Introduzione

Cosa contiene e a chi è rivolto il volume?

Il presente lavoro è costituito da materiali per la realizzazione di Percorsi didattici sul tema della probabilità nella scuola secondaria di secondo grado, per il primo e secondo biennio. Esso può fornire notevoli spunti anche per la secondaria di primo grado. Le attività descritte sono motivate e organizzate in uno schema unitario, coerente con le Indicazioni nazionali e le Linee guida della Provincia Autonoma di Trento.

Il materiale presentato in questo lavoro è rivolto essenzialmente ai docenti, ma si presta facilmente ad essere adattato per essere messo a disposizione degli studenti. Sulla base dei materiali proposti e delle precise indicazioni fornite, l'insegnante potrà ritagliare il proprio Percorso, modulandolo in base alle esigenze della classe e al contesto didattico.

Il materiale è costituito da:

- descrizioni di attività didattiche, con motivazioni delle scelte effettuate, arricchite da tracce di lavoro per lo studente; esse prevedono l'utilizzo di semplici oggetti materiali (dadi, carte, …) oppure di strumenti informatici (foglio elettronico, Geogebra);
- esercizi risolti;
- scelte motivate dei contenuti da proporre allo studente e loro declinazione in una forma adeguata per il primo biennio;
- letture mirate e approfondimenti su alcuni aspetti specifici presenti nel testo;
- indicazioni bibliografiche e sitografiche di materiali significativi, tra cui brevi video didattici.

Il testo è inoltre corredato di un fascicolo che illustra alcuni Percorsi effettivamente realizzati in classe sulla base dei materiali proposti.

Oltre i contenuti

Per iniziare, nel **capitolo 1** si prospettano alcuni **contesti motivanti** per gli studenti: giochi d'azzardo; alcol test, test antidoping e test clinici; numeri ritardatari al gioco del Lotto e compensazione, misconcetti; casi giudiziari; approfondimenti genetici e storici… Le diverse situazioni sono introdotte mediante domande-stimolo cui si risponderà solo nel seguito del volume, dopo aver sviluppato gli strumenti matematici che consentono di esaminarle razionalmente.
Dunque, in sintesi: prima l'esplorazione e poi la formalizzazione.

Con il **capitolo 2**, in un certo senso, si inizia a mettere un po' di **ordine nel caso**: si discute infatti come attribuire ad eventi specifici un numero che esprima sinteticamente il "grado di fiducia" riposto nel loro verificarsi.
Ciò non significa che l'obiettivo principale della sezione sia l'introduzione di formule, quali il noto rapporto che sintetizza l'approccio classico alla probabilità. Piuttosto ci si occupa di costruire semplici modelli matematici di situazioni regolate dal caso e rendendosi conto che per farlo è necessario prendere decisioni; si vede, ad esempio, come l'equiprobabilità dell'uscita di ciascuna faccia nel lancio di un dado non si possa liquidare frettolosamente quale verità oggettiva.
Si riflette inoltre sull'importanza di stimare il valore di probabilità ottenuto, o meglio, di cogliere "quanto sia grande" tale numero, anche attraverso istruttive attività specifiche.

Ma, qual è il significato dei valori di probabilità ottenuti? In altri termini, **cosa succede "nella pratica",** ad esempio quando si lanciano due dadi?
Tali questioni sono investigate nel **capitolo 3**, attraverso esperimenti materiali e simulazioni mediante il foglio elettronico. Attenzione però: se discutiamo l'approccio teorico e le prove in sezioni distinte, è solo per ragioni di chiarezza espositiva, mentre nell'attività didattica pensiamo che essi vadano integrati strettamente, così da arricchirsi a vicenda.
In questo contesto sembra naturale privilegiare le modalità didattiche fondate sull'esplorazione. Esse, da una parte prevedono la piena attivazione dello studente, ma dall'altra comportano la consapevole assunzione di responsabilità per il docente che deve guidare la classe a interpretare gli esiti, in modo che la matematica non resti "negli occhi di chi guarda". Ecco la ragione per cui nella sezione proponiamo un'analisi dettagliata di tali aspetti.

