2. I numeri del caso... valutazioni di probabilità

Nel capitolo precedente si sono illustrate varie attività, volte essenzialmente a motivare gli studenti allo studio della probabilità. Ora è il momento di guardare alle situazioni proposte da un'angolazione più razionale, costruendo dei semplici modelli probabilistici che conducono alle prime valutazioni quantitative di probabilità. Si tratta, in sostanza, di esprimere mediante un numero il "grado di fiducia" che si attribuisce al realizzarsi di un dato evento, sulla base delle informazioni di cui si dispone.

2.1 Un problema per iniziare

L'idea è di iniziare da questioni che lo studente del primo biennio, da una parte, sia in grado di affrontare in modo abbastanza autonomo, contando sulle conoscenze di cui dispone, ma che dall'altra non consideri nemmeno come troppo banali. Insomma, ha senso partire dall'investigazione di questioni che siano percepite come sfide significative e costruttive. In quest'ottica vale la pena esaminare il lancio di due dadi[1]*.*

Lanciamo due dadi "onesti", che hanno le facce numerate da 1 a 6.
Su quale punteggio (somma dei due numeri usciti) scommettereste? Perché?

Per contribuire alla costruzione dei saperi e favorirne la disponibilità a lungo termine, l'attività di risoluzione dovrebbe cominciare con l'esplorazione del problema.
Ciò significa che, in un contesto laboratoriale, i ragazzi effettuano prove[2] *(ossia lanciano materialmente i dadi), ne registrano gli esiti, li esaminano, schematizzano la situazione mediante opportune rappresentazioni … e, ricorrendo anche a conoscenze pregresse, arrivano a formulare congetture personali.*
Nel contempo il docente stimola e guida la discussione, invita a precisare le affermazioni e a giustificarle, ma non assume su di sé la responsabilità di fornire le risposte, almeno in questa fase.
Entrando nel dettaglio, il docente può suggerire di modellizzare la questione mediante una tabella a doppia entrata, analoga a quella proposta in figura e che costituisce in sostanza una tavola dell'addizione. Per fissare le idee, si può supporre che uno dei due dadi sia di colore blu e l'altro nero.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

dado nero

[1] Per alcune classi anche la più elementare situazione del lancio di un solo dado può risultare significativa. Per altre, all'opposto, può essere interessante investigare sul lancio di tre dadi.
[2] Gli esperimenti materiali e le simulazioni al calcolatore sono attività fondamentali per la costruzione dei saperi. Nella prassi didattica esse non dovrebbero essere disgiunte dalla trattazione "teorica": ci occuperemo nel dettaglio di esse nel prossimo capitolo, ma lo faremo unicamente per ragioni di chiarezza espositiva.

Come si vede, essa offre una rappresentazione immediata e globale della situazione, che arricchisce non poco la descrizione che si ottiene mediante il solo linguaggio naturale o l'algebra.
Stabilita l'espressività di tale rappresentazione, gli studenti dovrebbero investire del tempo nell'osservarla alla ricerca di eventuali regolarità. Ad esempio, si dovrebbero presto accorgere[3] *che essa è simmetrica rispetto alla diagonale relativa al punteggio 7, evidenziata in figura; questa proprietà della figura corrisponde ad una precisa proprietà algebrica … la commutatività dell'addizione.*
Pertanto i ragazzi non stanno semplicemente risolvendo un problema di probabilità, ma hanno modo di sviluppare abilità trasversali, come quella di passare da una forma di rappresentazione all'altra (da linguistica ad algebrica a grafica). Questo è il senso profondo che attribuiamo all'attività! E se gli studenti non lo colgono da soli, occorrerà chiarirlo loro esplicitamente.

Facendo riferimento al modello così realizzato, si dovrebbe stabilire agevolmente che il punteggio più frequente in tabella è il "7" e pertanto è su di esso che conviene scommettere. Precisamente, la probabilità che il punteggio sia "7" è

$$\frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

Osservazione
Prima di concludere, merita osservare esplicitamente che nel valutare tale probabilità, sono state prese alcune decisioni[4]:

- si è attribuito lo stesso valore di probabilità all'evento rappresentato da una ciascuna cella della tabella[5]
- si è calcolata la probabilità come rapporto tra il numero dei casi in cui esce il punteggio "7" e il numero dei casi che (… ancora una volta, decidiamo) si possono presentare[6].

