2. I numeri del caso... valutazioni di probabilità

Nel capitolo precedente si sono illustrate varie attività, volte essenzialmente a motivare gli studenti allo studio della probabilità. Ora è il momento di guardare alle situazioni proposte da un'angolazione più razionale, costruendo dei semplici modelli probabilistici che conducono alle prime valutazioni quantitative di probabilità. Si tratta, in sostanza, di esprimere mediante un numero il "grado di fiducia" che si attribuisce al realizzarsi di un dato evento, sulla base delle informazioni di cui si dispone.

2.1 Un problema per iniziare

L'idea è di iniziare da questioni che lo studente del primo biennio, da una parte, sia in grado di affrontare in modo abbastanza autonomo, contando sulle conoscenze di cui dispone, ma che dall'altra non consideri nemmeno come troppo banali. Insomma, ha senso partire dall'investigazione di questioni che siano percepite come sfide significative e costruttive. In quest'ottica vale la pena esaminare il lancio di due dadi[1]*.*

Lanciamo due dadi "onesti", che hanno le facce numerate da 1 a 6.
Su quale punteggio (somma dei due numeri usciti) scommettereste? Perché?

Per contribuire alla costruzione dei saperi e favorirne la disponibilità a lungo termine, l'attività di risoluzione dovrebbe cominciare con l'esplorazione del problema.
Ciò significa che, in un contesto laboratoriale, i ragazzi effettuano prove[2] *(ossia lanciano materialmente i dadi), ne registrano gli esiti, li esaminano, schematizzano la situazione mediante opportune rappresentazioni … e, ricorrendo anche a conoscenze pregresse, arrivano a formulare congetture personali.*
Nel contempo il docente stimola e guida la discussione, invita a precisare le affermazioni e a giustificarle, ma non assume su di sé la responsabilità di fornire le risposte, almeno in questa fase.
Entrando nel dettaglio, il docente può suggerire di modellizzare la questione mediante una tabella a doppia entrata, analoga a quella proposta in figura e che costituisce in sostanza una tavola dell'addizione. Per fissare le idee, si può supporre che uno dei due dadi sia di colore blu e l'altro nero.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

dado nero

[1] Per alcune classi anche la più elementare situazione del lancio di un solo dado può risultare significativa. Per altre, all'opposto, può essere interessante investigare sul lancio di tre dadi.
[2] Gli esperimenti materiali e le simulazioni al calcolatore sono attività fondamentali per la costruzione dei saperi. Nella prassi didattica esse non dovrebbero essere disgiunte dalla trattazione "teorica": ci occuperemo nel dettaglio di esse nel prossimo capitolo, ma lo faremo unicamente per ragioni di chiarezza espositiva.

Come si vede, essa offre una rappresentazione immediata e globale della situazione, che arricchisce non poco la descrizione che si ottiene mediante il solo linguaggio naturale o l'algebra.
Stabilita l'espressività di tale rappresentazione, gli studenti dovrebbero investire del tempo nell'osservarla alla ricerca di eventuali regolarità. Ad esempio, si dovrebbero presto accorgere[3] *che essa è simmetrica rispetto alla diagonale relativa al punteggio 7, evidenziata in figura; questa proprietà della figura corrisponde ad una precisa proprietà algebrica … la commutatività dell'addizione.*
Pertanto i ragazzi non stanno semplicemente risolvendo un problema di probabilità, ma hanno modo di sviluppare abilità trasversali, come quella di passare da una forma di rappresentazione all'altra (da linguistica ad algebrica a grafica). Questo è il senso profondo che attribuiamo all'attività! E se gli studenti non lo colgono da soli, occorrerà chiarirlo loro esplicitamente.

Facendo riferimento al modello così realizzato, si dovrebbe stabilire agevolmente che il punteggio più frequente in tabella è il "7" e pertanto è su di esso che conviene scommettere. Precisamente, la probabilità che il punteggio sia "7" è

$$\frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

Osservazione
Prima di concludere, merita osservare esplicitamente che nel valutare tale probabilità, sono state prese alcune decisioni[4]:
- si è attribuito lo stesso valore di probabilità all'evento rappresentato da una ciascuna cella della tabella[5]
- si è calcolata la probabilità come rapporto tra il numero dei casi in cui esce il punteggio "7" e il numero dei casi che (… ancora una volta, decidiamo) si possono presentare[6].