Gli strumenti matematici introdotti permettono di esaminare **i giochi d'azzardo** in modo razionale, come fatto nel **capitolo 4**. Il contesto offre anche un'ottima occasione per "contare" gli elementi di un insieme, attività che sui libri di testo è spesso indicata come "calcolo combinatorio". L'approccio con cui si presenta l'argomento permette di evitare un'applicazione meccanica di formule e consente di affrontarlo senza l'angoscia della classificazione ad ogni costo.
L'approccio razionale seguito porta a introdurre il concetto di gioco equo, a esaminarne gli aspetti quantitativi nonché il significato statistico e la portata per effettuare previsioni. Gli studenti hanno modo di prendere confidenza con un esempio notevole di valore atteso di una variabile aleatoria.

L'analisi condotta sui giochi d'azzardo consente di rispondere ad alcuni dei quesiti posti nei capitoli precedenti, tuttavia restano ancora aperte delle questioni significative, come quelle relative ai test clinici e ai misconcetti. Tali situazioni sono affrontate nel **capitolo 5**, dopo aver mostrato come esprimere e **pensare l'evento in termini più elementari** permetta di trattare agevolmente situazioni articolate. Si considera pertanto la probabilità dell'evento complementare, porteremo lo studente a formulare la Legge della moltiplicazione, a interpretarla su modelli grafici e a giustificarla mediante un'analogia. Per il docente sono presenti alcuni approfondimenti formali che chiariscono il ruolo del suddetto risultato.
Non viene assegnato un ruolo speciale ad altri risultati, quali la formula che esprime la probabilità dell'evento unione in termini delle probabilità dei singoli eventi, nota anche come teorema della probabilità totale[1]. Per evitare che il significato profondo degli oggetti matematici resti soffocato sotto la superficie dei nomi, non si propone nemmeno un uso massiccio di termini specifici.
L'interesse didattico in questo ambito risiede nella possibilità di utilizzare varie forme di rappresentazione e di sviluppare l'abilità di passare consapevolmente da una all'altra: la notazione simbolica del linguaggio degli insiemi, la rappresentazione grafica mediante i diagrammi di Eulero-Venn, il linguaggio naturale (in particolare le congiunzioni "e", "o"), il linguaggio della logica …

Agli studenti dovrebbe essere lasciato il tempo di sviluppare una certa confidenza nell'uso della Legge della moltiplicazione, senza preoccuparsi troppo di attribuire alle coppie di eventi il marchio di indipendenti o dipendenti. Si passa alla precisazione formale solo quando se ne avverte l'esigenza (dello studente, non del docente) di esprimersi in modo univoco, coinciso ed espressivo, superando i limiti imposti dal linguaggio naturale.
Ecco allora che nel **capitolo 6** si guarda in modo più formale alla **probabilità che dipende da altre**. In questo contesto si conducono gli studenti a reinventare la definizione di probabilità condizionata, a partire dal suo significato nell'approccio classico.

[1] La formula che esprime la probabilità dell'unione di eventi disgiunti in termini di quella dei singoli eventi ha un'enorme rilevanza culturale, al punto da essere precisata mediante uno degli assiomi di Kolmogorov. Si ritiene che lo studente del primo biennio non abbia ancora la maturità per apprezzarne appieno la portata. D'altronde, se l'approccio assiomatico alla probabilità ha trovato una sistemazione definitiva solo negli anni trenta del novecento, non si può certo pretendere che lo studente compia tale (grande) passo in pochi giorni.

Proseguendo su questa strada, si arriva a ricavare la formula di Bayes attraverso opportune rappresentazioni grafiche, mediante le quali sarà poi più facile ricostruirla volta per volta, anche a lungo termine.
Mentre i primi cinque capitoli possono essere affrontati nel primo biennio, per il sesto capitolo conviene attendere il secondo biennio.

I criteri didattici sottesi

Le attività proposte nel volume mirano alla costruzione di significati degli oggetti matematici introdotti. In altre parole, non ci si accontenta che lo studente sappia *fare,* ma si vuole condurlo ad attribuire un senso a quanto discusso e fare in modo che tale senso venga gradualmente percepito come il proprio. Analogamente, le lezioni non dovrebbero avere come orizzonte la verifica sommativa sul tema, ma la costruzione di saperi che diventino parte della persona e siano disponibili a lungo termine. Su tale posizione, per alcuni aspetti rivoluzionaria rispetto a quella che traspare da vari libri di testo, si attestava già Dante Alighieri, secondo il quale “non fa scienza, senza lo ritenere, aver inteso”.
È chiaro che le due ambiziose aspettative ora prospettate, costruzione di significati e disponibilità dei saperi, condizionano fortemente la declinazione didattica delle attività e forniscono dei precisi criteri di scelta per i contenuti e per le modalità di comunicazione.

