APPENDICE

A1 Prime valutazioni di probabilità

Problema del gioco della morra[29].

1. **Nell'antico gioco della morra due giocatori mostrano contemporaneamente la loro mano destra, stendendo la mano chiusa a pugno (zero dita) oppure una o due o tre o quattro o cinque dita; ogni giocatore deve indovinare il numero che si ottiene *sommando le dita"* di entrambi. Valutare i possibili risultati della "*somma delle dita*" e la probabilità di ciascun risultato.**

Per iniziare, assumiamo che entrambi i giocatori scelgano "a caso" il numero di dita da esporre. In altre parole decidiamo che i casi che si possono presentare per ciascun giocatore siano: esporre zero dita, un dito, due dita, …, cinque dita; e che essi siano equiprobabili[30].
Proseguiamo rappresentando i possibili esiti: in questa situazione conviene realizzare una tabella a doppia entrata, analoga alla seguente, che è in sostanza una tavola dell'addizione.

Giocatore A

Giocatore B	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
3	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
4	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
5	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

Il valore minimo delle somme è 0 e si ottiene nel caso in cui entrambi i giocatori mostrano i pugni chiusi. Il massimo è 10 e si ottiene nel caso in cui i giocatori esibiscono le mani aperte. Pertanto la probabilità che la somma sia 0, come la probabilità che la somma sia 10, è $\frac{1}{36}$.
Inoltre la tabella evidenzia che vi sono due casi in cui la somma ha valore 1, quindi p(1) = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Vi sono 3 casi in cui la somma ha valore 2, quindi p(2) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Vi sono 4 casi in cui la somma ha valore 3, quindi p(3) = $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$…

<u>Osservazione</u>
Si può osservare che la somma con maggiore probabilità di uscita è 5: può avvenire in 6 modi.
Quindi p(5) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

[29] Problema tratto da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 803 n. 65.
[30] Queste ipotesi sono alla base del modello probabilistico della situazione. Ma non è detto che esse valgano nella realtà: infatti, i giocatori potrebbero seguire una precisa strategia oppure uno di essi potrebbe non scegliere a caso il numero di dita da esporre. Pertanto il nostro modello della situazione non è "il" modello, ma solo uno dei modelli, tra i vari possibili, fondato su nostre specifiche decisioni.

Problema amici al bar[31]

2. **Gianni e Francesco sono amici e abitano in due diverse frazioni di un paese, si recano al bar del paese una volta alla settimana, a caso, entrambi alla stessa ora.**
   Che probabilità hanno di incontrarsi?

Possiamo schematizzare la situazione mediante una tabella a doppia entrata come la seguente

Secondo tale schematizzazione, ad esempio, la cella evidenziata in grigio rappresenta l'evento "Gianni va al bar il mercoledì e Francesco il venerdì".
Le celle sono in totale $7 \cdot 7 = 49$ ("casi possibili"). Invece le celle che corrispondono agli incontri tra i due amici sono segnate in verde e si trovano su una diagonale della tabella ("casi favorevoli").
Sono pertanto 7.
Dunque la probabilità p che i due amici si incontrino al bar è

$$p = \frac{7}{49} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

Francesco

Gianni

	Lunedì	**Martedì**	**Mercoledì**	**Giovedì**	**Venerdì**	**Sabato**	**Domenica**
Lunedì							
Martedì							
Mercoledì							
Giovedì							
Venerdì							
Sabato							
Domenica							

<u>**Osservazioni**</u>

- La schematizzazione mediante tabella a doppia entrata, per la sua espressività, ha un profondo valore didattico ed è utile che lo studente produca rappresentazioni analoghe, anche solo mentali. Detto ciò, per risolvere il quesito in esame si può anche osservare **direttamente** che Gianni si reca al bar un (solo) giorno della settimana. Francesco può andarci in uno qualunque dei 7 giorni ("casi possibili"); e, tra questi, vi è un solo giorno in cui può incontrare Gianni ("caso favorevole").
  Questo basta per concludere che la probabilità di incontrare Gianni è
  $$p = \frac{1}{7}$$
- Le due **ipotesi** fornite nel testo, "*a caso*" e "*entrambi alla stessa ora*", sono **essenziali** per poter rispondere al quesito. In particolare l'ipotesi "a caso" ci permette di affermare che la visita al bar può avvenire ogni giorno della settimana con la stessa probabilità. E questo giustifica la nostra scelta di optare per una valutazione della probabilità secondo lo schema classico.

[31] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 4.