Naturalmente spetta al docente stabilire il momento opportuno per discutere tali aspetti con la classe.

[3] Eventualmente stimolati dal docente.
[4] Tali assunzioni trovano generalmente larga condivisione in contesti quali il lancio di due dadi. Ma restano comunque delle *ipotesi*, e come tali diventano parte integrante del *modello* costruito per affrontare il problema in esame. Tali considerazioni andrebbero esplicitate agli studenti, anche perché non siano portati a pensare che ogni evento ammetta un unico valore di probabilità, cioè un valore universalmente riconosciuto come "il" corretto valore.
[5] Approfondiremo la questione più avanti nel capitolo. Per ora ci limitiamo ad osservare che proprio questa assunzione precisa il significato dell'espressione "onesti", utilizzata nel testo del quesito.
[6] In realtà, la decisione di valutare la probabilità come rapporto tra il numero dei casi possibili e quello dei casi favorevoli all'evento "esce il punteggio 7", si può far risalire a due decisioni più a monte. La prima è l'equiprobabilità degli eventi "elementari" rappresentati da ciascuna cella della tabella, la seconda è che la probabilità di due eventi disgiunti (nella situazione in esame, due celle della tabella) sia la somma delle probabilità di tali eventi. Infatti, per la prima ipotesi, si ha che la probabilità dell'evento elementare è $\frac{1}{36}$, mentre per la seconda, la probabilità dell'evento "esce il 7" è $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{36}=6\cdot\frac{1}{36}$, visto che sono 6 le celle con punteggio "7".
Più formalmente e più in generale, consideriamo uno spazio degli eventi che abbia un numero finito n di elementi e tale che tutti i suoi elementi siano equiprobabili. Se si assume valgano gli assiomi della probabilità (in particolare l'additività sugli eventi disgiunti), allora si può dimostrare che la probabilità di un evento costituito da k elementi di tale spazio, è necessariamente data dal rapporto $\frac{k}{n}$. E la dimostrazione è esattamente analoga a quella ora seguita nel contesto specifico del lancio di due dadi.

Ancora dadi: ulteriori valutazioni di probabilità

La questione esaminata costituisce una sorta di problema guida, sulla base del quale gli studenti dovrebbero misurarsi nella modellizzazione e risoluzione di quesiti analoghi, operando però in modo più autonomo. Si tratta di determinare la probabilità di eventi analoghi, ad esempio dei seguenti, prestando attenzione agli aspetti metodologici sottesi, affinché essi siano poi disponibili anche in altri contesti.

Esce lo stesso numero sui due dadi.

L'insieme dei casi favorevoli all'evento è ancora rappresentato da una diagonale della tabella.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

dado nero

Il numero che esce sul dado nero è maggiore di quello che esce sul dado blu.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

dado nero

Invece di contare il numero di celle verdi una per una, si può sfruttare la simmetria rispetto alla diagonale principale, già notata nella fase di costruzione della tabella. Pertanto il numero dei "casi favorevoli" si può anche ottenere mediante un calcolo della forma

$$(36 - 6) : 2$$

Finché si considerano dadi a 6 facce, le due strategie indicate sembrano essere ugualmente efficienti. Ma lo sono ancora per lanci di dadi a 20 facce?

Ricorrere a dadi che hanno molte facce, serve per motivare lo studente a cercare più strategie risolutive e a confrontarne la bontà. Infatti, se il conteggio esplicito fosse rapido, la ricerca di ulteriori approcci apparirebbe agli occhi dei ragazzi un'inutile complicazione.

Escono i numeri "2" e "5".

Attenzione. Non è specificato su quale dei due dadi debba uscire il "2" e su quale il "5". Quindi vi sono due "casi favorevoli"…

Questa questione offre una ghiotta occasione per riflettere sull'importanza di esaminare ogni singolo termine di un testo espresso nel linguaggio naturale, quando si vuole coglierne il preciso significato e la corretta interpretazione.

Il punteggio è 5.
Il punteggio è 9.

"+"	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7

dado blu (righe) – dado nero (colonne)

L'insieme delle celle di contenuto "5" e l'insieme delle celle di contenuto "9" sono <u>simmetrici</u> rispetto ad una delle diagonali della tabella.

