studenti potrebbero percepire tale fattore semplicemente come una scelta fortunata, un tentativo andato a buon fine. Presentiamo di seguito un approccio a questa strategia risolutiva in cui il fattore integrante emerge "spontaneamente", dando così un taglio meno procedurale al metodo in questione.

  Consideriamo l'equazione differenziale lineare del primo ordine completa

  $$y'(x) + a(x)y(x) = g(x), \tag{3.13}$$

  dove $a, g \in \mathcal{C}^1(I)$ (I intervallo aperto di $\mathbb{R}$), che, in generale (se $g(x) \neq 0$), non sarà risolubile mediante il metodo delle variabili separate. Osserviamo che, se fosse possibile scrivere il primo membro di (3.13) come derivata di un'espressione in cui compaia $y(x)$, ma non la sua derivata, allora la nostra equazione sarebbe facilmente risolubile. Questo però non avviene, fatta eccezione per il caso speciale (e banale) in cui si abbia $a(x) = 0$. Viene allora l'idea di considerare l'equazione "equivalente"

  $$F(x)y'(x) + F(x)a(x)y(x) = F(x)g(x), \text{ con } F(x) \in \mathcal{C}^1(I) \text{ e } F(x) \neq 0 \ \forall x \in I. \tag{3.14}$$

  e di cercare una $F(x)$ tale che il primo membro di tale equazione sia la derivata di $F(x)y(x)$. A questo scopo, è sufficiente che $F(x)$ soddisfi l'equazione

  $$F'(x) = F(x)a(x), \tag{3.15}$$

  che è un'equazione differenziale a variabili separate. Ricordando quanto si è scritto in Capitolo 2, ricaviamo le soluzioni non stazionarie di (3.15) da

  $$\frac{F'(x)}{F(x)} = a(x),$$

ovvero

$$D(\ln |F(x)|) = a(x).$$

Per determinare una tale funzione $F(x)$, basterà quindi scegliere una qualsiasi primitiva $A(x)$ di $a(x)$ e porre

$$\ln |F(x)| = A(x).$$

Tale identità è ovviamente equivalente a

$$|F(x)| = e^{A(x)}.$$

Possiamo quindi scegliere come $F(x)$ la funzione $e^{A(x)}$, che è proprio il fattore integrante utilizzato sopra.

- Come abbiamo provato in Sezione 3.2, è possibile risolvere in modo completo l'equazione (3.2) con l'ausilio di un fattore integrante e senza far ricorso a Teorema 1.2.1.

3.2.2 Riferimenti bibliografici

Per una trattazione che include anche l'idea esposta nel secondo punto delle Considerazioni didattiche 3.2.1 si rimanda il lettore a [1].

Capitolo 4

Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine

4.1 Definizione e prime osservazioni

In questo capitolo tratteremo le equazioni ordinarie lineari del second'ordine, che scriveremo nella forma
$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x), \tag{4.1}$$
dove $g, a, b \in \mathcal{C}(I)$, con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$.
Risolvere (4.1) significa determinare tutte le soluzioni $y(x) \in \mathcal{C}^2(I)$ che soddisfano l'uguaglianza.

Osservazione 4.1.1. Per $\varphi \in \mathcal{C}^2(I)$, poniamo
$$L(\varphi) := \varphi'' + a\varphi' + b\varphi.$$
Proprio come in Osservazione 3.1.1, relativa al caso del primo ordine, si prova che L è lineare, cioè che
$$L(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 L(\varphi_1) + \alpha_2 L(\varphi_2)$$
per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^2(I)$.

Da Osservazione 4.1.1, si comprende che lo stesso argomento usato per provare Proposizione 3.1.1 consente di provare anche la seguente corrispondente proprietà.

Proposizione 4.1.1. *Si considerino un'equazione differenziale ordinaria lineare del second'ordine*
$$(Ly)(x) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x) \tag{4.2}$$
e l'equazione differenziale omogenea ad essa associata
$$(Ly)(x) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0, \tag{4.3}$$
dove $g, a, b \in \mathcal{C}(I)$ (I intervallo aperto di $\mathbb{R}$). Allora valgono i seguenti fatti:

(1) Se $\varphi_0 \in \mathcal{C}^2(I)$ è soluzione di (4.2) e $\psi \in \mathcal{C}^2(I)$ è soluzione di (4.3), allora
$$\varphi_0 + \psi$$
è soluzione di (4.2).

(2) Se $\varphi_0, \varphi \in \mathcal{C}^2(I)$ sono soluzioni di (4.2), allora

$$\varphi = \varphi_0 + \psi,$$

con $\psi \in \mathcal{C}^2(I)$ soluzione di (4.3).

Osservazione 4.1.2. Analogamente a Osservazione 3.1.2, è possibile provare (per esempio servendosi del procedimento di riduzione illustrato in Sezione 1.3) che esiste un'unica soluzione $y(x) \in \mathcal{C}^2(I)$ del problema di Cauchy relativo all'equazione (4.1).

Di solito i manuali scolastici affrontano le equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine proponendo "ricette preconfezionate". In queste sezioni forniremo, per quanto possibile, proposte didattiche non preconfezionate per questa tipologia di equazioni. Analizziamo per il momento il caso di equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee e a coefficienti costanti, dunque della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \ , \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

A questo scopo è utile definire l'equazione caratteristica associata a (4.4):

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

4.2 Risoluzione nel caso di un'equazione caratteristica con radici reali

Analizziamo il caso in cui

$$\Delta := a^2 - 4b \geq 0,$$

ovvero il caso in cui le radici del polinomio caratteristico λ_1, λ_2 sono reali. Ricordando che

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -a \\ \lambda_1 \lambda_2 = b \end{cases}$$

si può riscrivere (4.4) come come segue:

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= y''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2)y'(x) + \lambda_1\lambda_2 y(x) \\ &= y''(x) - \lambda_2 y'(x) - \lambda_1 y'(x) + \lambda_1\lambda_2 y(x) \\ &= [y'(x) - \lambda_2 y(x)]' - \lambda_1[y'(x) - \lambda_2 y(x)] \\ &= \varphi'(x) - \lambda_1 \varphi(x), \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\varphi(x) := y'(x) - \lambda_2 y(x). \tag{4.5}$$

Allora (4.4) equivale a

$$\varphi'(x) - \lambda_1 \varphi(x) = 0. \tag{4.6}$$

Osserviamo che (4.6) è un'equazione differenziale lineare del primo ordine (omogenea), pertanto è possibile risolverla utilizzando il metodo del fattore integrante, che in questo caso è $e^{-\lambda_1 x}$. Moltiplicando (4.6) per tale fattore, si ottiene

$$e^{-\lambda_1 x}\varphi'(x) - \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\varphi(x) = 0,$$

ovvero

$$D\left[e^{-\lambda_1 x}\varphi(x)\right] = 0,$$

da cui

$$e^{-\lambda_1 x}\varphi(x) = C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

e quindi

$$\varphi(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}.$$

Ricordando (4.5), si ottiene

$$y'(x) - \lambda_2 y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}. \tag{4.7}$$

Osserviamo che questa è un'equazione differenziale lineare del primo ordine completa, dunque possiamo applicare nuovamente il metodo del fattore integrante, che in questo caso è $e^{-\lambda_2 x}$. Otteniamo

$$e^{-\lambda_2 x}y'(x) - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x},$$

ovvero

$$D[e^{-\lambda_2 x}y(x)] = C_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}. \tag{4.8}$$

A questo punto è necessario distinguere due casi:

- $\underline{\Delta>0\ \text{, cioè } \lambda_1 \neq \lambda_2}$

  Da (4.8) segue

  $$e^{-\lambda_2 x}y(x) = \frac{C_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} + C_2 \qquad (C_2 \in \mathbb{R})$$

  e (ridefinendo la costante C_1) concludiamo

  $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- $\underline{\Delta = 0\text{, cioè } \lambda_1 = \lambda_2 =: \overline{\lambda}}$