Allargando ancora lo sguardo, le attività ideate intendono favorire lo sviluppo di diverse competenze (abilità, capacità …), e non solo quelle matematiche, ma anche quelle di natura più trasversale, come l’interpretazione di testi, la progettazione, l’argomentazione… Le competenze sottese sono esplicitate di volta in volta nel volume e sarebbe utile condividerle con gli studenti e, perché no, con i loro genitori, nonché richiederne l’attivazione nelle verifiche.
Una sfida, non meno importante, che si raccoglie è quella di suggerire come organizzare in un curriculum coerente il Percorso che ogni insegnante si ritaglierà sulla base dei materiali proposti: infatti, per quanto profonda, ricca ed accattivante possa essere un’attività, quale sarà mai la sua utilità se rimane un episodio isolato o viene addirittura percepita come altro dalla matematica?
A proposito di matematica, G. Polya, uno che la conosceva bene, sosteneva che “non è uno sport per spettatori”. Questo è anche il senso in cui deve intendersi il carattere dei materiali proposti nel testo, dichiaratamente di stampo laboratoriale, perché fondati sull’attivazione dello studente che, esplorando, misurandosi in attività operativo – sperimentali, progettando, congetturando, comunicando, ri-organizzando … è il vero artefice della costruzione del proprio sapere.

Uno sguardo alla normativa

I materiali proposti sono coerenti con le Linee guida della Provincia Autonoma di Trento per i licei e con le Indicazioni nazionali del 2010 (http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html) e possono contribuire a mettere in atto le principali indicazioni metodologiche suggerite nelle Linee guida, come risulta dal seguente elenco.

- *Sviluppare modalità di lavoro laboratoriali*
  L’approccio laboratoriale, come illustrato, caratterizza l’intero Percorso. In effetti, non solo il capitolo 3, interamente centrato sugli esperimenti e sulle simulazioni, ma ogni capitolo prevede il ricorso ad attività di tale tipo: da quelle del capitolo 1 a quelle del paragrafo 5.6 b) (passeggiate casuali), solo per fare due esempi. In realtà rientrano a pieno titolo in tale categoria anche i momenti in cui lo studente si immerge in attività esplorative, come quelle che precedono la risoluzione mediante tabella del

problema del lancio di due dadi (paragrafo 2.1): la produzione di elenchi, di schemi anche non ottimali dal punto di vista computazionale, è fondamentale per radicare con continuità i nuovi saperi.

- *Affrontare problemi reali*
  Le situazioni motivanti introdotte nel capitolo 1 (giochi d'azzardo, test clinici, compensazione e altri misconcetti, questioni dalla genetica …) sono questioni legate alla realtà. Esse sono riprese nei capitoli successivi mediante gli strumenti offerti dal calcolo delle probabilità: ad esempio, nel paragrafo 5.6, la Legge della moltiplicazione e le simulazioni con il foglio elettronico, permettono di interpretare razionalmente il misconcetto della compensazione e quello dei "numeri spia".

- *Affinare il linguaggio specifico per definire, dimostrare*
  C'è spazio anche per la dimostrazione, come nel paragrafo 5.2 in cui si dimostra (o meglio, si ricostruisce formalmente e in astratto) la formula che esprime la probabilità dell'evento complementare in funzione della probabilità dell'evento.

- *Sviluppare l'autonomia*
  Le numerose letture proposte in ogni capitolo, che possono essere assegnate anche come approfondimento individuale e successivamente illustrate ai compagni, contribuiscono a sviluppare autonomia. A questa concorrono anche gli esercizi completamente risolti e commentati, nonché le numerose attività esplorative, come quelle relative alla simulazione del lancio di dadi mediante il foglio elettronico, proposte nel paragrafo 3.2.

- *Avviare alla formalizzazione*
  In vari capitoli si arriva a sintetizzare definizioni e risultati in una forma matematicamente corretta, ma adeguata al livello culturale nonché alla sensibilità degli studenti. Ciò avviene, ad esempio, nei paragrafi 2.5 e 3.4, a proposito delle prime valutazioni di probabilità, oppure nel paragrafo 5.3 d) per la Legge della moltiplicazione. Come visto, l'idea guida in tale ambito è quella di far seguire, non precedere, la formalizzazione alle attività sperimentali. E ciò vale anche per quanto concerne la risoluzione degli esercizi: un punto di arrivo per il primo biennio è la risoluzione proposta per il problema dei compleanni nel paragrafo 5.8.