Corrispondentemente, i numeri 5 e 9 <u>differiscono</u> dal numero 7, della stessa quantità in modulo.

Il punteggio è un numero pari.

"+"	p	d
d		
p		

dado blu (righe) – dado nero (colonne)

Per rispondere è sufficiente contare esplicitamente i "casi favorevoli" quali appaiono sulla tabella utilizzata finora.
In alternativa si può far riferimento ad un modello più efficiente: la tabella "contratta" in figura,
dove p = numero pari, d = numero dispari.

Come evidenzia questo quesito, è importante che gli studenti dispongano di esempi significativi di modelli di calcolo, che hanno costruito consapevolmente in contesti specifici e che sanno poi richiamare in situazioni analoghe. Ma è altrettanto importante che i ragazzi siano in grado di adattare opportunamente tali modelli al problema che stanno esaminando.
Altrimenti questi schemi si riducono a mere ricette di calcolo, da applicare in modo acritico, alla stregua di piatte formule risolutive.

<u>Osservazione</u>
La rappresentazione grafica proposta in questi primi esempi permette già di notare un fatto importante: la probabilità di un evento è una <u>misura</u> dell'insieme che lo rappresenta. Nell'ultima questione esaminata la probabilità è $\frac{1}{2}$, ossia è la misura (area) dell'insieme colorato in verde rispetto alla misura dell'intera tabella.

Per completezza, esaminiamo infine due situazioni in cui la probabilità vale rispettivamente 0 e 1.

Il punteggio è 13.
Il punteggio è minore di 13.

Il punto di vista della geometria analitica *[7]

Abbiamo già esaminato il problema relativo al lancio di due dadi da vari punti di vista, che spaziano dal registro linguistico a quello grafico, ciascuno dei quali arricchisce la nostra comprensione della situazione. In questo spirito proviamo a considerare l'ulteriore rappresentazione che offre la geometria analitica; vedremo che essa permette di giustificare alcune regolarità che si scorgono sulla tabella 6x6 con cui abbiamo modellizzato il problema.

Perché le celle che appartengono ad una stessa diagonale hanno lo stesso punteggio, ad esempio il 5?

Cominciamo indicando con *x* il numero che esce sul dado nero, con *y* il numero che esce sul dado blu e nel fissare il sistema di riferimento in figura. Possiamo così interpretare i numeri *x*, *y* come le coordinate, rispetto a tale sistema di riferimento, di una cella della tabella[8]. Ad esempio, la cella contornata in rosso in figura ha coordinate (5, 3).
Possiamo spingerci oltre e notare che tale cella rappresenta il lancio che ha avuto come esito il punteggio 5+3 = 8. Più in generale, ogni cella di coordinate (x, y) rappresenta il lancio che ha avuto come esito il punteggio x + y.

Si può così schematizzare quanto finora osservato:

alla cella (x, y) corrisponde il punteggio 5 $\Longleftrightarrow$ **x + y = 5** e x, y ϵ {1,2,...,6}

Ora, l'equazione x+y= 5, o y=-x+5, rappresenta una retta nel piano cartesiano. Pertanto concludiamo che:

*le celle a cui corrisponde il punteggio 5 si trovano su una **"retta"***

Precisamente il loro vertice "in alto a destra" (puntino blu in figura) appartiene alla retta **y=-x+5.**

y
(numero che esce sul dado blu)

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

x
(numero che esce sul dado nero)

7 Con il simbolo * denotiamo una sezione che può essere omessa senza precludere agli studenti la comprensione delle successive.

8 Precisamente (x,y) sono le coordinate del vertice in "alto a destra" della cella, ossia il vertice della cella che ha entrambe le coordinate maggiori di quelle degli altri vertici della cella.