Problema del cubo verniciato[32]

3. Un cubo di legno verniciato in azzurro viene tagliato con piani paralleli alle facce in 1.000 cubetti uguali che vengono poi mescolati. Quale è la probabilità che un cubetto preso a caso:
- **abbia una sola faccia azzurra;**
- **abbia due facce azzurre;**
- **abbia tre facce azzurre;**
- **abbia nessuna faccia azzurra.**

Osserviamo innanzitutto che dividere un cubo in 1.000 cubetti uguali nel modo indicato nel testo significa effettuare 10 tagli in verticale, 10 in orizzontale e 10 in "profondità". I cubetti colorati si troveranno sulle *facce esterne* del cubo.

- I cubetti che contengono i vertici del cubo hanno **tre facce colorate** e sono 8.
  Perciò $P_3 = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125}$

- I cubetti con **due facce colorate** contengono parte di uno spigolo del cubo, ma non i vertici. Su ogni spigolo ci sono 10 cubetti, ma due contengono i vertici. Quindi su ogni spigolo vi sono 8 cubetti con due facce colorate. Gli spigoli del cubo sono 12.
  Perciò $P_2 = \frac{(8 \cdot 12)}{1.000} = \frac{12}{125}$

- I cubetti con **una sola faccia** azzurra contengono parte di una faccia del cubo, ma non gli spigoli. Su ogni faccia ci sono dunque $8 \cdot 8 = 64$ cubetti[33] e le facce del cubo sono 6.
  Perciò $P_1 = \frac{(8^2 \cdot 6)}{1.000} = \frac{48}{125}$

- Per determinare il numero dei cubetti **non verniciati**, possiamo osservare che la *parte interna* del cubo contiene $8^3 = 512$ cubetti.
  In alternativa possiamo seguire un procedimento indiretto, sottraendo al numero totale di cubetti (1.000) il numero di quelli colorati. Otteniamo così:

$$1.000 - (8 + 8 \cdot 12 + 8^2 \cdot 6) = 512 = 8^3$$

  In ogni caso, la probabilità di estrarre un cubetto con nessuna faccia azzurra è:

$$P_0 = \frac{8^3}{1.000} = \mathbf{\frac{64}{125}}$$

<u>Osservazione</u>

Il metodo indiretto, proposto per contare i cubetti, può essere utile almeno come controllo.

[32] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 14 n. 5.
[33] Abbiamo tolto i cubetti che contengono uno spigolo.

A2 Esercizi dai libri di testo

Esercizi tratti da "Nuova Matematica a colori - Algebra 2" di L. Sasso, Petrini editore

Alcuni esercizi significativi possono essere i numeri 41,42,44,45,52,54,56,58,60,62,63,67 del capitolo dedicato alla probabilità.

A3 Intolleranza al lattosio[34]

A seconda dei vari paesi la prevalenza cambia, la capacità di digerire il lattosio si ritrova nella maggior parte dei popoli dell'Europa del nord e in alcuni popoli del mediterraneo. Sono lattosio-intolleranti molti asiatici, africani e nativi americani:

Nazione	Prevalenza
Svezia	2%
Inghilterra	5–15%
Svizzera	10%
Finlandia	17%
Austria	15-20%
Germania	15%
Francia	17%-65% (a seconda del nord o sud Francia)
Italia	52% nord, 19% centro, 41% sud
India	20%
Portogallo	35%
Mongolia	87.9%
Cina	95%

L'intolleranza congenita conclamata in Italia è oggettivamente rara (sono stati descritti in letteratura non più di 100 casi); è più facile imbattersi in casi di progressiva perdita di efficienza dell'enzima nell'individuo con l'avvicinarsi dell'età adulta, più presente in popolazioni di ceppo etnico riferibile al sud del pianeta con picchi del 90% nella popolazione nera e asiatica fino ad un minimo del 15% nella popolazione del Nord Europa.