- *Ridurre il ricorso a procedimenti risolutivi standard*
  Vari esercizi sui concetti, come quelli proposti nel paragrafo 2.6, richiedono di esaminare una situazione e non semplicemente di determinare un valore di probabilità. Analogamente alcune questioni poste nel paragrafo 2.1 sul lancio di dadi suggeriscono di ricorrere a strategie più efficienti di quelle standard per modellizzare la situazione.

- *Sviluppare collegamenti con le altre discipline*
  Vi sono diversi aspetti interdisciplinari. Per citare solo alcuni esempi, le questioni di genetica che compaiono nel capitolo 1 e nei paragrafi 2.6, 5.7 a); gli approfondimenti storici proposti attraverso le letture indicate nel capitolo 1.
  In un senso ancora più forte, possono essere affrontate in modalità interdisciplinare con il docente di lettere gli articoli tratti da quotidiani nel capitolo 1 (sul gioco d'azzardo e sui test clinici), oppure le letture relative ai casi giudiziari (O.J. Simpson) ancora nel capitolo 1 e poi ripresi rispettivamente nel paragrafo 5.7 b) e nel paragrafo 6.6. Anche gli esercizi sui concetti del paragrafo 2.6 offrono un'imperdibile occasione per sviluppare il testo argomentativo con contributi offerti da docenti diversi.
  Infine varie attività possono essere significativamente svolte coinvolgendo il docente di informatica: le attività con il foglio elettronico suggerite nel capitolo 3 e nei paragrafi 4.6 e 5.6 a), oppure le esplorazioni mediante il software Geogebra dei paragrafi 5.7 d) oppure 6.5 c).

- *Affrontare i temi attraverso percorsi a spirale e da più punti di vista*
  La formalizzazione proposta nei paragrafi del tipo "facciamo il punto", quali il 2.5, non vuole essere definitiva, ma si ritiene adeguata per lo studente del primo biennio. Definizioni e risultati possono essere riformulati in modo più formale nelle classi successive. Un secondo esempio di approccio a spirale è costituito dalla probabilità condizionata, il cui significato è precisato nel capitolo 6, ma che è introdotta essenzialmente già nel capitolo precedente.
  Più in generale, affrontare situazioni da più punti di vista è uno degli aspetti caratterizzanti il volume: ad esempio, nel paragrafo 2.1 l'esperimento del lancio di due dadi è modellizzato mediante una tabella a doppia entrata, la cui simmetria viene interpretata sia graficamente che algebricamente; il problema del paragrafo 5.6 d), relativo ai test clinici, è affrontato nel video sia mediante una modellizzazione con grafo ad albero sia mediante tabella.

- *Utilizzare consapevolmente calcolatrici e computer*
  L'approccio agli strumenti informatici è discusso in dettaglio nei paragrafi 3.1 e 3.2. Nel paragrafo 3.3 se ne esamina una particolare connotazione: quali sono i limiti delle sequenze di esiti simulate, ovvero cosa si può dedurre dagli esiti delle simulazioni al calcolatore?
  Più in generale, a tutte le attività proposte è sottesa l'attenzione a favorire la consapevolezza dello studente.

- *Promuovere una comunicazione efficace nel linguaggio naturale*
  Lo sviluppo di competenze argomentative, fondamentale per il cittadino, è promosso più o meno esplicitamente in quasi tutti i materiali proposti. Ad esempio, compare nel paragrafo 2.1 nella richiesta di giustificare le proprie congetture nel testo del problema sul lancio di due dadi; è presente negli esercizi sui concetti del paragrafo 2.6, centrati appunto sull'argomentazione. Ma compare anche in contesti in cui si richiede un'analisi più tecnica della situazione, come nel paragrafo 3.2 a proposito dell'interpretazione delle sequenze di esiti generati dal calcolatore.
  Gli strumenti matematici sviluppati nel Percorso dovrebbero contribuire ad affinare ulteriormente la comunicazione nel linguaggio naturale, perché favoriscono la chiarificazione del pensiero. Ad esempio, nel paragrafo 6.6 si mostra quanto possa risultare efficace l'esposizione della propria posizione, quando si disponga degli strumenti opportuni.

