

## 1. Situazioni motivanti

*Il percorso può iniziare considerando alcune situazioni problematiche, collocate in contesti reali, quali gioco d'azzardo, test clinici, misconcetti, casi giudiziari...*

*Lo studente ha così modo di scorgere fin dall'inizio l'utilità e la portata del calcolo delle probabilità nella risoluzione di problemi, nonché di interpretare in vari ambiti gli oggetti matematici che verranno via via introdotti, esaminandoli e controllandoli anche a livello semantico.*

*Tali situazioni motivanti possono essere condensate in opportune domande-stimolo, quali "se gioco a lungo al 10eLotto, diventerò milionario?". Gli studenti sono invitati a giustificare le proprie congetture al riguardo, attingendo alle conoscenze pregresse o all'intuizione.*

*In questa fase è cruciale lasciare spazio alla discussione e al confronto tra le diverse posizioni dei ragazzi, per far emergere eventuali misconcetti e avere così modo di radicare i nuovi saperi su quelli effettivamente disponibili per la classe. Per questo il docente non dovrebbe preoccuparsi di fornire subito le risposte, ma di tenere vivo l'interesse sul tema, fino a quando introdurrà (assieme ai ragazzi) gli strumenti matematici che consentono di investigarlo razionalmente.*

*Esaminiamo dunque nello specifico alcune situazioni motivanti, tra le quali il docente può scegliere quelle che ritiene più significative e più vicine alla sensibilità dei propri studenti. Come accennato, esse riguardano i seguenti ambiti:*

- giochi d'azzardo
- test clinici
- alcuni misconcetti
- genetica, casi giudiziari, storia...

### Giochi d'azzardo

Se gioco "a lungo" al 10eLotto o alla roulette diventerò milionario?

*La questione merita di essere affrontata anche per le implicazioni sociali del gioco d'azzardo, che ormai riguardano in modo allarmante anche i giovani in età scolare.*

*Perché allora non esaminare alcune letture sull'argomento, meglio se tratte dalla cronaca locale, magari mediante un'attività pluridisciplinare<sup>1</sup>, in modo da realizzare un'indagine più ricca? Alcuni riferimenti al riguardo sono riportati in fondo al capitolo, nell'appendice A1.*

<sup>1</sup> Diverse altre motivazioni iniziali che proponiamo si prestano ad una trattazione pluridisciplinare, anche se non sempre lo indichiamo esplicitamente.

## Test clinici

Risultato positivo al test per l'HIV. Sono certamente malato?

*Come osservato, la questione ha un impatto più forte sullo studente se è accompagnata dalla presentazione di fatti realmente accaduti, come quello tristemente descritto nell'articolo nell'articolo pubblicato su la Repubblica, 5 maggio 2008, "«Lei è sieropositivo» ma era falso. Dopo 3 anni risarcito: 200.000 euro", di Paola Cascella (<http://www.repubblica.it/2008/05/sezioni/cronaca/bologna-sieropositivo/bologna-sieropositivo/bologna-sieropositivo.html>)*

*La lettura svela il drammatico sfondo su cui si colloca la domanda-stimolo, che possiamo ulteriormente precisare come di seguito.*

Risultato positivo al test per l'HIV. Sapendo che il test "Elisa" ha una *sensibilità*<sup>2</sup> del 99,9%, vuol dire che al 99,9% ho contratto l'HIV?

Qual è la probabilità che il test "Elisa" fornisca indicazioni errate<sup>3</sup>?

*Tali questioni forniscono degli spunti formidabili per la discussione ma, per quanto interessanti, non esauriscono certo la varietà dei contesti che possono attirare l'attenzione degli studenti nell'ambito dei test clinici. Pertanto ne presentiamo altri tre che, per ragioni di tempo, possono essere affrontati anche più avanti nello sviluppo del percorso in classe.*

- **Etilometro**

Risultato positivo all'alcol test. Ho sicuramente superato i limiti consentiti per mettersi alla guida?