2.2 Non solo giochi, non solo calcoli

Il problema del lancio dei due dadi si può considerare un problema "guida", nel senso che serve ad introdurre contenuti elementari del calcolo delle probabilità e a veicolare specifici strumenti metodologici. Tuttavia gli studenti hanno poi bisogno di riesaminare tali aspetti e di rielaborali anche individualmente, ciascuno secondo i propri ritmi di apprendimento.
L'attività può essere condotta mediante gli esercizi posti in fondo al capitolo nell'appendice A1 e che si possono proporre per il lavoro autonomo, visto che sono completamente risolti. Altri esempi, desunti da un libro di testo in adozione, si trovano invece nell'appendice A2 sempre in fondo al capitolo.
Si tratta di dadi, monete, carte, urna, roulette, Lotto … Certo, il gioco si presta ad essere modellizzato più facilmente rispetto ad altre situazioni reali (le regole costituiscono già un modello), ma non esaurisce la ricchezza di contesti in cui la probabilità riveste un ruolo significativo.
Insomma: non solo giochi!
E nemmeno solo calcoli!
Infatti l'attività di risoluzione è poco formativa se non è accompagnata dalla
- *effettuazione di <u>esperimenti</u>, ossia di prove materiali con oggetti*
- *<u>modellizzazione</u> mediante tabelle, elenchi, grafi ad albero, schemi …*
- *<u>stima</u> dei risultati numerici.*

E proprio di stima ci occuperemo nella prossima sezione.

2.3 La stima dei risultati *[9]

Molti studenti condividono l'irresistibile tentazione di terminare l'esame di un esercizio o di un problema nell'istante in cui giungono al risultato. Forse ritengono (e noi docenti, a volte, glielo lasciamo credere) che l'unico obiettivo dell'attività di risoluzione sia quello di trovare la risposta, che spesso è costituita da un numero.
Ma se poi non ci si sofferma a riflettere su "quanto grande" sia quel numero, a cosa serve averlo determinato? Come potrà diventare un riferimento sulla base del quale prendere decisioni consapevoli, come magari quella, radicale, di non partecipare ad un dato gioco d'azzardo?
Di qui l'importanza di discutere questioni orientate a sviluppare tale sensibilità numerica. Vogliamo però chiarire che le attività che proponiamo in questa sezione non mirano tanto a stabilire la grandezza del risultato mediante maggiorazioni e minorazioni, quanto a formarsene un'idea a livello intuitivo.

La Lotteria Italia

La Lotteria Italia 2017 ha venduto 8.603.900 biglietti. Ogni biglietto costa 5 € e il primo premio è di 5.000.000 €.

a) Per quanto tempo dovrei comprare un biglietto al giorno[10], per essere sicuro di vincere il premio? Prima prova a rispondere senza utilizzare la calcolatrice.
b) Tale spesa a quale percentuale del premio corrisponde?

[9] Ricordiamo che con il simbolo * denotiamo una sezione che può essere omessa senza precludere agli studenti la comprensione delle successive.
[10] Naturalmente stiamo ipotizzando una situazione immaginaria, in cui l'estrazione avviene non ad una data fissata ma alla vendita di tutti i biglietti.

a) Essere sicuro di vincere significa comperare tutti i biglietti.
Senza calcolatrice: $8{,}60 \cdot 10^6 : (3{,}65 \cdot 10^2) > 2 \cdot 10^4$ perciò servono più di 20.000 anni.
Più precisamente, circa 23.572 anni.

b) La spesa corrisponde a circa l'860% del premio.

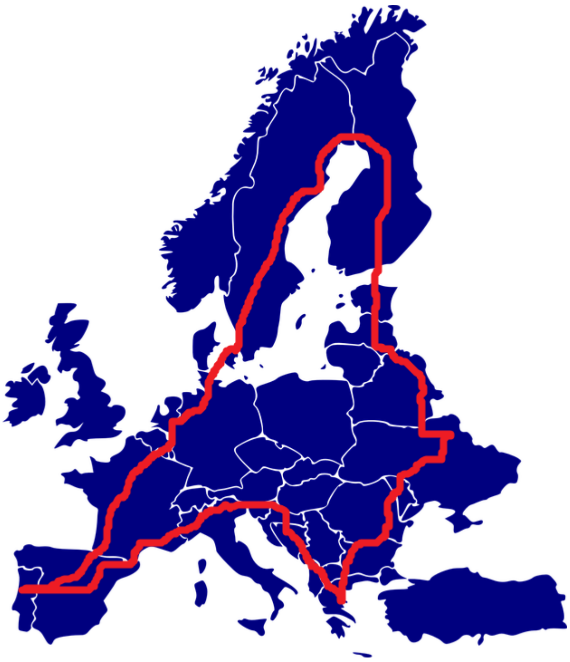
Il Gratta e Vinci Miliardario

A marzo 2014 sul sito di Lottomatica[11], la probabilità di vincere il primo premio di 500.000 euro comprando un solo biglietto è

$$\frac{20}{100.800.000}$$

Quanto è "piccolo" questo numero[12]?