[34] Estratto da http://it.wikipedia.org/wiki/Intolleranza_al_lattosio

A4 Insider trading

Il reato di abuso di informazioni privilegiate[35]

In Italia l'abuso di informazioni privilegiate è, infatti, attualmente disciplinato dal decreto legislativo del 24 febbraio 1998 n. 58 che ha recepito, tramite la legge comunitaria del 2004, le indicazioni contenute nella norma europea.
Ai sensi del disposto di cui all'art.184 del TUF compie il reato di abuso di informazioni privilegiate:
«[...] chiunque, essendo in possesso di informazioni privilegiate in ragione della sua qualità di membro di organi di amministrazione, direzione o controllo dell'emittente, della partecipazione al capitale dell'emittente, ovvero dell'esercizio di un'attività lavorativa, di una professione o di una funzione, anche pubblica, o di un ufficio:

a) acquista, vende o compie altre operazioni, direttamente od indirettamente, per conto proprio o per conto di terzi, su strumenti finanziari utilizzando le informazioni medesime;
b) comunica tali informazioni ad altri, al di fuori del normale esercizio del lavoro, della professione, della funzione o dell'ufficio;
c) raccomanda od induce altri, sulla base di esse, al compimento di taluna delle operazioni indicate nella lettera a)**»**

mentre l'articolo 181, comma 1, specifica cosa debba intendersi per *informazione privilegiata*:

«[...] si intende un'informazione di carattere preciso, che non è stata resa pubblica, concernente, direttamente o indirettamente, uno o più emittenti strumenti finanziari od uno o più strumenti finanziari, che, se resa pubblica, potrebbe influire in modo sensibile sui prezzi di tali strumenti finanziari.**»**

[35] Estratto da https://it.wikipedia.org/wiki/Insider_trading consultato in data 16/04/2014.

A5 Valutazioni: aspetti concettuali

Errori sul calcolo delle probabilità[36]

1. **Un giocatore alla roulette dice:**
   "*Punto sul numero 25, così i casi sono due o esce 25 oppure non esce 25, perciò ho una probabilità di vincita del 50%*".
   Perché il giocatore sbaglia?

A seconda del tipo di roulette, i numeri che possono uscire sono 37 o 38. Quindi la probabilità di vincere puntando su un solo numero, nel nostro caso sul 25, è di $\frac{1}{37}$ o $\frac{1}{38}$. Vale a dire, molto meno del 50%.
La probabilità che non esca il 25 è invece $\frac{36}{37}$ oppure $\frac{37}{38}$.

Il giocatore sbaglia perché ha attribuito, *a priori*, la stessa probabilità ai due eventi in esame. In particolare non ha considerato che l'evento "non esce 25" si può scomporre in 36 o 37 eventi elementari, che hanno tutti la stessa probabilità dell'evento "esce 25".

Osservazioni

- In realtà il giocatore è in ottima compagnia: J.B. D'Alembert riteneva che nel lancio di due monete (non truccate) i tre esiti "*due teste*", "*una testa e una croce*", "*due croci*" fossero **equiprobabili.**
- In entrambe le situazioni, un efficace strumento per dirimere la questione consiste nell'effettuare un opportuno numero di **esperimenti** e nell'esaminarne gli esiti.

[36] Esempi e problemi tratti da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 804 n. 84.

Problema dell'interrogazione a sorte[37]

2. In una classe ci sono 22 alunni. Per interrogarli, il professore procede estraendo a sorte: ha un sacchetto che contiene 30 palline, numerate da 1 a 30, e ne estrae una. Se il numero estratto non supera 22, interroga il ragazzo che ha quel numero sul registro, se il numero supera 22 fa la somma delle cifre e interroga il ragazzo che corrisponde al numero ottenuto.
- **È "giusto"?**
- **Qual è la probabilità che ha ciascun ragazzo di essere interrogato?**

Cominciamo osservando che si possono estrarre 30 numeri, quindi vi sono 30 "casi possibili".
Analizziamo prima la situazione in cui viene estratto un **numero maggiore di 22**, organizzando i vari esiti tramite la tabella seguente.

Num. pallina estratta	Somma cifre	Num. Registro Studente
23	2+3=	5
24	2+4=	6
25	2+5=	7
26	2+6=	8
27	2+7=	9
28	2+8=	10
29	2+9=	11
30	3+0=	3

In tale situazione verrà interrogato *solo* uno degli studenti che compare in tabella, ossia un ragazzo il cui numero di registro è tra i seguenti: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Ad esempio, se esce il numero 27, verrà interrogato lo studente che ha numero di registro uguale a 9.
Naturalmente tali casi non esauriscono gli studenti della classe: se esce un numero maggiore di 22, non potrà certo essere interrogato, ad esempio, lo studente che ha numero di registro 4.
Osserviamo comunque che agli 8 numeri da 23 a 30 vengono associati 8 *studenti diversi*. Cioè non c'è uno studente tra gli 8 indicati che può essere interrogato in corrispondenza dell'uscita di due diversi numeri interi compresi tra il 23 e il 30.
Nel caso in cui viene estratto un **numero minore o uguale a 22** si comprende facilmente che può invece venir interrogato uno studente *qualsiasi* tra i 22 della classe. I candidati non sono più ristretti agli 8 del precedente elenco.