*Uno stimolante riferimento al riguardo è:*

Articolo dal Giornale di Sicilia, 6 Gennaio 2015, "Etilometro lo incastra due volte: assolto... era un falso positivo", di Vincenzo Falci

[http://caltanissetta.gds.it/2015/01/06/etilometro-lo-incastra-2-volte-assolto-era-un-falso-ositivo\\_291180/](http://caltanissetta.gds.it/2015/01/06/etilometro-lo-incastra-2-volte-assolto-era-un-falso-ositivo_291180/)

---

<sup>2</sup> Probabilità che l'individuo malato risulti positivo al test.

<sup>3</sup> Per rispondere servono ulteriori ipotesi. Ad esempio, come vedremo nel capitolo 5, oltre alla sensibilità basta la specificità (ossia la probabilità che l'individuo sano risulti negativo al test) e la prevalenza della malattia (ossia la percentuale di individui della popolazione che hanno l'HIV).

- **Studio su medici tedeschi<sup>4</sup>**

Anche i medici possono sbagliare nell'interpretare la portata degli esiti di un test diagnostico! Ad alcuni medici è stato chiesto di stimare la probabilità che la donna positiva ad un test relativo al cancro al seno, abbia effettivamente contratto la malattia. Naturalmente sono state fornite loro le informazioni numeriche sul test che servivano per rispondere. Ebbene, diversi hanno concluso che la probabilità di aver contratto il cancro era del **90%**, mentre in realtà essa si attesta intorno al **9%**. Si tratta di un errore matematico, ma le sue conseguenze sono drammatiche per il paziente a cui viene prospettato. Come non riflettere su questi aspetti?

- **Test antidoping**

Mary Decker, campionessa mondiale dei 1.500 m e dei 3.000 m, viene squalificata nel 1996 perché trovata positiva al test antidoping.

Assumiamo che tra i non dopati l'1% dei test abbia esito positivo. Ciò comporta che la probabilità di colpevolezza di Mary Decker sia del 99%?

No. Assumendo opportune ipotesi<sup>5</sup>, il calcolo delle probabilità permette di ridurre all'84,7% la probabilità che la campionessa sia dopata. È vero che tale valore resta comunque "grande", ma il risultato merita una riflessione: supponendo che il numero di controlli di tale tipo si attesti attorno ai 90.000 all'anno<sup>6</sup>, non pochi atleti risulterebbero positivi e innocenti. Infatti, se la frequenza relativa dei dopati e innocenti è circa uguale alla corrispondente probabilità<sup>7</sup>, allora circa 14.000 atleti (pari a circa il 15,3% degli atleti controllati), risulterebbero positivi e innocenti. Un numero ben diverso da 900, ossia dal numero che si ottiene assumendo come valore di probabilità 99% invece del "corretto" 84,7%.

## Alcuni misconcetti<sup>8</sup>

### Regolarità

Lanciamo 10 volte una moneta "onesta". Su quale tra le due sequenze di esiti scommettereste? Perché?  
"TTTTTTTTTT"      "TCTCCTCTTC"

<sup>4</sup> Dal testo di L. Mlodinov, *La passeggiata dell'ubriaco*, ed. Rizzoli.

<sup>5</sup> L. Mlodinov, l'autore del testo proposto, assume che i dopati costituiscano il 10% degli atleti che vengono sottoposti al test in questione, e che il test sui dopati risulti positivo con probabilità del 50%. Svilupperemo il calcolo effettivo della probabilità che la campionessa sia dopata nel capitolo 6, utilizzando la probabilità condizionata. Per ora possiamo renderci conto del risultato, seguendo l'approccio proposto nel testo di Mlodinov: considerare una popolazione di 1.000 atleti, interpretare le probabilità indicate come frequenze relative e individuare la numerosità di ciascuno dei 4 sottoinsiemi in cui si può partizionare la popolazione in base ai criteri dopato-non dopato, positivo-negativo al test.

<sup>6</sup> Questa è l'informazione riportata nel testo di Mlodinov. Secondo i dati forniti dal CONI, in Italia nel 2014 sono stati effettuati 6719 controlli antidoping, dei quali ben 5992 riguardavano test delle urine.

<sup>7</sup> Stiamo adottando un approccio frequentista alla probabilità. Esso è fondato sulla Legge dei grandi numeri. Nel capitolo 3 preciseremo il significato e la portata di tale approssimazione.