  Possiamo riscrivere (4.8) come

  $$D[e^{-\overline{\lambda}x}y(x)] = C_1\ ,$$

  da cui

  $$e^{-\overline{\lambda}x}y(x) = C_1 x + C_2 \qquad (C_2 \in \mathbb{R})$$

  e concludere

  $$y(x) = C_1 x e^{\overline{\lambda}x} + C_2 e^{\overline{\lambda}x}.$$

Osservazione 4.2.1. La trattazione proposta dai manuali scolastici si basa sulla ricerca di soluzioni del tipo $e^{\lambda x}$. La sostituzione di tale espressione nell'equazione porta al "ritrovamento" delle due soluzioni $e^{\lambda_1 x}$ ed $e^{\lambda_2 x}$, se $\Delta>0$, mentre si giunge a scoprire l'unica soluzione $e^{\overline{\lambda}x}$ se $\Delta = 0$. In seguito, questi manuali, affermano (senza provarlo) che :

(1) Se $\Delta>0$, allora l'espressione

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.9}$$

fornisce tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(2) Se $\Delta = 0$ allora è l'espressione

$$C_1 e^{\overline{\lambda} x} + C_2 x e^{\overline{\lambda} x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.10}$$

a fornire tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

Esempio 4.2.1. Risolvere l'equazione differenziale lineare del second'ordine omogenea

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0. \tag{4.11}$$

In questo caso l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

ha due soluzioni reali distinte $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi, procedendo come sopra si ottiene:

$$\begin{aligned} y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) &= y''(x) - (2+3)y'(x) + 2 \cdot 3y(x) \\ &= y''(x) - 2y'(x) - 3y'(x) + 3 \cdot 2y(x) \\ &= [y'(x) - 2y(x)]' - 3[y'(x) - 2y(x)] \\ &= \varphi'(x) - 3\varphi(x), \end{aligned}$$

dove

$$\varphi(x) := y'(x) - 2y(x). \tag{4.12}$$

Risolviamo dunque l'equazione differenziale

$$\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0, \tag{4.13}$$

equivalente a (4.11), con il metodo del fattore integrante. Moltiplichiamo (4.13) per e^{-3x}, ottenendo

$$e^{-3x}\varphi'(x) - 3e^{-3x}\varphi(x) = 0,$$

da cui si ha

$$D[e^{-3x}\varphi(x)] = 0,$$

ovvero

$$\varphi(x) = C_1 e^{3x} \qquad (C_1 \in \mathbb{R}).$$

A questo punto, ricordando (4.12), ci si riconduce alla seguente equazione differenziale (lineare del primo ordine e completa):

$$y'(x) - 2y(x) = C_1 e^{3x}. \tag{4.14}$$

Utilizzando nuovamente il metodo del fattore integrante, moltiplicando (4.14) per e^{-2x}, si svolgono i seguenti passaggi:

$$e^{-2x}y'(x) - 2e^{-2x}y(x) = C_1 e^{-2x}e^{3x}\ ,$$

$$D[e^{-2x}y(x)] = C_1 e^{x}\ ,$$

$$e^{-2x}y(x) = C_1 e^{x} + C_2 \qquad (C_2 \in \mathbb{R})$$

da cui si conclude

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

4.3 Risoluzione nel caso di un'equazione caratteristica che non ha radici reali

Analizziamo il caso in cui

$$\Delta<0,$$

ovvero il caso in cui l'equazione caratteristica non ha radici reali.

I manuali scolastici (di solito) trattano questo caso, fornendo semplicemente la seguente formula per la soluzione generale di (4.4):

$$C_1 e^{-ax/2} \cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) + C_2 e^{-ax/2} \sin\left(\frac{\rho x}{2}\right) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.15}$$

dove

$$\rho := \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4b - a^2}.$$

Se è effettivamente facile verificare che (4.15) è soluzione di (4.4) per ogni scelta delle costanti C_1, C_2, ben più complicato è rispondere alle seguenti questioni:

(1) Come si arriva a scoprire la formula (4.15)?

(2) Come si prova che (4.15) fornisce tutte le soluzioni di (4.4)?

Analizziamo un esempio significativo di equazione differenziale lineare del second'ordine e più precisamente quella con coefficienti $a = 0$ e $b = 1$.

Esempio 4.3.1. Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = 0. \tag{4.16}$$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione caratteristica associata a (4.16)

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

non ha radici reali e quindi (4.16) non può essere risolta con la metodologia presentata in Sezione 4.2.

Proviamo allora a ridurre l'equazione differenziale (4.16) a un'equazione differenziale lineare del primo ordine vettoriale, usando la procedura di Sezione 1.3. Posto

$$z(x) := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

allora si ha che

$$z'(x) := \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ -y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ -z_1(x) \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$z'(x) + \begin{pmatrix} -z_2(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che possiamo riscrivere ancora come

$$z'(x) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Ricordiamo ora che

$$R(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

è l'operatore di rotazione dell'angolo x, cfr. Figura 4.1.

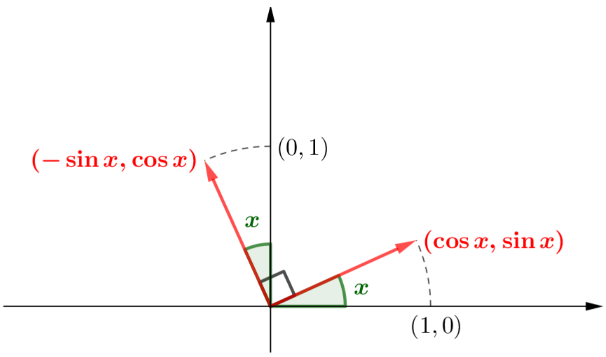


Figura 4.1: Rotazione di un angolo x

In particolare

$$R(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi possiamo riscrivere (4.18) come

$$z'(x) + R(\pi/2)\, z(x) = 0. \tag{4.19}$$

Ci siamo così ricondotti ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine vettoriale. Verifichiamo che applicando ai due membri di (4.19) l'operatore $R(x)$ si trova un'equazione di facile risoluzione. Infatti, così facendo, si ottiene l'equazione equivalente

$$R(x)z'(x) + R(x)R(\pi/2)\, z(x) = 0. \tag{4.20}$$

Poiché la composizione di una rotazione di angolo x con una rotazione di angolo $\pi/2$ equivale ad una rotazione di angolo pari a $x + \pi/2$, si ha

$$\begin{aligned} R(x)R(\pi/2) &= R(x+\pi/2) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x+\pi/2) & -\sin(x+\pi/2) \\ \sin(x+\pi/2) & \cos(x+\pi/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \\ &= R'(x). \end{aligned}$$

Allora possiamo riscrivere (4.20) come

$$R(x)z'(x) + R'(x)z(x) = 0,$$

e cioè, ricordando la formula di Leibniz,

$$[R(x)z(x)]' = 0.$$

Si ha dunque che
$$R(x)z(x) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$
A questo punto, applicando membro a membro l'operatore
$$R(-x) = \begin{pmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) \\ \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix},$$
si ricava
$$z(x) = R(-x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$
cioè, ricordando (4.17),
$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}.$$
In particolare
$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

4.3.1 Riduzione di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine generale a $y'' + y = 0$

In Esempio 4.3.1 abbiamo analizzato l'equazione differenziale particolare (4.16). Ogni altra equazione differenziale lineare del second'ordine (a coefficienti a e b costanti) tale che l'equazione caratteristica ad essa associata non ha radici reali, può essere ricondotta a (4.16) tramite un cambio di variabile.