- *Suscitare interesse attraverso la storia della matematica*
  Riferimenti alla storia della matematica compaiono nelle letture proposte già alla fine del capitolo 1. Inoltre varie questioni sono collocate su uno sfondo storico: il gioco della zara, nel paragrafo 2.6 e 3.7, oppure l'errore di D'Alembert negli stessi paragrafi… L'intento è di offrire ulteriori motivazioni per attivarsi in prima persona, anche in considerazione del fatto che proprio le attività esplorative hanno consentito storicamente di risolvere o almeno chiarificare tali questioni.

Ampliando lo sguardo, quanto proposto è anche in sintonia con le Indicazioni nazionali del 2010 (http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html). In particolare, si condivide la seguente considerazione, che fornisce sintetiche ma nette istruzioni operative.

"[…] verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici […] non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità."

Perché insegnare la probabilità a scuola?

"Ormai da molto tempo mi sono convinto che non si può ottenere una buona formazione culturale dei giovani senza utilizzare l'immensa ricchezza concettuale ed euristica della probabilità e della statistica […] intesa […] come riflessione su alcuni fondamentali processi di conoscenza […] e non solo come strumento fondamentale per le scienze sperimentali ed umane".

Giovanni Prodi

"[...] nessun argomento ha valore o interesse di per sé, ma ogni argomento lo acquista se introdotto al momento giusto, in connessione con altre problematiche […] sono le connessioni effettive (applicazioni, analogie, …) che danno ai giovani l'impressione di fare scoperte e la soddisfazione di sentirsi creativi".

Bruno de Finetti

"Ogni insegnante deve agire a suo modo, secondo le proprie tendenze. Ognuno deve usare i propri mezzi per interessare gli studenti. Va bene tutto, si ha bisogno di tutto, senza esclusioni."

S. Lang

Insomma, secondo l'affermazione di Prodi, che non era un probabilista, la probabilità riveste un ruolo centrale e sorprendentemente ampio nella didattica. La convinzione è tale al punto che il suo libro di testo per il (primo) biennio della secondaria, "Matematica come scoperta", non solo inizia affrontando tale tema, ma lo fa diventare il filo conduttore per introdurre il calcolo numerico, il linguaggio degli insiemi, il problema del contare gli elementi di un insieme e, più in generale, la modellizzazione.
Eppure il probabilista De Finetti sembra affermare che non è tanto il tema sul quale si investiga a rendere significativa l'azione didattica, quanto lo schema mediante il quale lo si declina in classe nonché la ricchezza dei legami prospettati con situazioni di varia natura.
Come se ciò non bastasse, Lang scrive un'affermazione ancora più radicale, ammonendo che l'aspetto centrale da considerare è piuttosto il modo in cui il docente si pone nel costruire i saperi assieme agli studenti: è questo che, in ultima analisi, realmente conta nell'azione didattica.

In definitiva, una bella responsabilità di cui il docente dovrebbe farsi carico!
L'intento degli autori è proprio quello di fornire al docente strumenti per gestire efficacemente tale responsabilità: spunti, esempi di attività, riferimenti, elementi di riflessione… affinché egli possa maturare consapevolmente le scelte didattiche a cui è chiamato e affinché tali scelte siano spendibili anche in contesti diversi dalla probabilità.

Le origini e le persone

Nell'anno scolastico 2005/2006, nell'ambito dei Progetti Lauree Scientifiche[2] di Trento di area Matematica e di area Fisica, un gruppo formato da docenti universitari, dottorandi[3] e insegnanti di scuola secondaria di secondo grado[4] ha progettato e realizzato un laboratorio di matematica e fisica ("Interpretazione di fenomeni aleatori") incentrato su temi di probabilità: dalla sua introduzione al decadimento radioattivo, alle passeggiate casuali, al moto browniano, all'entropia, ai sondaggi, al gioco d'azzardo...

[2] Dell'allora Progetto Nazionale Lauree Scientifiche ora Piano Nazionale Lauree Scientifiche http://www.progettolaureescientifiche.eu/

[3] Per la matematica Stefano Bonaccorsi, Luca Di Persio, per la fisica Luigi Gratton, Francesco Operetto, Francesco Pederiva e Stefano Oss.

[4] Emanuela Antolini, Cristina Bassani, Cristina Bonmassar, Maddalena Cadamuro, Gianpaolo Fedele, Carla Gallio, Francesca Mazzini, Paolo Pendenza, Luisella Vendrami.