<sup>8</sup> Anna Sfard, in *"Psicologia del pensiero matematico"*, Edizioni Erickson, precisa che "ci troviamo di fronte ad una misconcezione ogni volta che un allievo utilizza un certo concetto, ammettiamo una funzione, in un modo che, benché sistematico e invariante attraverso i contesti, differisce dal modo in cui lo stesso concetto viene adoperato dagli esperti." Però, nello stesso testo mette anche in luce i limiti della teoria delle misconcezioni, inquadrandola nell'ambito della sua visione dello sviluppo del pensiero.

## Compensazione

“Marta è incinta. Ha già tre bambine. Quindi è più probabile che il prossimo figlio sia maschio.” È vero?

## Numeri ritardatari nel gioco del lotto

Al 9 gennaio 2018, il 76 non esce da 202 estrazioni sulla ruota di Cagliari; il 10 è uscito su quella di Venezia all'estrazione precedente. All'estrazione successiva su quale dei due numeri scommetteresti?

*Le statistiche dei numeri usciti e dei numeri ritardatari (!) si reperiscono facilmente in rete<sup>9</sup>. La loro ricerca può essere affidata agli studenti, in modo da farli sentire più direttamente coinvolti nell'attività di indagine.*

*I numeri estratti si trovano, ad esempio, all'indirizzo*

<https://www.lottomaticaitalia.it/it/prodotti/lotto/estrazioni>.

*Sul sito della Lottomatica (<https://www.lottomaticaitalia.it/it/prodotti/lotto/statistiche/numero-spia>) vengono elencati dei numeri speciali e sono presentati con queste parole:*

*“La tradizione vuole che l'estrazione di certi numeri “preannunci” l'uscita di altri. La tabella indica, per ogni numero estratto (o “numero spia”), 5 numeri che avrebbero la maggior probabilità di uscire.”*

Ad esempio:

L'8 gennaio 2018 è uscito il 27 sulla ruota di Venezia. Allora è vero che ciò aumenta la probabilità dell'uscita del 42 all'estrazione successiva?

Venezia	
27	42 58
	65
	86
	90

*Perché riteniamo fondamentale discutere quesiti sulla regolarità, compensazione o sui numeri ritardatari?*

*Le ragioni risiedono nella constatazione che alcune convinzioni sembrano appartenere a una sorta di **conoscenza di senso comune** e sono persistenti: vengono difficilmente superate, anche quando si dispone degli strumenti teorici che ne consentono un esame razionale. Ad esempio, la conoscenza del fatto che nel gioco del lotto le singole estrazioni sono indipendenti, ovvero che l'urna “non ha memoria”, non impedisce di continuare a scommettere sui numeri che ritardano. In altre parole, in diversi casi si assiste ad un vero e proprio scollamento tra quanto si ritiene preveda la teoria e quanto invece si pensa debba accadere “in pratica”. E l'ambito della probabilità sembra essere un terreno particolarmente fertile per la nascita e lo sviluppo di questa divergenza.*

*Pertanto gli studenti dovrebbero essere messi nella condizione di esplicitare le proprie convinzioni sui fenomeni che dipendono dal caso: intervenendo su tali convinzioni, si potrà in seguito radicare con continuità una spiegazione razionale dei fenomeni.*

*E se la teoria non è sufficiente, diventano strumenti imprescindibili per comprendere cosa accade nella pratica, gli esperimenti condotti mediante oggetti o le simulazioni con il foglio elettronico. Ma di questo ce ne occuperemo nei prossimi capitoli; per ora ci limitiamo a proporre un'interessante attività, desunta dal testo di V. Villani e altri “Non solo calcoli”, Springer, pag. 264.*

<sup>9</sup> Ad esempio sul sito della Lottomatica,

<http://www.lottomaticaitalia.it/lotto/statistiche/numeriRitardatariTop10.html>

**Attività.** Prima di ogni estrazione del lotto ciascuno studente punta, virtualmente, sul numero che preferisce e il docente invece su un numero “a caso”, uno per ogni studente. Dopo un opportuno periodo (un mese, due mesi) si controllano le estrazioni e si confronta il numero di uscite dei “numeri preferiti” con quello dei numeri scelti “a caso”.