Esponiamo di seguito la trattazione generale per la risoluzione di
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (a \neq 0, b \neq 1, \Delta<0). \tag{4.21}$$
L'idea da cui partiamo è la seguente: sapendo che $y(x)$ è soluzione di (4.21), vogliamo stabilire quale equazione ha per soluzione
$$z(t) := e^{\alpha t} y(\beta t), \qquad \beta \neq 0. \tag{4.22}$$
Naturalmente (4.22) equivale a
$$y(\beta t) = e^{-\alpha t} z(t), \tag{4.23}$$
da cui:

- derivando, otteniamo
$$\beta y'(\beta t) = -\alpha e^{-\alpha t} z(t) + e^{-\alpha t} z'(t)$$
ovvero
$$y'(\beta t) = -\frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} z(t) + \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} z'(t). \tag{4.24}$$
- Derivando un'altra volta, otteniamo anche
$$\beta y''(\beta t) = \frac{\alpha^2}{\beta} e^{-\alpha t} z(t) - 2\frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} z'(t) + \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} z''(t)$$
ovvero
$$y''(\beta t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} e^{-\alpha t} z(t) - 2\frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\alpha t} z'(t) + \frac{1}{\beta^2} e^{-\alpha t} z''(t). \tag{4.25}$$

Allora, sostituendo (4.23), (4.24) e (4.25) in (4.21), si trova

$$\begin{aligned}0 &= y''(\beta t) + ay'(\beta t) + by(\beta t)\\ &= \left[\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}z(t) - 2\frac{\alpha}{\beta^2}z'(t) + \frac{1}{\beta^2}z''(t)\right) + \left(-\frac{a\alpha}{\beta}z(t) + \frac{a}{\beta}z'(t)\right) + bz(t)\right]e^{-\alpha t}\ ,\end{aligned} \tag{4.26}$$

cioè

$$\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{a\alpha}{\beta} + b\right)z(t) + \left(\frac{a}{\beta} - \frac{2\alpha}{\beta^2}\right)z'(t) + \frac{1}{\beta^2}z''(t) = 0. \tag{4.27}$$

Osservazione 4.3.1. Per ogni scelta di α e β ($\beta \neq 0$) l'equazione (4.27) è equivalente a (4.21), nel senso che:

(1) Se $y(x)$ è soluzione di (4.21) allora $z(t) := e^{\alpha t}y(\beta t)$ è soluzione di (4.27);

(2) Se $z(t)$ è soluzione di (4.27) allora $y(x) := e^{-\alpha x/\beta}z(x/\beta)$ è soluzione di (4.21).

L'idea allora è cercare una coppia di valori (α, β), con $\beta \neq 0$, tale che

$$\begin{cases}\dfrac{a}{\beta} - 2\dfrac{\alpha}{\beta^2} = 0\\ \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} - \dfrac{a\alpha}{\beta} + b = \dfrac{1}{\beta^2}.\end{cases}$$

Tale sistema equivale a

$$\begin{cases}a\beta = 2\alpha\\ \alpha^2 - a\alpha\beta + b\beta^2 = 1\end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases}\alpha = \dfrac{a\beta}{2}\\ \dfrac{a^2\beta^2}{4} - \dfrac{a^2\beta^2}{2} + b\beta^2 = 1\end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases}\alpha = \dfrac{a\beta}{2}\\ \beta^2\left(b - \dfrac{a^2}{4}\right) = 1\end{cases}$$

e ricordando che

$$\rho^2 = -\Delta = 4b - a^2$$

si ottiene

$$\begin{cases}\alpha = \dfrac{a\beta}{2}\\ \beta^2 = \dfrac{4}{\rho^2}.\end{cases}$$

Si conclude dunque che la coppia

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a}{\rho}, \frac{2}{\rho}\right)$$

riduce (4.27) all'equazione differenziale

$$z''(t) + z(t) = 0. \tag{4.28}$$

Poiché sappiamo (da Esempio 4.16) che

$$z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

è soluzione generale di (4.28), da (2) di Osservazione 4.3.1 segue che

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{-\frac{a}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right]\\ &= C_1 e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

è soluzione generale di (4.21).

4.4 Sintesi dei risultati ottenuti

Nelle sezioni precedenti abbiamo provato che la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{4.29}$$

è della forma

$$C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono soluzioni particolari di (4.29). Più precisamente:

- Se l'equazione caratteristica associata a (4.29), ovvero

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{4.30}$$

  ha due radici reali λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), allora

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \phi_2(x) = e^{\lambda_2 x};$$

- Se (4.30) ha un'unica radice reale $\overline{\lambda}$, allora

$$\phi_1(x) = e^{\overline{\lambda}x}, \quad \phi_2(x) = xe^{\overline{\lambda}x};$$

- Se (4.30) non ha radici reali (cioè se $a^2 - 4b<0$), allora

$$\phi_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right), \quad \phi_2(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right), \tag{4.31}$$

  dove $\rho := (4b - a^2)^{1/2}$.

Per ovvie ragioni, le soluzioni particolari $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ vengono anche chiamate "soluzioni fondamentali di (4.29)" .

Osservazione 4.4.1. Grazie a Proposizione 4.1.1, la soluzione generale dell'equazione differenziale completa

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \tag{4.32}$$

($g \in \mathcal{C}(I)$, I intervallo di $\mathbb{R}$) è data da

$$C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \varphi_0(x),$$

dove $\varphi_0(x)$ è una qualsiasi soluzione di (4.32).

4.4.1 Considerazioni didattiche

- I metodi risolutivi illustrati funzionano anche nel caso non omogeneo (come mostra Esempio 4.4.1). Tuttavia, per "economizzare" sul calcolo, di solito è conveniente determinare in un primo tempo la soluzione generale $C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)$ dell'equazione omogenea e in seguito cercare una soluzione φ_0 dell'equazione completa. A questo punto, ricordando Osservazione 4.4.1 , si conclude che la soluzione generale è data da $C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \varphi_0(x)$.
- Nelle Sezioni 4.1, 4.2 e 4.3, abbiamo provato che, come nel caso dell'equazione differenziale lineare del primo ordine, anche l'equazione del secondo ordine (4.1) è risolubile in modo completo con il ricorso iterato al metodo del fattore integrante, senza applicare Teorema 1.2.1.

- Come già accennato, i manuali scolastici trattano quasi sempre il caso delle equazioni differenziali lineari del second'ordine scrivendo la formula della soluzione generale e fornendo solamente motivazioni molto parziali. In alcuni casi invece si utilizza un approccio più costruttivo (benché ancora incompleto), di cui esponiamo qui di seguito un esempio:
  - Considerata l'equazione differenziale
  $$y''(x) + ay'(x) + b = 0 \ , \quad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{4.33}$$
  cerchiamo una soluzione del tipo
  $$y(x) = e^{\lambda x} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$
  Poiché
  $$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{e} \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},$$
  sostituendo in (4.33) si ottiene
  $$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0,$$
  che equivale a
  $$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{4.34}$$
  detta *equazione caratteristica* associata a (4.33).
  - Sia
  $$\Delta := a^2 - 4b,$$
  si distinguono tre casi:
    (1) Se $\Delta > 0$, si determinano le due radici $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ di (4.34). Se ne conclude che
    $$e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad e^{\lambda_2 x}$$
    sono soluzioni di (4.33). Inoltre è ovvio che ogni combinazione lineare di tali soluzioni
    $$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.35}$$
    è soluzione di (4.33). Si può verificare che, in realtà, (4.35) è la soluzione generale di (4.33);
    (2) Se $\Delta = 0$, allora (4.34) ha un'unica radice $\overline{\lambda}$, alla quale corrisponderà la soluzione $e^{\overline{\lambda} x}$ di (4.33). É facile verificare che anche $xe^{\overline{\lambda} x}$ è soluzione di (4.33). Quindi ogni combinazione lineare
    $$C_1 e^{\overline{\lambda} x} + C_2 x e^{\overline{\lambda} x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.36}$$
    è soluzione di (4.33). Anche questa volta si può verificare che, in realtà, (4.36) è la soluzione generale di (4.33).
    (3) Infine, se $\Delta < 0$, si hanno le due soluzioni
    $$e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) \ , \quad e^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\frac{\rho x}{2}\right),$$
    dove $\rho := (4b - a^2)^{1/2}$. Anche in questo caso, ogni combinazione lineare
    $$C_1 e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\frac{\rho x}{2}\right) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.37}$$
    è soluzione di (4.33). Come al solito, si può verificare che (4.37) è la soluzione generale di (4.33).