Il laboratorio si è svolto prevalentemente in orario extrascolastico con gruppi di ragazzi provenienti da classi diverse, pur essendo stato sperimentato anche in alcune classi in orario scolastico. L'attività con gli studenti è stata replicata per circa 4 anni. Alcuni docenti hanno continuato anche successivamente a inserire all'interno della loro pratica didattica alcune delle esperienze del laboratorio, ad esempio quelle relative al decadimento radioattivo.
Nell'anno scolastico 2013/2014, nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche di area Matematica e Statistica di Trento, sulla base delle esperienze precedentemente maturate, si è progettato un percorso di probabilità per il primo biennio della scuola secondaria superiore: con l'intento di rivolgere le attività all'intera classe nelle ore scolastiche (la mattina, per intenderci) e di collocarle in modo organico nel curriculum di matematica, in coerenza con le Indicazioni nazionali e le Linee guida della Provincia Autonoma di Trento. Pertanto non si sono inserite le attività di carattere più specificamente fisico (esse restano comunque compatibili con il nuovo percorso, ma forse sono più adatte a studenti del secondo biennio), anche per andare più nel dettaglio degli aspetti matematici. Si decide di sviluppare collegamenti con altri ambiti, quali la genetica, i casi giudiziari, i test diagnostici, il gioco d'azzardo. Il risultato è un percorso completamente nuovo progettato dagli insegnanti Luciano Cappello e Francesca Mazzini, con i contributi di Francesca Arrigoni, Cristina Bonmassar e con la consulenza del prof. Stefano Bonaccorsi. Tutto il lavoro è stato coordinato dalla Dott.ssa Elisabetta Ossanna[5], che ha progettato l'attività di formazione per gli insegnanti e ne ha garantito la buona riuscita. Come descritto più in dettaglio nel fascicolo relativo alla sperimentazione didattica, i suddetti insegnanti hanno proposto il laboratorio ad altri colleghi. Dal confronto sono nati i percorsi che i docenti coinvolti hanno realizzato nelle loro classi. Il percorso presentato in questo volume nasce anche dalla rielaborazione delle sperimentazioni svolte e quindi dai contributi dei seguenti insegnanti: Francesca Arrigoni, Michele Avancini, Maura Bonazza, Cristina Bonmassar, Antonella Franceschini, Carla Gallio, Marina Mingazzini, Sandra Gabrielli, Francesca Pontin.
Un ruolo fondamentale alla discussione, nonché alle modalità di affrontare alcuni temi è stato dato da Gabriele Dalla Torre, Giancarlo Dorigotti ed Elisabetta Ossanna.

La presentazione e discussione dei materiali con i docenti nei corsi PAS, TFA (classi di concorso A047, A049, A059 - anni accademici 2013/2014, 2014/2015, 2015/2016) e in alcuni corsi di formazione per insegnanti in servizio (progettati dalla Dott.ssa Elisabetta Ossanna e organizzati dal DiCoMat Lab) hanno contribuito ad arricchire ulteriormente questo lavoro.

Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale va a tutte le persone sopra nominate che con la loro partecipazione, sperimentazione, valutazione hanno reso possibile la realizzazione di questo volume.
Si ringraziano il Piano Nazionale Lauree Scientifiche di area Matematica e Statistica e il progetto locale di Trento che hanno reso possibile la realizzazione dell'intera attività.
Si ringraziano la casa editrice Loescher (D'Anna) e i docenti Daniela Valenti e Claudio Gori Giorgi (La Nuova Italia) per aver concesso di riportare i testi degli esercizi e delle letture, come indicato in nota nei vari capitoli.
Si ringrazia il DiCoMat Lab, in particolare la Dott.ssa Elisabetta Ossanna, che ha contributo a rendere possibile la realizzazione del laboratorio, le sperimentazioni e la stesura di questo volume.
Si ringrazia il Prof. Bonaccorsi per il confronto su alcune tematiche durante la stesura del volume.
Si ringrazia il Dott. Di Persio per la revisione scientifica dei contenuti nella prima stesura di questo volume.
Si ringrazia il Piano Nazionale Lauree Scientifiche di area Matematica per aver finanziato il progetto e la realizzazione del testo.
Si ringrazia in particolare il Prof. Gabriele Anzellotti le cui idee costituiscono lo sfondo su cui si è collocato lo sviluppo del percorso.

[5] Coordinatrice del Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica dell'Università di Trento (DiCoMat Lab)