APPENDICE

A1 Prime valutazioni di probabilità

Problema del gioco della morra[29].

1. **Nell'antico gioco della morra due giocatori mostrano contemporaneamente la loro mano destra, stendendo la mano chiusa a pugno (zero dita) oppure una o due o tre o quattro o cinque dita; ogni giocatore deve indovinare il numero che si ottiene *sommando le dita"* di entrambi. Valutare i possibili risultati della "*somma delle dita*" e la probabilità di ciascun risultato.**

Per iniziare, assumiamo che entrambi i giocatori scelgano "a caso" il numero di dita da esporre. In altre parole decidiamo che i casi che si possono presentare per ciascun giocatore siano: esporre zero dita, un dito, due dita, …, cinque dita; e che essi siano equiprobabili[30].
Proseguiamo rappresentando i possibili esiti: in questa situazione conviene realizzare una tabella a doppia entrata, analoga alla seguente, che è in sostanza una tavola dell'addizione.

Giocatore A

Giocatore B	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
3	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
4	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
5	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

Il valore minimo delle somme è 0 e si ottiene nel caso in cui entrambi i giocatori mostrano i pugni chiusi. Il massimo è 10 e si ottiene nel caso in cui i giocatori esibiscono le mani aperte. Pertanto la probabilità che la somma sia 0, come la probabilità che la somma sia 10, è $\frac{1}{36}$.
Inoltre la tabella evidenzia che vi sono due casi in cui la somma ha valore 1, quindi p(1) = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Vi sono 3 casi in cui la somma ha valore 2, quindi p(2) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Vi sono 4 casi in cui la somma ha valore 3, quindi p(3) = $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$…

<u>Osservazione</u>
Si può osservare che la somma con maggiore probabilità di uscita è 5: può avvenire in 6 modi.
Quindi p(5) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

[29] Problema tratto da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 803 n. 65.
[30] Queste ipotesi sono alla base del modello probabilistico della situazione. Ma non è detto che esse valgano nella realtà: infatti, i giocatori potrebbero seguire una precisa strategia oppure uno di essi potrebbe non scegliere a caso il numero di dita da esporre. Pertanto il nostro modello della situazione non è "il" modello, ma solo uno dei modelli, tra i vari possibili, fondato su nostre specifiche decisioni.

Problema amici al bar[31]

2. **Gianni e Francesco sono amici e abitano in due diverse frazioni di un paese, si recano al bar del paese una volta alla settimana, a caso, entrambi alla stessa ora.**
   Che probabilità hanno di incontrarsi?

Possiamo schematizzare la situazione mediante una tabella a doppia entrata come la seguente

Secondo tale schematizzazione, ad esempio, la cella evidenziata in grigio rappresenta l'evento "Gianni va al bar il mercoledì e Francesco il venerdì".
Le celle sono in totale $7 \cdot 7 = 49$ ("casi possibili"). Invece le celle che corrispondono agli incontri tra i due amici sono segnate in verde e si trovano su una diagonale della tabella ("casi favorevoli").
Sono pertanto 7.
Dunque la probabilità p che i due amici si incontrino al bar è

$$p = \frac{7}{49} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

Francesco

Gianni	**Lunedì**	**Martedì**	**Mercoledì**	**Giovedì**	**Venerdì**	**Sabato**	**Domenica**
Lunedì							
Martedì							
Mercoledì							
Giovedì							
Venerdì							
Sabato							
Domenica							

<u>Osservazioni</u>

- La schematizzazione mediante tabella a doppia entrata, per la sua espressività, ha un profondo valore didattico ed è utile che lo studente produca rappresentazioni analoghe, anche solo mentali. Detto ciò, per risolvere il quesito in esame si può anche osservare **direttamente** che Gianni si reca al bar un (solo) giorno della settimana. Francesco può andarci in uno qualunque dei 7 giorni ("casi possibili"); e, tra questi, vi è un solo giorno in cui può incontrare Gianni ("caso favorevole").
  Questo basta per concludere che la probabilità di incontrare Gianni è
  $$p = \frac{1}{7}$$
- Le due **ipotesi** fornite nel testo, "*a caso*" e "*entrambi alla stessa ora*", sono **essenziali** per poter rispondere al quesito. In particolare l'ipotesi "a caso" ci permette di affermare che la visita al bar può avvenire ogni giorno della settimana con la stessa probabilità. E questo giustifica la nostra scelta di optare per una valutazione della probabilità secondo lo schema classico.

[31] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 4.

Problema del cubo verniciato[32]

3. Un cubo di legno verniciato in azzurro viene tagliato con piani paralleli alle facce in 1.000 cubetti uguali che vengono poi mescolati. Quale è la probabilità che un cubetto preso a caso:
- **abbia una sola faccia azzurra;**
- **abbia due facce azzurre;**
- **abbia tre facce azzurre;**
- **abbia nessuna faccia azzurra.**

Osserviamo innanzitutto che dividere un cubo in 1.000 cubetti uguali nel modo indicato nel testo significa effettuare 10 tagli in verticale, 10 in orizzontale e 10 in "profondità". I cubetti colorati si troveranno sulle *facce esterne* del cubo.

- I cubetti che contengono i vertici del cubo hanno **tre facce colorate** e sono 8.
  Perciò $P_3 = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125}$

- I cubetti con **due facce colorate** contengono parte di uno spigolo del cubo, ma non i vertici. Su ogni spigolo ci sono 10 cubetti, ma due contengono i vertici. Quindi su ogni spigolo vi sono 8 cubetti con due facce colorate. Gli spigoli del cubo sono 12.
  Perciò $P_2 = \frac{(8 \cdot 12)}{1.000} = \frac{12}{125}$

- I cubetti con **una sola faccia** azzurra contengono parte di una faccia del cubo, ma non gli spigoli. Su ogni faccia ci sono dunque $8 \cdot 8 = 64$ cubetti[33] e le facce del cubo sono 6.
  Perciò $P_1 = \frac{(8^2 \cdot 6)}{1.000} = \frac{48}{125}$

- Per determinare il numero dei cubetti **non verniciati**, possiamo osservare che la *parte interna* del cubo contiene $8^3 = 512$ cubetti.
  In alternativa possiamo seguire un procedimento indiretto, sottraendo al numero totale di cubetti (1.000) il numero di quelli colorati. Otteniamo così:

$$1.000 - (8 + 8 \cdot 12 + 8^2 \cdot 6) = 512 = 8^3$$

  In ogni caso, la probabilità di estrarre un cubetto con nessuna faccia azzurra è:

$$P_0 = \frac{8^3}{1.000} = \mathbf{\frac{64}{125}}$$

Osservazione

Il metodo indiretto, proposto per contare i cubetti, può essere utile almeno come controllo.

[32] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 14 n. 5.
[33] Abbiamo tolto i cubetti che contengono uno spigolo.