Il seguente esempio mostra come i metodi risolutivi illustrati sopra funzionino anche nel caso non omogeneo.

Esempio 4.4.1. Risolvere

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x + 1. \tag{4.38}$$

L'equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

ha due soluzioni reali $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$, dunque riscriviamo (4.38) come segue:

$$y''(x) - (-2+1)y'(x) + (-2) \cdot 1 y(x) = x + 1$$

$$y''(x) - y'(x) + 2y'(x) - 2y(x) = x + 1$$

$$[y'(x) - y(x)]' + 2\,[y'(x) - y(x)] = x + 1\ .$$

A questo punto, posto $\varphi(x) := y'(x) - y(x)$, otteniamo la seguente equazione equivalente a (4.38)

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = x + 1,$$

che possiamo risolvere utilizzando il fattore integrante e^{2x}. Si ha dunque

$$\left[e^{2x}\varphi(x)\right]' = e^{2x}(x+1)$$

da cui

$$\begin{aligned}
e^{2x}\varphi(x) &= \int e^{2x}(x+1)dx \\
&= \frac{1}{2}\int D(e^{2x})(x+1)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
&= e^{2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C_1.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2x}\ ,$$

ovvero

$$y'(x) - y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2x}. \tag{4.39}$$

Il fattore integrante di (4.39) è e^{-x}, dunque si ha

$$\left[e^{-x}y(x)\right]' = e^{-x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C_1 e^{-3x}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} e^{-x}y(x) &= \int e^{-x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)dx + C_1\int e^{-3x}dx \\ &= -\int D(e^{-x})\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)dx - \frac{C_1}{3}e^{-3x} + C_2 \qquad (C_2\in\mathbb{R}) \\ &= -e^{-x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\int e^{-x}dx - \frac{C_1}{3}e^{-3x} + C_2 \\ &= -e^{-x}\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right) - \frac{C_1}{3}e^{-3x} + C_2. \end{aligned}$$

Si conclude che

$$y(x) = C_2e^{x} - \frac{C_1}{3}e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}.$$

Capitolo 5

Appendice: approfondimenti

5.1 Formula di derivazione di una funzione composta

Molti manuali scolastici trattano questo argomento facendo ricorso a un uso "disinvolto" (formalmente scorretto) della notazione di Leibniz (analogo a quello descritto all'Esempio 2.0.1). In sintesi, si procede come segue: considerate due funzioni derivabili

$$g : I \longrightarrow J \ , \quad f : J \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (I, J \text{ intervalli di } \mathbb{R})$$

e posto

$$y = g(x), \ z = f(y)$$

si scrive

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)g'(x) \tag{5.1}$$

dove la prima uguaglianza segue da una operazione illecita di divisione e moltiplicazione per dy. Il risultato va quindi interpretato coerentemente alla ben nota formula di derivazione della funzione composta $f \circ g$, e cioè:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{5.2}$$

Il "passaggio illecito" di (5.1), in cui si divide e si moltiplica per dy, è il retaggio di un modo di operare che risale a prima dell'introduzione del concetto di limite.

Tale passaggio corrisponde alla seguente identità corretta, in cui l'incremento h della variabile x è diverso da zero:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \tag{5.3}$$

Una volta che si disponga della nozione di limite, da (5.3) si otterrà (5.2) facendo tendere h a zero.

Osserviamo che, se quest'ultima trattazione è certamente soddisfacente per un contesto di scuola secondaria di secondo grado, tuttavia anch'essa non è completamente al riparo da obiezioni. Infatti l'identità (5.3) ha senso solo per h tale che $g(x+h) \neq g(x)$.

Per completezza vediamo come l'idea alla base di (5.3) possa essere modificata per ottenere una dimostrazione formalmente rigorosa di (5.2).

Per $y \in J$, definiamo

$$R(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x))}{y - g(x)} & \text{se } y \neq g(x) \\ f'(g(x)) & \text{se } y = g(x). \end{cases} \tag{5.4}$$

Osserviamo che R è continua in $g(x)$. Infatti:

$$\lim_{y \to g(x)} R(y) = f'(g(x)) = R(g(x)).$$

Dunque si ha

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = R(g(x+h)) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

per ogni $x \in I$ e h sufficientemente piccolo (affinché $x + h \in I$). Passando al limite per $h \to 0$ e ricordando che g è continua in x (essendo essa derivabile in x), si trova

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} R(g(x+h)) \frac{g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= R(g(x))g'(x) \\ &= f'(g(x))g'(x). \end{aligned}$$

5.2 Formula di integrazione per sostituzione

(1) **Formula per il cambio della variabile nell'integrale indefinito**:

Se $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f : I \to \mathbb{R}$ (I sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$), allora

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ , \ C \in \mathbb{R} \ (x \in I).$$

Sia $\varphi : I \to J$ una funzione derivabile e invertibile (con $J \subset I$) e indichiamo con $\psi : J \to I$ l'inversa di φ. Allora vale

$$\int f(x)dx = \Big[F(\varphi(t)) + C\ \Big]_{t=\psi(x)} = \Big[\int [F(\varphi(t))]'\, dt\Big]_{t=\psi(x)}.$$

Quindi, per la formula di derivazione della funzione composta si conclude

$$\int f(x)dx = \Big[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big]_{t=\psi(x)}. \tag{5.5}$$

Esempio 5.2.1. Calcolare

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx.$$

Consideriamo

$$\varphi : \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to (-1, 1) \ , \quad \varphi(t) := \sin t$$

sicché

$$\psi : (-1, 1) \to \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \ , \quad \psi(x) = \arcsin x.$$

Allora, applicando (5.5), si ottiene

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \left[\int \sqrt{1-(\sin t)^2}D(\sin t))dt\right]_{t=\arcsin x}\\ &= \left[\int \cos t \cos t dt\right]_{t=\arcsin x}\\ &= \left[\int (\cos t)^2 dt\right]_{t=\arcsin x}\\ &= \left[\int \frac{\cos(2t)+1}{2}dt\right]_{t=\arcsin x}\\ &= \left[\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{t}{2}\right]_{t=\arcsin x} + C \qquad (C \in \mathbb{R})\\ &= \left[\frac{\cos t \sin t}{2}+\frac{t}{2}\right]_{t=\arcsin x} + C\\ &= \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x + C.\end{aligned}$$

(2) **Formula per il cambio della variabile nell'integrale definito**:

Osserviamo che il risultato provato in (1) può essere riformulato come segue: se $P(t)$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, allora $P(\psi(x))$ è una primitiva di $f(x)$. Quindi, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (applicato due volte), si ha

$$\int_a^b f(x)dx = P(\psi(b)) - P(\psi(a)) = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{5.6}$$