Per comprenderlo, ci ispiriamo all'idea proposta in una puntata della trasmissione **Le Iene**, messa in onda su Italia 1[13].
Immaginiamo dunque di disporre 100.800.000 schedine del "Gratta e Vinci", una di seguito all'altra, in modo che due schedine adiacenti siano a contatto lungo il lato minore.



Dato che il lato maggiore della schedina misura 15 cm, la fila così realizzata risulta essere lunga ben
15 cm x 100.800.000 = **15.120 km**

Per farsi un'idea di quanto grande sia questa misura, basta pensare che corrisponde alla lunghezza del tour tracciato in figura, che attraversa l'Europa, da Bolzano fino ad Helsinki, andata e ritorno, passando per Spagna e Portogallo. Dunque il percorso può essere interamente tappezzato mediante la nostra fila di schedine.

Quante tra esse sono schedine vincenti? Per quanto si legge sul sito della Lottomatica, dobbiamo amaramente constatare che sono solamente 20. Solo 20 schedine disseminate su un percorso che attraversa il continente. Dunque possiamo concludere che:

vincere il primo premio è come[14] pescare una delle 20 schedine vincenti tra tutte quelle disposte lungo il percorso europeo.

[11] http://www.lottomaticaitalia.it/grattaevinci/classico/premi.html

[12] A febbraio 2016 invece la probabilità di vincere era diversa, come è illustrato nel video all'indirizzo https://www.youtube.com/watch?v=grpA_lnABT0

[13] http://www.iene.mediaset.it/puntate/2014/03/26/toffa-gioco-d%E2%80%99azzardo-le-probabilita-di-vincere_8480.shtml

Con questa affermazione intendiamo che la *probabilità* di vincere il primo premio al Gratta e Vinci Miliardario, comperando un solo biglietto, è uguale alla probabilità di pescare una delle 20 schedine vincenti estraendone una a caso tra quelle disposte lungo il percorso europeo.

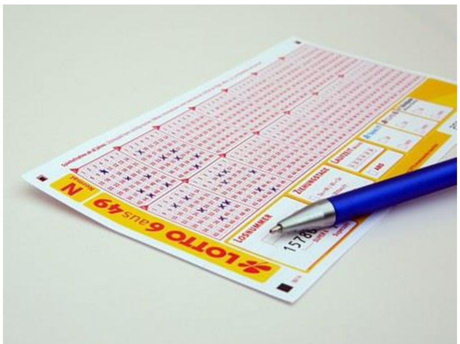
Il SuperEnalotto

La probabilità di vincere il primo premio a tale gioco, comperando un solo biglietto, è

$$\frac{1}{622.614.630}$$

Quanto è "piccolo" questo numero?

Un'altra questione interessante. Un tentativo di risposta altrettanto significativo è stato proposto nell'ambito del progetto "Fate il nostro gioco"[15].



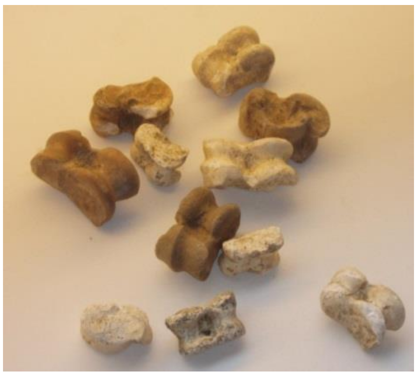
L'idea … vincente è qui di procedere per gradi a partire dalla probabilità di essere estratti a caso tra gli studenti della propria classe, poi tra gli spettatori della Scala, e così via, allargando di volta in volta l'insieme dei "casi possibili", fino a considerare l'intera popolazione europea.
A suggellare l'efficacia didattica dell'attività, contribuisce l'intuizione degli autori di rendere l'interlocutore protagonista, ponendo le domande nella forma "Assisti ad uno spettacolo alla Scala di Milano. Studieresti, sapendo che la tua prof. di matematica salirà sul palco ed interrogherà a caso[16] uno degli spettatori?"
Insomma, c'è di che imparare, anche al di là degli aspetti più strettamente legati alla probabilità.