Al di là di piccole oscillazioni si dovrebbe verificare una sostanziale parità tra i due tipi di esito.

*Infine, ulteriori spunti di riflessione che possono stimolare la discussione con gli studenti, sempre con l'accortezza di non fornire le risposte in questa fase del percorso.*

- Fino al 1993 i numeri ritardatari comparivano su Televideo.
- Nel mese di gennaio dell'anno 2005 sono stati giocati al lotto 1,2 miliardi di euro, un importo **doppio** rispetto a quello del gennaio 2004. Le vincite invece sono rimaste quasi **uguali**.  
Quale può essere la ragione di tale differenza tra somme giocate e somme vinte? Il 53 non usciva da 182 estrazioni sulla ruota di Venezia, al gennaio 2005. Molti giocatori ingenuamente avevano puntato sul 53 (magari indebitandosi), grazie anche ad una massiccia propaganda condotta attraverso i mezzi di comunicazione. In realtà, nonostante il ritardo accumulato, il 53 ha la stessa probabilità di uscita di qualsiasi altro numero del lotto...

## Genetica, casi giudiziari, storia...

*Le situazioni fin qui esaminate non esauriscono la ricchezza dei contesti in cui la probabilità riveste un ruolo significativo. Ne proponiamo allora degli altri: anch'essi possono essere introdotti alla classe mediante opportune domande-stimolo oppure lasciati per l'approfondimento individuale, eventualmente in momenti successivi del percorso. La lettura “filtri antispam” potrà essere compresa completamente dagli studenti solo più avanti, dato che coinvolge la probabilità condizionata.*

- **Genetica**<sup>10</sup>  
Determinazione del sesso dei figli: è vero che se una donna ha avuto due figlie femmine, è più probabile che il prossimo figlio sia maschio?  
  
Morbo di Cooley e microcitemia: la probabilità di avere alcune malattie si può valutare a partire dal patrimonio genetico dei genitori.
- **Un caso giudiziario**  
O. J. Simpson e l'omicidio della moglie.<sup>11</sup>  
Sospettato di essere l'autore dell'omicidio della moglie, il noto sportivo statunitense O. J. Simpson viene processato nel 1995. Ottiene l'assoluzione. L'anno successivo però al processo civile è riconosciuto colpevole, definitivamente.  
Il primo processo è un esempio istruttivo di come la probabilità possa essere utilizzata in modo distorto. La difesa ha fatto leva sul fatto che tra le **donne percosse** dal proprio compagno, solo lo **0,04%** è poi stata uccisa da lui. E ciò è bastato per convincere la corte. Studi successivi hanno però evidenziato che tra le donne percosse dal proprio compagno **e uccise**, ben il **90%** è stata uccisa da lui.  
In altri termini, una scelta distorta dell'insieme dei “casi possibili”, ha condizionato pesantemente l'esito del processo.

<sup>10</sup> Approfondimenti della questione si trovano nelle letture proposte in fondo al capitolo nell'appendice A2.

<sup>11</sup> Si veda anche l'approfondimento dedicato al caso O.J. Simpson nel paragrafo 6.6 oppure [https://it.wikipedia.org/wiki/Caso\\_O.\\_J.\\_Simpson](https://it.wikipedia.org/wiki/Caso_O._J._Simpson).

- **Storia**<sup>12</sup>

La probabilità compare già nelle assicurazioni sul trasporto di merci nel XIV secolo: c'era il problema di valutare con precisione i premi (in modo da tutelare la compagnia, ma d'altra parte non proporre costi troppo elevati all'assicurato); ecc.

La storia della probabilità è più antica della storia: già 6.000 anni fa si giocava a dadi con gli *astragali*.

- **Filtri antispam**<sup>13</sup>

Come viene utilizzata la probabilità per bloccare le e-mail indesiderate? Il ruolo cruciale della probabilità che dipende da altre.

---

<sup>12</sup> Approfondimenti delle due questioni si trovano rispettivamente nel testo di Amir D. Aczel, "Chance", Raffaello Cortina, 2005 a pag.9-14 e nella lettura proposta in fondo al capitolo nella sezione "La probabilità nella storia".

<sup>13</sup> Si veda l'approfondimento nel paragrafo 6.6.