Esempio 5.2.2. Calcolare

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Usando lo stesso cambio di variabile di Esempio 5.2.1 , otteniamo da (5.6)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \sqrt{1-(\sin t)^2}D(\sin t)dt$$

da cui, trattando la funzione integranda come in Esempio 5.2.1 segue

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}dt.$$

A questo punto usiamo il Teorema fondamentale del Calcolo, per cui

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

5.3 Approfondimento sul fattore integrante del sistema differenziale $z' + R(\pi/2)z = 0$, esponenziale di matrice

Vogliamo chiarire meglio come mai il fattore integrante dell'equazione differenziale (4.19), cioè

$$z'(x) + Mz(x) = 0, \quad M := R(\pi/2), \tag{5.7}$$

sia proprio

$$R(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

L'idea viene richiamando la procedura di integrazione dell'equazione differenziale lineare, omogenea e a coefficienti costanti

$$y'(x) + my(x) = 0 \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

In questo caso, un fattore integrante è

$$F(x) = e^{mx}.$$

Poiché

$$e^{mx} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(xm)^n}{n!},$$

è naturale "candidare al ruolo di fattore integrante" di (5.7) l'espressione

$$I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(xM)^n}{n!}, \tag{5.8}$$

dove I è la matrice identità. Osservando che

$$\begin{aligned} M^2 &= R(\pi/2)^2 = R(\pi) = -I \ , \\ M^3 &= M^2 M = -M \ , \\ M^4 &= M^2 M^2 = I \ , \\ M^5 &= M^4 M = M, \quad \text{(eccetera)} \end{aligned}$$

l'espressione (5.8) può essere (informalmente) rielaborata come segue:

$$\begin{aligned} I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} M^n &= I + xM + \frac{(xM)^2}{2!} + \frac{(xM)^3}{3!} + \frac{(xM)^4}{4!} + \frac{(xM)^5}{5!} + ... \\ &= I + xM - \frac{x^2}{2!} I - \frac{x^3}{3!} M + \frac{x^4}{4!} I + \frac{x^5}{5!} M + ... \\ &= I \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + M \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Ricordando ora che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \quad , \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \ ,$$

concludiamo che l'espressione (5.8) equivale a

$$\begin{aligned} I \cos x + M \sin x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin x \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \\ &= R(x). \end{aligned}$$

5.4 Metodo di variazione delle costanti arbitrarie per la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione differenziale del secondo ordine completa

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \tag{5.9}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $g \in \mathcal{C}(I)$, con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Siano inoltre ϕ_1 e ϕ_2 le soluzioni fondamentali di (5.9), cfr. Sezione 4.4.

Proviamo a cercare soluzioni di (5.9) della forma

$$\varphi(x) := c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x) \tag{5.10}$$

con $c_1, c_2 \in \mathcal{C}^1(I)$. A tale scopo, incominciamo a calcolare $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) = c_1(x)\phi_1'(x) + c_2(x)\phi_2'(x) + c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x).$$

Supponiamo ora che c_1 e c_2 siano scelte di modo che

$$c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) = 0 \qquad \text{(per ogni } x \in I). \tag{5.11}$$

Allora si ha

$$\varphi'(x) = c_1(x)\phi_1'(x) + c_2(x)\phi_2'(x) \qquad \text{(per ogni } x \in I).$$

Derivando di nuovo, otteniamo:

$$\varphi''(x) = c_1(x)\phi_1''(x) + c_2(x)\phi_2''(x) + c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x).$$

Se assumiamo ora che c_1 e c_2 soddisfino (oltre a (5.11)) anche la condizione

$$c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) = g(x) \qquad \text{(per ogni } x \in I)$$

allora si avrà:

$$\begin{aligned}\varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) =& g(x) + c_1(x)\left[\phi_1''(x) + a\phi_1'(x) + b\phi_1(x)\right] + \\ &+ c_2(x)\left[\phi_2''(x) + a\phi_2'(x) + b\phi_2(x)\right] + \\ =& g(x).\end{aligned}$$

Abbiamo così provato che la funzione $\varphi(x)$ definita in (5.10) è soluzione di (5.9) se c_1, c_2 sono funzioni in $\mathcal{C}^1(I)$ soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) = g(x) \end{cases} \qquad \text{(per ogni } x \in I),$$

ossia

$$W(x)\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad \text{(per ogni } x \in I) \tag{5.12}$$

con

$$W(x) := \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix}.$$

La matrice $W(x)$ è detta "il Wronskiano (associato alla coppia $(\phi_1(x), \phi_2(x))$ di soluzioni fondamentali)".

Relativamente ai tre casi $\Delta>0$, $\Delta = 0$ e $\Delta<0$ (dove $\Delta = a^2 - 4b$) si ha:

- Se $\Delta>0$ (indicando con λ_1 e λ_2 le due radici reali dell'equazione caratteristica), il Wronskiano associato alla coppia do soluzioni fondamentali

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \phi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

è

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det W(x) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Ne segue che $W(x)$ è invertibile (per ogni $x \in I$) e si ha

$$W(x)^{-1} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & -e^{\lambda_2 x} \\ -\lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{-\lambda_1 x} & -e^{-\lambda_1 x} \\ -\lambda_1 e^{-\lambda_2 x} & e^{-\lambda_2 x} \end{pmatrix}.$$

Da questa e da (5.12), possiamo finalmente ricavare $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ (e quindi, in seguito, $c_1(x)$ e $c_2(x)$):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{-\lambda_1 x} & -e^{-\lambda_1 x} \\ -\lambda_1 e^{-\lambda_2 x} & e^{-\lambda_2 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1 x} \\ e^{-\lambda_2 x} \end{pmatrix} g(x). \end{aligned} \tag{5.13}$$

- Se $\Delta = 0$ (indicando con $\overline{\lambda}$ l'unica radice reale dell'equazione caratteristica), il Wronskiano associato alla coppia di soluzioni fondamentali

$$\phi_1(x) = e^{\overline{\lambda}x}, \quad \phi_2(x) = xe^{\overline{\lambda}x}$$

è

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{\overline{\lambda}x} & xe^{\overline{\lambda}x} \\ \overline{\lambda}e^{\overline{\lambda}x} & e^{\overline{\lambda}x}(1+\overline{\lambda}x) \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det W(x) = e^{2\overline{\lambda}x} \neq 0.$$

Quindi anche in questo caso $W(x)$ è invertibile (per ogni $x \in I$) e si ha

$$W(x)^{-1} = e^{-2\overline{\lambda}x} \begin{pmatrix} e^{\overline{\lambda}x}(1+\overline{\lambda}x) & -xe^{\overline{\lambda}x} \\ -\overline{\lambda}e^{\overline{\lambda}x} & e^{\overline{\lambda}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\overline{\lambda}x}(1+\overline{\lambda}x) & -xe^{-\overline{\lambda}x} \\ -\overline{\lambda}e^{-\overline{\lambda}x} & e^{-\overline{\lambda}x} \end{pmatrix}.$$

Questa volta, da (5.12) otteniamo allora

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-\overline{\lambda}x}(1+\overline{\lambda}x) & -xe^{-\overline{\lambda}x} \\ -\overline{\lambda}e^{-\overline{\lambda}x} & e^{-\overline{\lambda}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} g(x)e^{-\overline{\lambda}x}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

- Se $\Delta<0$, il Wronskiano associato alla coppia di soluzioni fondamentali (cfr.Sezione 4.3.1).

$$\phi_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right), \quad \phi_2(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right),$$

dove $\rho = (4b-a^2)^{1/2}$, è

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) & e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right) \\ -e^{-\frac{a}{2}x}\left[\frac{a}{2}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right] & e^{-\frac{a}{2}x}\left[-\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right] \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned} \det W(x) &= e^{-ax}\left[-\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\cos^2\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\sin^2\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\rho}{2}e^{-ax} \neq 0. \end{aligned}$$

Dunque, anche in questo caso, $W(x)$ è invertibile (per ogni $x \in I$) e si ha

$$W(x)^{-1} = \frac{2}{\rho}e^{ax}\begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{2}x}\left[-\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right] & -e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right) \\ e^{-\frac{a}{2}x}\left[\frac{a}{2}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right] & e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Da questa e da (5.12) otteniamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \frac{2}{\rho}e^{ax}\begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{2}x}\left[-\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right] & -e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right) \\ e^{-\frac{a}{2}x}\left[\frac{a}{2}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right)+\frac{\rho}{2}\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right)\right] & e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\rho}\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\rho x}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\rho x}{2}\right) \end{pmatrix} g(x)e^{\frac{a}{2}x}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dalle identità (5.13), (5.14) e (5.15), si ricaveranno i coefficienti $c_1(x)$ e $c_2(x)$ che sostituiti in (5.10) porteranno a una soluzione particolare $\varphi(x)$ dell'equazione differenziale (5.9).