2.4 Il giudizio di probabilità

Non abbiamo ancora precisato formalmente i contenuti incontrati finora nel percorso: infatti, le sole attività proposte non permettono agli studenti di cogliere a fondo le varie sfumature della valutazione di probabilità, anche se consentono loro di effettuare delle valutazioni di probabilità in semplici situazioni. Perciò riteniamo sia opportuno investire del tempo per investigare ulteriormente tali aspetti, meglio se mediante attività mirate di tipo operativo -sperimentale.

L'equiprobabilità

Attività. L'insegnante mostra una gomma e pone alla classe una domanda del tipo: "se lanciamo in alto *questa* gomma, su quale faccia scommettete che ricada a terra?"



Il contesto richiama l'astragalo e altri giochi dell'antichità.

[15] Il filmato dell'attività, registrato ad un convegno a Torino, si trova all'indirizzo http://www.youtube.com/watch?v=SOB_4PyhpN8 dal minuto 16.06 al minuto 22.21 .
[16] Con l'espressione "a caso" intendiamo che ciascuno degli spettatori ha la stessa probabilità di essere interrogato (distribuzione uniforme di probabilità).

Per non generare confusione, meglio avere l'accortezza di scegliere una gomma oppure un altro oggetto che non si confonda con un solido regolare.
Inoltre dovrebbe essere ormai chiaro che le congetture degli studenti saranno passate al vaglio di diverse prove materiali. E se gli esiti dei lanci non costituiscono certo una dimostrazione, almeno contribuiscono a precisare le idee.

Molti concorderanno sul fatto che le facce della gomma non hanno tutte la stessa probabilità di uscita. Ossia, a differenza degli esperimenti compiuti in precedenza con i dadi, ora gli esiti possibili sembrano non essere equiprobabili.

La questione potrebbe venir chiusa in questo modo, ma essa merita una precisazione[17].

L'equiprobabilità di uscita delle facce di un dado può venir suggerita da ragioni di simmetria della forma, dall'omogeneità dei materiali, in particolare dall'uguaglianza delle densità nei vari punti …
Ma si può stabilire con certezza la validità di proprietà che ad uno sguardo superficiale appaiono così evidenti? Cosa dire, ad esempio, di quanto accade a livello microscopico? Senza contare il fatto che il dado, come il piano su cui rotola, può modificarsi leggermente al susseguirsi dei lanci. E se poi volessimo proprio effettuare delle misure, non è forse vero che esse sono inevitabilmente soggette ad errore?
In varie situazioni è unanime l'accordo sull'equiprobabilità di uscita delle facce di un dado. Ma è proprio questo il punto: di accordo si tratta e non di una presunta verità oggettiva.
Possiamo così riassumere quanto fin qui osservato dicendo che

l'equiprobabilità di più eventi rimane, in ultima analisi, un nostro giudizio.

Il ruolo delle informazioni

Attività. L'insegnante mostra alla classe un mazzo di 40 carte e pone una domanda del tipo: "da *questo* mazzo di 40 carte estraggo una carta; qual è la probabilità che la carta estratta sia un asso?"
Egli ha preparato il mazzo sostituendo i 4 assi con altrettante carte di diverso valore. Ma non comunica questa informazione agli studenti.

Per testare le congetture degli studenti, è istruttivo effettuare delle prove di estrazione dal mazzo mediante reinserimento della carta uscita. Si può così osservare che, per quanto aumenti il numero delle prove, la frequenza relativa dell'evento "esce un asso" non si scosta dal valore 0. Un numero ben diverso dal valore di probabilità, $\frac{1}{10}$*, che esercita un'irresistibile attrazione sulla maggior parte degli studenti.*
Il divario risulta ancora più evidente se si modifica la modalità di estrazione, passando da estrazioni con reinserimento ad estrazioni senza reinserimento della carta nel mazzo. Ciò dovrebbe indurre anche lo studente più convinto, a mettere in discussione le proprie assunzioni iniziali sulla composizione del mazzo.
Dunque, abbiamo ingannato gli studenti? In realtà l'intento era semplicemente quello di veicolare un concetto ben preciso:

la valutazione di probabilità di un evento dipende dalle informazioni di cui la persona dispone sull'esperimento aleatorio, e non solo dall'evento in sé.