Naturalmente spetta al docente stabilire il momento opportuno per discutere tali aspetti con la classe.

[3] Eventualmente stimolati dal docente.
[4] Tali assunzioni trovano generalmente larga condivisione in contesti quali il lancio di due dadi. Ma restano comunque delle *ipotesi*, e come tali diventano parte integrante del *modello* costruito per affrontare il problema in esame. Tali considerazioni andrebbero esplicitate agli studenti, anche perché non siano portati a pensare che ogni evento ammetta un unico valore di probabilità, cioè un valore universalmente riconosciuto come "il" corretto valore.
[5] Approfondiremo la questione più avanti nel capitolo. Per ora ci limitiamo ad osservare che proprio questa assunzione precisa il significato dell'espressione "onesti", utilizzata nel testo del quesito.
[6] In realtà, la decisione di valutare la probabilità come rapporto tra il numero dei casi possibili e quello dei casi favorevoli all'evento "esce il punteggio 7", si può far risalire a due decisioni più a monte. La prima è l'equiprobabilità degli eventi "elementari" rappresentati da ciascuna cella della tabella, la seconda è che la probabilità di due eventi disgiunti (nella situazione in esame, due celle della tabella) sia la somma delle probabilità di tali eventi. Infatti, per la prima ipotesi, si ha che la probabilità dell'evento elementare è $\frac{1}{36}$, mentre per la seconda, la probabilità dell'evento "esce il 7" è $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{36}=6\cdot\frac{1}{36}$, visto che sono 6 le celle con punteggio "7".
Più formalmente e più in generale, consideriamo uno spazio degli eventi che abbia un numero finito n di elementi e tale che tutti i suoi elementi siano equiprobabili. Se si assume valgano gli assiomi della probabilità (in particolare l'additività sugli eventi disgiunti), allora si può dimostrare che la probabilità di un evento costituito da k elementi di tale spazio, è necessariamente data dal rapporto $\frac{k}{n}$. E la dimostrazione è esattamente analoga a quella ora seguita nel contesto specifico del lancio di due dadi.

Ancora dadi: ulteriori valutazioni di probabilità

La questione esaminata costituisce una sorta di problema guida, sulla base del quale gli studenti dovrebbero misurarsi nella modellizzazione e risoluzione di quesiti analoghi, operando però in modo più autonomo. Si tratta di determinare la probabilità di eventi analoghi, ad esempio dei seguenti, prestando attenzione agli aspetti metodologici sottesi, affinché essi siano poi disponibili anche in altri contesti.

Esce lo stesso numero sui due dadi.

L'insieme dei casi favorevoli all'evento è ancora rappresentato da una diagonale della tabella.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

dado nero

Il numero che esce sul dado nero è maggiore di quello che esce sul dado blu.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

dado nero

Invece di contare il numero di celle verdi una per una, si può sfruttare la simmetria rispetto alla diagonale principale, già notata nella fase di costruzione della tabella. Pertanto il numero dei "casi favorevoli" si può anche ottenere mediante un calcolo della forma

(36 – 6) : 2

Finché si considerano dadi a 6 facce, le due strategie indicate sembrano essere ugualmente efficienti. Ma lo sono ancora per lanci di dadi a 20 facce?

Ricorrere a dadi che hanno molte facce, serve per motivare lo studente a cercare più strategie risolutive e a confrontarne la bontà. Infatti, se il conteggio esplicito fosse rapido, la ricerca di ulteriori approcci apparirebbe agli occhi dei ragazzi un'inutile complicazione.

Escono i numeri "2" e "5".

<u>Attenzione</u>. Non è specificato su quale dei due dadi debba uscire il "2" e su quale il "5". Quindi vi sono due "casi favorevoli"…

Questa questione offre una ghiotta occasione per riflettere sull'importanza di esaminare ogni singolo termine di un testo espresso nel linguaggio naturale, quando si vuole coglierne il preciso significato e la corretta interpretazione.