Capitolo 6

Prototipi di esercizi e di risoluzioni

Proponiamo di seguito una serie di “esercizi prototipo” per gli argomenti risolutivi illustrati in queste note.

Esercizio 6.0.1. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = -2(x+1)y^2(x) \\ y(1) = \dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 1.1 e Capitolo 2):
Osserviamo innanzitutto che tale problema di Cauchy è del tipo (2.4) con $g(x) = 2(x+1)$ e $h(y) = -y^2$ e quindi esso verifica le ipotesi di Teorema 1.2.1 con

$$A = \mathbb{R}^2 \ , \quad f(x,y) = g(x)h(y) = -2(x+1)y^2.$$

Dunque è possibile risolvere tale equazione differenziale con il metodo delle variabili separate.

- soluzioni stazionarie: L'unica radice di h è 0 e quindi la funzione $y(x) = 0$ è l'unica soluzione stazionaria dell'equazione differenziale. Tale soluzione però non soddisfa evidentemente il problema di Cauchy (6.1).

- soluzioni non stazionarie: Come abbiamo osservato in Capitolo 2, grazie a Teorema 1.2.1, tali soluzioni $y(x)$ non assumono mai i valori delle soluzioni stazionarie (che in questo caso si riducono alla sola funzione identicamente nulla). Quindi $h(y(x)) = -y^2(x) \neq 0$, per ogni x nel dominio della soluzione. É dunque lecito dividere membro a membro per $h(y(x))$, ottenendo
$$-\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 2(x+1),$$
ovvero
$$D\left(\frac{1}{y(x)}\right) = 2x+2.$$
Allora, la famiglia di soluzioni non stazionarie dell'equazione differenziale relativa al problema (6.1) è
$$y(x) = \frac{1}{x^2+2x+C} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Imponendo ora la condizione iniziale
$$\frac{1}{4} = y(1) = \frac{1}{1+2+C},$$
si ottiene $C = 1$ e si conclude che
$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \tag{6.2}$$
è soluzione del problema di Cauchy (6.1).

Precisiamo che tale funzione non è definita su tutto $\mathbb{R}$, nonostante che $A = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (proprio come succede in Esempio 1.2.1). L'identità (6.2) ci mostra che l'intervallo più grande che si può assumere come dominio della soluzione è $(-1, +\infty)$.

Esercizio 6.0.2. *Risolvere la seguente equazione differenziale*
$$y'(x) = 2x \cos^2 y(x). \tag{6.3}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 1.1 e Capitolo 2):
Anche in questo caso abbiamo un'equazione differenziale a variabili separate $y'(x) = g(x)h(y(x))$ con
$$g(x) = 2x, \; h(y) = \cos^2 y$$
quindi essa verifica le ipotesi di Teorema 1.2.1 con
$$A = \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = g(x)h(y) = 2x\cos^2 y.$$
Possiamo risolvere tale equazione differenziale con il metodo delle variabili separate:

- <u>soluzioni stazionarie</u>: L'insieme delle radici di h è
$$R = h^{-1}(0) = \left\{\frac{\pi}{2} + K\pi \;\middle|\; K \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Quindi le soluzioni stazionarie sono tutte e sole le funzioni
$$y(x) = \frac{\pi}{2} + K\pi, \quad x \in \mathbb{R} \;\; (K \in \mathbb{Z}). \tag{6.4}$$

- <u>soluzioni non stazionarie</u>: Come abbiamo osservato in Capitolo 2, grazie a Teorema 1.2.1), tali soluzioni $y(x)$ non assumono mai i valori assunti delle soluzioni stazionarie (6.4). Quindi $h(y(x)) = \cos^2 y(x) \neq 0$, per ogni x nel dominio della soluzione. Possiamo quindi dividere per $\cos^2 y(x)$ ottenendo
$$\frac{y'(x)}{\cos^2 y(x)} = 2x$$
cioè
$$D(\tan y(x)) = 2x$$
da cui
$$\tan y(x) = x^2 + C \qquad (C \in \mathbb{R}).$$
A questo punto, per ricavare la famiglia di soluzioni non stazionarie, occorre poter invertire la funzione tangente, che però, come sappiamo, è biettiva solo se la si restringe a un intervallo del tipo $I_k := (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Definiamo dunque la famiglia di funzioni
$$T_k := \tan_{|(k\pi-\pi/2, k\pi+\pi/2)} : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$$
per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Come abbiamo osservato, ogni funzione T_k è invertibile. Inoltre:

– $T_0^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow I_0 = (-\pi/2, \pi/2)$ è la funzione solitamente indicata con arctan.

– $T_k^{-1}(x) := T_0^{-1}(x) + k\pi = \arctan x + k\pi, \quad (x \in \mathbb{R})$.

Allora, la famiglia di soluzioni non stazionarie di (6.3) è

$$y(x) = \arctan(x^2 + C) + k\pi \quad (C \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Quanto al problema di Cauchy relativo a (6.3), cioè

$$\begin{cases} y'(x) = 2x \cos^2 y(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.5}$$

possiamo concludere che:

- Se $y_0 \in R$, cioè $y_0 = \pi/2 + K_0\pi$ per un certo $K_0 \in \mathbb{Z}$, allora $y(x) = \pi/2 + K_0\pi$ è l'unica soluzione di (6.5) e tale soluzione è stazionaria.

- Se invece $y_0 \in R$ allora, considerato $k_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $y_0 \in I_{K_0}$, esisterà uno ed un solo $C_0 \in \mathbb{R}$ tale che
$$y_0 = \arctan(x_0^2 + C_0) + k_0\pi$$
(vedi Figura 6.1) e quindi
$$y(x) = \arctan(x^2 + C_0) + k_0\pi$$
sarà l'unica soluzione di (6.5). Tale soluzione non è stazionaria.

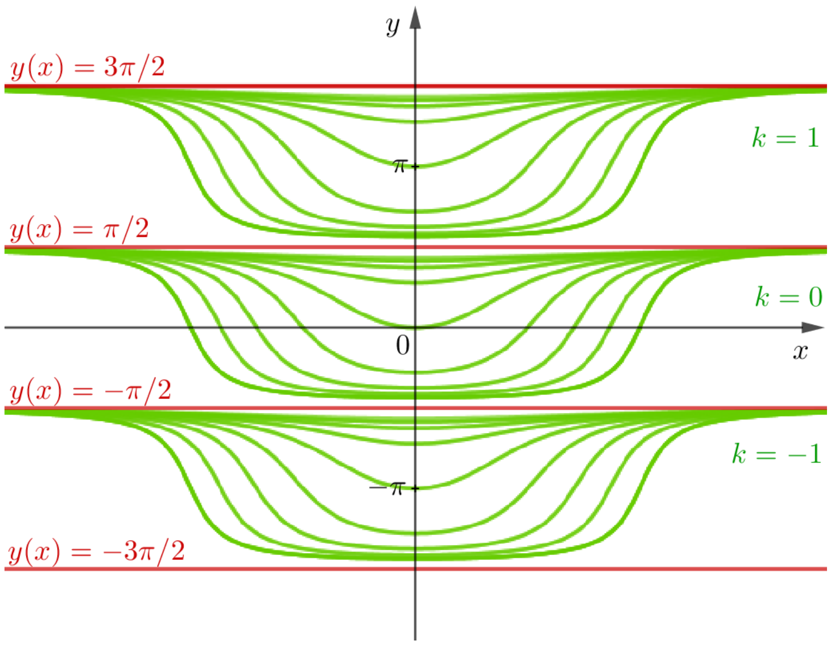


Figura 6.1: Rappresentazione grafica delle soluzioni di(6.3)

Esercizio 6.0.3. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) + 2e^{-x}(x+1) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ y(0) = -1. \end{cases} \tag{6.6}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 3.2):
Risolviamo innanzitutto l'equazione differenziale associata al problema di Cauchy (6.6). Poiché $A(x) = x$ è una primitiva di $a(x) = 1$, il fattore integrante corrispondente è e^x.