È in questo senso che si deve intendere l'affermazione di Bruno de Finetti "[...] la mia tesi, paradossale e un po' provocatoria, ma genuina, è che semplicemente la probabilità non esiste "

[17] La precisazione può essere discussa anche in momenti successivi del corso di studi, se risulta eccessivamente delicata per essere compresa a fondo dalla classe.

In quest'ottica è istruttivo esaminare anche situazioni diverse dai giochi. Tale analisi mostra come il ruolo dell'informazione non sia una questione di esclusivo interesse teorico, ma arrivi ad investire l'esperienza quotidiana.

Intolleranza al lattosio

Invito a cena una persona di cui non conosco le abitudini alimentari. Qual è la probabilità che sia intollerante al lattosio?

La risposta degli studenti verrà confrontata con la distribuzione percentuale dell'intolleranza al lattosio in alcune nazioni, come appare nell'appendice A3 in fondo al capitolo.

Il vostro giudizio di probabilità **ora è cambiato**?

Insider trading

L'insider trading è la compravendita di titoli (azioni, obbligazioni …) di una società presso cui si lavora o della quale si hanno informazioni precise grazie alla propria attività professionale.
Ora, i soggetti che si trovano in tale condizione, potrebbero disporre di informazioni riservate, e per questo posizionarsi sul mercato in modo privilegiato rispetto agli altri investitori.
Di conseguenza, tale attività è soggetta a diverse limitazioni, al punto che può costituire reato. In ogni caso, in molti Paesi la compravendita di azioni dell'azienda presso cui si lavora deve essere tempestivamente comunicata alle autorità competenti.
In Italia l'abuso di informazioni privilegiate è disciplinato dal decreto legislativo del 24 febbraio 1998 n. 58, come si può leggere in fondo al capitolo nell'appendice A4. La parte per noi più interessante è quella in cui il giurista si premura di definire cosa si deve intendere per "informazione privilegiata". Dunque il ruolo giocato in un giudizio dalle informazioni di cui si dispone, è talmente rilevante da essere definito mediante una legge. Ma allora formalizzare e definire non sono processi di esclusiva pertinenza della matematica!

2.5 Facciamo il punto

Nelle sezioni precedenti abbiamo discusso diverse attività, ma non abbiamo ancora precisato formalmente gli oggetti matematici coinvolti nelle prime valutazioni di probabilità. Tale ordine espositivo, così diverso da quello seguito su vari di libri di testo, rispecchia fedelmente una nostra convinzione: in una prima fase, gli studenti dovrebbero impegnarsi nel prendere confidenza con i nuovi oggetti matematici, magari attraverso attività operativo – sperimentali, analoghe a quelle illustrate; in una seconda fase, avendo così maturato una certa sensibilità operativa, dovrebbero poter apprezzare una qualche precisazione formale di tali oggetti. Anzi, dovrebbero riuscire a proporla essi stessi, guidati in modo accorto dal docente[18].
In sintesi: prima gli oggetti e poi i nomi, i simboli e le definizioni.

[18] H. Freudenthal sintetizza un processo di questo tipo mediante l'espressione "reinvenzione guidata".

Coerentemente con queste premesse metodologiche, ci sembra prematuro proporre allo studente del primo biennio un approccio assiomatico, che prevede l'introduzione di oggetti matematici quali spazio campionario, spazio di probabilità, …. D'altronde, se così facendo guadagniamo in immediatezza, come controparte dobbiamo accettare di perdere in univocità e precisione.
Ecco dunque la nostra proposta di "formalizzazione" relativa alle prime valutazioni di probabilità.

La **probabilità** di un evento[19] è un *numero* compreso tra 0 e 1.
All'evento **certo**[20] si attribuisce valore di probabilità 1.
All'evento **impossibile**[21] si attribuisce valore di probabilità 0.

<u>*Un*</u> modo[22] di valutare la probabilità (*schema classico*): la **probabilità** *di un evento* è data da

$$\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{n}}$$

dove

c è il numero dei casi in cui esso si verifica (*casi favorevoli*),
n è il numero dei casi che possono accadere (*casi possibili*).

Stiamo assumendo che tali casi siano tutti "*ugualmente possibili*"[23] tra loro.

Probabilità come funzione

Una precisazione, che diventa però solo un'inutile complicazione se gli studenti non dispongono con sicurezza del linguaggio delle funzioni, è la seguente.