Il punteggio è 5.
Il punteggio è 9.

L'insieme delle celle di contenuto "5" e l'insieme delle celle di contenuto "9" sono simmetrici rispetto ad una delle diagonali della tabella.

Corrispondentemente, i numeri 5 e 9 differiscono dal numero 7, della stessa quantità in modulo.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

dado nero

Il punteggio è un numero pari.

Per rispondere è sufficiente contare esplicitamente i "casi favorevoli" quali appaiono sulla tabella utilizzata finora.
In alternativa si può far riferimento ad un modello più efficiente: la tabella "contratta" in figura,
dove p = numero pari, d = numero dispari.

dado blu

d		
p		
"+"	**p**	**d**

dado nero

Come evidenzia questo quesito, è importante che gli studenti dispongano di esempi significativi di modelli di calcolo, che hanno costruito consapevolmente in contesti specifici e che sanno poi richiamare in situazioni analoghe. Ma è altrettanto importante che i ragazzi siano in grado di adattare opportunamente tali modelli al problema che stanno esaminando.
Altrimenti questi schemi si riducono a mere ricette di calcolo, da applicare in modo acritico, alla stregua di piatte formule risolutive.

Osservazione

La rappresentazione grafica proposta in questi primi esempi permette già di notare un fatto importante: la probabilità di un evento è una misura dell'insieme che lo rappresenta. Nell'ultima questione esaminata la probabilità è $\frac{1}{2}$, ossia è la misura (area) dell'insieme colorato in verde rispetto alla misura dell'intera tabella.

Per completezza, esaminiamo infine due situazioni in cui la probabilità vale rispettivamente 0 e 1.

Il punteggio è 13.
Il punteggio è minore di 13.

Il punto di vista della geometria analitica *[7]

Abbiamo già esaminato il problema relativo al lancio di due dadi da vari punti di vista, che spaziano dal registro linguistico a quello grafico, ciascuno dei quali arricchisce la nostra comprensione della situazione. In questo spirito proviamo a considerare l'ulteriore rappresentazione che offre la geometria analitica; vedremo che essa permette di giustificare alcune regolarità che si scorgono sulla tabella 6x6 con cui abbiamo modellizzato il problema.

Perché le celle che appartengono ad una stessa diagonale hanno lo stesso punteggio, ad esempio il 5?

Cominciamo indicando con *x* il numero che esce sul dado nero, con *y* il numero che esce sul dado blu e nel fissare il sistema di riferimento in figura. Possiamo così interpretare i numeri *x*, *y* come le coordinate, rispetto a tale sistema di riferimento, di una cella della tabella[8]. Ad esempio, la cella contornata in rosso in figura ha coordinate (5, 3).
Possiamo spingerci oltre e notare che tale cella rappresenta il lancio che ha avuto come esito il punteggio 5+3 = 8. Più in generale, ogni cella di coordinate (x, y) rappresenta il lancio che ha avuto come esito il punteggio x + y.

Si può così schematizzare quanto finora osservato:

alla cella (x, y) corrisponde il punteggio 5 $\Longleftrightarrow$ **x + y = 5** e x, y ∈ {1,2,...,6}

Ora, l'equazione x+y= 5, o y=-x+5, rappresenta una retta nel piano cartesiano. Pertanto concludiamo che:

*le celle a cui corrisponde il punteggio 5 si trovano su una **"retta"***

Precisamente il loro vertice "in alto a destra" (puntino blu in figura) appartiene alla retta **y=-x+5.**

y
(numero che esce sul dado blu)

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

x
(numero che esce sul dado nero)

[7] Con il simbolo * denotiamo una sezione che può essere omessa senza precludere agli studenti la comprensione delle successive.
[8] Precisamente (x,y) sono le coordinate del vertice in "alto a destra" della cella, ossia il vertice della cella che ha entrambe le coordinate maggiori di quelle degli altri vertici della cella.