Moltiplicando l'equazione differenziale per tale fattore, otteniamo

$$e^x y'(x) + e^x y(x) + 2e^x e^{-x}(x+1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$D\left(e^x y(x)\right) = -2(x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

da cui ricaviamo la soluzione generale dell'equazione differenziale considerata

$$y(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + C), \quad x \in \mathbb{R} \ (C \in \mathbb{R}).$$

Imponendo ora la condizione iniziale

$$-1 = y(0) = -C,$$

si ottiene $C = 1$ e si conclude che

$$y(x) = -e^{-x}(x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

è soluzione del problema di Cauchy (6.6).

Esercizio 6.0.4. *Risolvere la seguente equazione differenziale*

$$y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = x \cos x, \quad x \in (0, +\infty). \tag{6.7}$$

Risoluzione (cfr. Srzione 3.2):
Osserviamo che $A(x) = -\ln(x) = \ln(1/x)$ è una primitiva di $a(x) = -1/x$. Il corrispondente fattore integrante è quindi

$$e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Moltiplicando (6.7) per tale fattore, otteniamo

$$\frac{1}{x} y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) = \frac{1}{x} x \cos x, \quad x \in (0, +\infty)$$

ovvero

$$D\left(\frac{1}{x} y(x)\right) = \cos x, \quad x \in (0, +\infty)$$

e cioè

$$\frac{1}{x} y(x) = \sin x + C \ , \quad x \in (0, +\infty) \ \ (C \in \mathbb{R})$$

da cui si deriva la soluzione generale di (6.7):

$$y(x) = x(\sin x + C), \quad x \in (0, +\infty).$$

Esercizio 6.0.5. *Risolvere la seguente equazione differenziale*

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 4e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 4.2 e Sezione 4.4.1)
L'equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

ha due soluzioni reali $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 1$ e quindi possiamo riscrivere (6.8) con i coefficienti così decomposti:

$$y''(x) - (-3+1)y'(x) + (-3) \cdot 1y(x) = 4e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

da cui

$$y''(x) + 3y'(x) - y'(x) - 3y(x) = 4e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

ossia

$$[y'(x) + 3y(x)]' - [y'(x) + 3y(x)] = 4e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A questo punto, posto $\varphi(x) := y'(x) + 3y(x)$, otteniamo

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = 4e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

che possiamo risolvere moltiplicando per il fattore integrante e^{-x}. Si trova dunque

$$D\left[e^{-x}\varphi(x)\right] = 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

da cui ricaviamo

$$\varphi(x) = e^x(4x + C_1), \quad x \in \mathbb{R}\ (C_1 \in \mathbb{R})$$

ovvero

$$y'(x) + 3y(x) = e^x(4x + C_1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.9}$$

Il fattore integrante di (6.9) è e^{3x}, e dunque (moltiplicando) si ottiene

$$D\left[e^{3x}y(x)\right] = e^{4x}(4x + C_1), \quad x \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
e^{3x}y(x) &= \int 4xe^{4x}dx + C_1 \int e^{4x}dx \\
&= \int D(e^{4x})xdx + \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2 \\
&= xe^{4x} - \int e^{4x}dx + \frac{C_1}{4}e^{4x} + C_2 \\
&= e^{4x}\left(x - \frac{1}{4} + \frac{C_1}{4}\right) + C_2, \quad x \in \mathbb{R}\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Si conclude che la soluzione generale di (6.8) è del tipo

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} + xe^x, \quad x \in \mathbb{R}\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Esercizio 6.0.6. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{6.10}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 4.2 e Sezione 4.4.1):
Innanzitutto risolviamo l'equazione differenziale relativa al problema di Cauchy (6.10), in un secondo momento imporremo anche le condizioni iniziali.

L'equazione caratteristica associata
$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$
ha un'unica soluzione reale $\overline{\lambda} = 2$, dunque possiamo riscrivere l'equazione differenziale come segue
$$y''(x) - (2+2)y'(x) + 2 \cdot 2y(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
cioè
$$y''(x) - 2y'(x) - 2y'(x) + 4y(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
ovvero
$$[y'(x) - 2y(x)]' - 2\,[y'(x) - 2y(x)] = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
A questo punto, posto $\varphi(x) := y'(x) - 2y(x)$, otteniamo
$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
che possiamo risolvere utilizzando il fattore integrante e^{-2x}. Si trova dunque
$$D[e^{-2x}\varphi(x)] = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$
da cui
$$e^{-2x}\varphi(x) = -e^{-x} + C_1, \quad x \in \mathbb{R}\ (C_1 \in \mathbb{R}).$$
Otteniamo quindi
$$\varphi(x) = -e^x + C_1 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$
ossia
$$y'(x) - 2y(x) = -e^x + C_1 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$
Il fattore integrante di (6.11) è e^{-2x}, dunque si trova
$$D(e^{-2x}y(x)) = -e^{-x} + C_1, \quad x \in \mathbb{R}$$
o equivalentemente
$$\begin{aligned} e^{-2x}y(x) &= \int -e^{-x}dx + C_1 \int 1dx \\ &= e^{-x} + C_1 x + C_2, \quad x \in \mathbb{R}\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$
Allora
$$y(x) = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x} + e^x \quad x \in \mathbb{R}\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$
è la soluzione generale dell'equazione differenziale in considerazione.

Osservando che
$$y'(x) = C_1(e^{2x} + 2C_2 x e^{2x}) + 2e^{2x} + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
e imponendo ora la condizione iniziale
$$\begin{cases} 2 = y(0) = C_2 + 1 \\ 1 = y'(0) = C_1 + 2C_2 + 1 \end{cases}$$
si ricavano facilmente $C_2 = 1$ e $C_1 = -2$, per cui si conclude che
$$y(x) = -2xe^{2x} + e^{2x} + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
è la soluzione del problema di Cauchy (6.10).

Esercizio 6.0.7. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 4.4):
Innanzitutto risolviamo l'equazione differenziale relativa al problema di Cauchy (6.12). In un secondo momento imporremo anche le condizioni iniziali. L'equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

non ha soluzioni reali, poiché

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 5 = -4<0.$$

Calcoliamo

$$\rho = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

e scriviamo le soluzioni fondamentali sostituendo in (4.31) i valori $a = 4$ e $\rho = 2$:

$$\phi_1(x) = e^{-2x} \cos x, \quad \phi_2(x) = e^{-2x} \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è dunque

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Osservando che

$$y'(x) = C_1(-2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \sin x) + C_2(-2e^{-2x} \sin x + e^{-2x} \cos x), \quad x \in \mathbb{R}$$

e imponendo ora la condizione iniziale

$$\begin{cases} 1 = y(0) = C_1 \\ 0 = y'(0) = -2C_1 + C_2 \end{cases}$$

si ricavano facilmente $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$, per cui si conclude che

$$y(x) = e^{-2x} \cos x + 2e^{-2x} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

è la soluzione del problema di Cauchy (6.12).