Concludiamo quindi che ogni studente che compare in tabella può essere interrogato sia se viene estratto il suo numero di registro sia se viene estratto un opportuno altro numero maggiore di 22. Pertanto per ciascuno di questi la **probabilità** di venir interrogato è $\mathbf{\frac{2}{30}=\frac{1}{15}}$.
Invece lo studente numero 1 e tutti quelli che non compaiono in tabella possono essere interrogati solo se viene estratto il loro numero di registro. Pertanto questi ultimi sono interrogati con **probabilità** $\mathbf{\frac{1}{30}}$.
Concludiamo quindi che la procedura stabilita dal docente non sembra "giusta", in quanto non prevede che ogni studente della classe abbia la stessa probabilità di essere interrogato.

<u>Osservazione</u>
Per rispondere alla domanda *a*, sarebbe bastato fornire un "controesempio", cioè indicare due studenti che hanno differenti probabilità di essere interrogati. Ad esempio il numero 5 ed il numero 4 del registro.

[37] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed. D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 14 n. 7.

A6 Questioni di genetica

Esercizi relativi alla Genetica

Commenti ed indicazioni sulla risoluzione si trovano sulle letture relative alla genetica, tratte dallo stesso libro di testo della Castelnuovo.

La galattosemia[38]

Una malattia ereditaria rara, ma curabile, è la *galattosemia*. Un neonato *galattosemico* manca di un enzima necessario per digerire il latte e perciò mostra gravi reazioni anche quando viene nutrito col latte materno. Basta nutrire il bambino con uno speciale latte artificiale per assicurargli una crescita del tutto normale; altrimenti si hanno gravi conseguenze, come la deficienza mentale o la morte.
Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:

- GG persona sana anche geneticamente;
- gg persona *galattosemica*;
- Gg "portatore sano" di *galattosemia*.

La malattia è dunque *recessiva*, perché si manifesta solo quando la situazione cromosomica è "gg" (omozigote).

Spunti di lavoro
Descrivere le situazioni che si possono presentare e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:

1. Figli di due "portatori sani di galattosemia";
2. Figli di un *galattosemico* e di un "portatore sano";
3. Figli di un genitore *galattosemico e* di un genitore sano anche geneticamente.

Il fattore Rh del sangue

Fra le caratteristiche ereditarie del sangue ha particolare importanza la presenza del *fattore Rh*, una sostanza scoperta nel 1940, che porta a catalogare gli individui in Rh positivi (o Rh^+) e Rh negativi (o Rh^-).
Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:

- RR individuo Rh^+;
- rr individuo Rh^-;
- Rr individuo Rh^+;

In questo caso la caratteristica esaminata (la presenza del fattore Rh nel sangue) è *dominante*, cioè si manifesta anche nella situazione cromosomica Rr (eterozigote).
È importante conoscere il proprio fattore Rh, perché il sangue di tipo Rh^- reagisce contro il sangue di tipo Rh^+ e quindi bisogna tenere presente questa reazione nelle trasfusioni. Il fattore Rh è ancora più importante nelle donne: una donna Rh^- che concepisce un figlio Rh^+ può manifestare delle reazioni contro "il sangue estraneo" del figlio.

[38] Esempi e problemi tratti da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 805 n. 92, 93, 94.

Spunti di lavoro

Descrivere le situazioni possibili[39] per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:

1. madre rr e padre RR;
2. madre rr e padre Rr;
3. madre RR e padre rr;
4. madre Rr e padre Rr.

Trasfusioni e gruppi sanguigni

Al principio del secolo si è scoperto che non sempre si può trasfondere il sangue di una persona in un'altra. Questo fatto ha portato a suddividere il sangue delle persone in quattro gruppi sanguigni, che ora sono chiamati 0, A, B, AB.

Dal punto di vista genetico, le situazioni possibili sono le seguenti:

- AA oppure A0: individuo con sangue di gruppo A;
- BB oppure B0: individuo con sangue di gruppo B;
- 00: individuo con sangue di gruppo 0;
- AB: individuo con sangue di gruppo AB.

Spunti di lavoro

Descrivere le situazioni possibili per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:

1. un genitore 00 e l'altro AB;
2. i due genitore AB;
3. un genitore A0 e l'altro B0;
4. un genitore AA e l'altro BB.

[39] Si noti che in questo caso i ruoli di padre e madre sono simmetrici.