Esercizio 6.0.8. *Risolvere la seguente equazione differenziale*

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.13}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 4.4 e 4.1):
Risolviamo innanzitutto l'equazione differenziale omogenea associata a (6.13), cioè

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.14}$$

L'equazione caratteristica di (6.14)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

non ha soluzioni reali, poiché

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0.$$

Calcoliamo

$$\rho = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

e scriviamo le soluzioni fondamentali di (6.14) sostituendo in (4.31) i valori $a = 2$ e $\rho = 2$:

$$\phi_1(x) = e^{-x} \cos x, \quad \phi_2(x) = e^{-x} \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La soluzione generale di (6.14) è dunque

$$\psi(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Proviamo a cercare una soluzione particolare $\varphi_0(x)$ di (6.13) tra le funzioni della forma

$$\varphi_0(x) = (\alpha x + \beta) e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Con l'intento di determinare α e β, deriviamo due volte la candidata soluzione, trovando

$$\varphi_0'(x) = \alpha e^x + (\alpha x + \beta) e^x = (\alpha x + \alpha + \beta) e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$\varphi_0''(x) = \alpha e^x + (\alpha x + \alpha + \beta) e^x = (\alpha x + 2\alpha + \beta) e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A questo punto sostituendo tali espressioni in (6.13) si ottiene

$$5\alpha x + 4\alpha + 5\beta = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

che equivale alla condizione

$$\begin{cases} 5\alpha = 1 \\ 4\alpha + 5\beta = 0. \end{cases}$$

da cui segue che $\alpha = 1/5$ e $\beta = -4/25$. Allora

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25} \right) e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

è una soluzione particolare di (6.13).

Infine, ricordando Proposizione 4.1.1, si conclude che

$$\varphi(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25} \right) e^x$$

è la soluzione generale di (6.13).

Esercizio 6.0.9. *Risolvere la seguente equazione differenziale*

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 4.4 e Sezione 4.1):
Risolviamo innanzitutto l'equazione differenziale omogenea associata a (6.15), cioè

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.16}$$

L'equazione caratteristica di (6.16)

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, dunque le soluzioni fondamentali di (6.16) sono

$$\phi_1(x) = e^{2x}, \quad \phi_2(x) = e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La soluzione generale di (6.16) è dunque

$$\psi(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare $\varphi_0(x)$ di (6.15).

- Dapprima cerchiamola della forma

  $$\varphi_0(x) = \alpha e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.17}$$

  con $\alpha \in \mathbb{R}$. Con l'intento di determinare α, deriviamo due volte la candidata soluzione, trovando

  $$\varphi_0'(x) = 2\alpha e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  e

  $$\varphi_0''(x) = 4\alpha e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

  A questo punto sostituendo tali espressioni in (6.15) si ottiene

  $$4\alpha e^{2x} - 2\alpha e^{2x} - 2\alpha e^{2x} = 3e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  che equivale all'equazione impossibile

  $$0\alpha = 3.$$

  Non esiste dunque $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che (6.17) sia soluzione particolare di (6.15).

- In seguito al tentativo fallito fatto nel punto precedente, proviamo ora a cercare una soluzione della forma

  $$\varphi_0(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Con l'intento di determinare α e β, deriviamo due volte la candidata soluzione, trovando

  $$\varphi_0'(x) = \alpha e^{2x} + 2(\alpha x + \beta)e^{2x} = (2\alpha x + \alpha + 2\beta)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  e

  $$\varphi_0''(x) = 2\alpha e^{2x} + 2(2\alpha x + \alpha + 2\beta)e^{2x} = (4\alpha x + 4\alpha + 4\beta)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

  A questo punto sostituendo tali espressioni in (6.15) si ottiene

  $$(4\alpha x + 4\alpha + 4\beta)e^{2x} - (2\alpha x + \alpha + 2\beta)e^{2x} - 2(\alpha x + \beta)e^{2x} = 3e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  cioè

  $$3\alpha + 0\beta = 3.$$

  Se ne deduce che $\alpha = 1$, mentre il valore β resta indeterminato. Allora l'espressione

  $$\varphi_0(x) = (x + \beta)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  è una soluzione particolare di (6.15), per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

Infine, ricordando Proposizione 4.1.1 e fissando $\beta = 0$ (per esempio), si conclude che

$$\varphi(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R} \ \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

è la soluzione generale di (6.15).

Esercizio 6.0.10. *Risolvere la seguente equazione differenziale*

$$y''(x) + 6y'(x) + 10y(x) = e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.18}$$

Risoluzione (cfr. Sezione 4.4 e Sezione 5.4):
Per risolvere tale equazione differenziale scegliamo di applicare il "metodo di variazione delle costanti arbitrarie". Cerchiamo dunque $c_1(x)$ e $c_2(x)$ tali che

$$\varphi(x) = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.19}$$

sia una soluzione di (6.18).

L'equazione caratteristica associata a (6.18), cioè

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0,$$

non ha soluzioni reali, poiché

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 10 = -4 < 0.$$

Calcoliamo

$$\rho = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

e scriviamo le soluzioni fondamentali sostituendo in (4.31) i valori $a = 6$ e $\rho = 2$:

$$\phi_1(x) = e^{-3x}\cos x, \quad \phi_2(x) = e^{-3x}\sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Per evitare il ricorso "meccanico" alle formule di Sezione 5.4, scriviamo esplicitamente il Wronskiano $W(x)$ associato a questa coppia di soluzioni fondamentali e calcoliamone l'inversa. Si ha

$$W(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x}\cos x & e^{-3x}\sin x \\ e^{-3x}(-3\cos x - \sin x) & e^{-3x}(-3\sin x + \cos x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\det W(x) = e^{-6x}(-3\sin x\cos x + \cos^2 x + 3\sin x\cos x + \sin^2 x) = e^{-6x} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\begin{aligned} W^{-1}(x) &= e^{6x}\begin{pmatrix} e^{-3x}(-3\sin x + \cos x) & -e^{-3x}\sin x \\ e^{-3x}(3\cos x + \sin x) & e^{-3x}\cos x \end{pmatrix} \\ &= e^{3x}\begin{pmatrix} -3\sin x + \cos x & -\sin x \\ 3\cos x + \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A questo punto, ricordando (5.12), otteniamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= W^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \\ &= e^{3x}\begin{pmatrix} -3\sin x + \cos x & -\sin x \\ 3\cos x + \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix} \\ &= e^{x}\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ovvero

$$c_1'(x) = -e^x \sin x\ , \quad c_2'(x) = e^x \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.20}$$

Osserviamo che tale risultato è coerente a (5.15).

Dalla prima identità di (6.20), integrando per parti, si ricava

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \int e^x(-\sin x)dx = \int e^x D(\cos x)dx \\
&= e^x \cos x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x D(\sin x)dx \\
&= e^x \cos x - e^x \sin x + \int e^x \sin x dx \\
&= e^x(\cos x - \sin x) - c_1(x), \qquad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$c_1(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C_1, \quad x \in \mathbb{R} \ \ (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Analogamente, dalla seconda identità di (6.20), si ricava

$$\begin{aligned}
c_2(x) &= \int e^x(\cos x)dx = \int e^x D(\sin x)dx \\
&= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + \int e^x D(\cos x)dx \\
&= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \\
&= e^x(\sin x + \cos x) - c_2(x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e quindi

$$c_2(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C_2, \quad x \in \mathbb{R} \ \ (C_2 \in \mathbb{R}).$$

Ricordando (6.19), si conclude che

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left[\frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C_1\right] e^{-3x} \cos x + \left[\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C_2\right] e^{-3x} \sin x \\
&= C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x + \frac{1}{2}e^{-2x} \left[\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x\right] \\
&= C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x + \frac{1}{2}e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R} \ \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

è la soluzione generale di (6.18).

Bibliografia

[1] F. Conti, P. Acquistapace, A. Savojni: *Analisi matematica, Teoria e applicazioni*. McGraw-Hill. (2001).

[2] F.Flandoli: *Introduzione all'analisi matematica*. McGraw-Hill. (1998).

[3] E.Giusti: *Analisi Matematica 2, programma di matematica fisica elettronica*. (Seconda edizione). Bollati Boringhieri. (1995)