Abbiamo considerato degli *eventi* (affermazioni sugli esiti dell'esperimento) e a ciascuno di essi abbiamo associato un *numero*, la probabilità dell'evento.
Possiamo dunque dire che resta definita una *funzione*[24] dalla famiglia degli eventi nell'intervallo [0,1].
Se indichiamo con *p* una funzione di tale tipo, la probabilità di un evento *E* si *denota* con *p(E)*.

---

[19] Consideriamo il termine *evento* un concetto primitivo, dunque non ne forniamo una definizione.
[20] In questa fase del percorso, preferiamo far appello all'idea intuitiva di *evento certo*, magari ricorrendo ad opportuni esempi, quali "nel lancio di due dadi esce un punteggio minore di 13". Infatti la sua definizione formale implica l'introduzione di nuovi termini (spazio campionario, …), che appesantiscono inutilmente la trattazione per lo studente; d'altra parte non vogliamo nemmeno adottare le espressioni tautologiche che compaiono su vari testi in adozione nella secondaria, del tipo: "l'evento certo è l'evento che si verifica certamente".
[21] Analogamente a quanto osservato a proposito dell'evento certo, prima che a definizioni formali preferiamo far riferimento ad esempi di eventi impossibili, quali "nel lancio di due dadi esce un numero maggiore di 100".
[22] Stiamo generalizzando lo schema che abbiamo utilizzato finora per valutare la probabilità di un evento. Esso è un modo, tra altri possibili, di farlo.
[23] Si comprende come tale affermazione renda circolare lo schema classico di valutazione della probabilità. Si ricorda però che l'equiprobabilità rimane, in ultima analisi, un nostro giudizio.
[24] Nella teoria assiomatica tale funzione si indica come *misura di probabilità*. L'approccio assiomatico alla probabilità definisce quanto appena detto per mezzo di una terna, la terna probabilistica, composta dall'insieme degli eventi elementari, da una famiglia delle sue parti con particolari proprietà, la sigma-algebra degli eventi, ed una funzione, la legge di probabilità, definita su quest'ultima, a valori nell'intervallo [0,1], e soddisfacente ulteriori proprietà. Tuttavia riteniamo prematuro proporre allo studente del primo biennio un approccio assiomatico. Per un approfondimento rigoroso rimandiamo il lettore interessato ad un testo di calcolo delle probabilità, ad esempio Baldi (2012), "Introduzione alla probabilità", McGraw-Hill, Seconda Edizione.

2.6 Esercizi e letture per l'approfondimento *[25]

A conclusione del capitolo, esaminiamo alcune questioni che mirano allo sviluppo di precise abilità matematiche e trasversali, in linea con quanto raccomandano le Indicazioni Nazionali. In particolare, tali problemi coinvolgono la comprensione del testo e l'argomentazione, più che competenze di calcolo.
Pertanto essi andrebbero collocati nel percorso dopo la fase di formalizzazione discussa nella sezione precedente e comunque non prima che gli studenti dispongano con sicurezza dei principali contenuti e possano così concentrarsi sugli aspetti metodologici. Risultano più efficaci se sono accompagnati da alcune tra le letture suggerite nel capitolo 1 (genetica, casi giudiziari, storia …).

Comprensione del testo e argomentazione

Considera le seguenti affermazioni.

a) "Mario ha due figli e *almeno* uno di essi è maschio"
b) "Mario ha due figli e *il maggiore* di essi è maschio"

Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio, in base a ciascuna delle due affermazioni?

Per rispondere, conviene partire dall'elenco dei casi che si possono presentare e prendere atto che non sono gli stessi nelle due situazioni indicate:

a) i casi possibili si possono schematizzare in questo modo: **MM** MF FM[26]
b) i casi possibili sono invece: **MM** MF

D'altronde, tutto ciò non basta per stabilire i valori di probabilità richiesti. In altre parole, non si è ancora precisato completamente il modello matematico con il quale si intende rappresentare il problema. In particolare, non abbiamo ancora stabilito se considerare equiprobabili i "casi possibili" così individuati.
Pertanto, facciamo un passo indietro e <u>decidiamo</u>[27] di assumere due ipotesi:

- l'equiprobabilità dei due eventi: "nasce un maschio", "nasce una femmina"
- l'indipendenza del sesso di ogni figlio da quello degli altri

Di conseguenza, nel nostro modello i casi possibili sono equiprobabili e possiamo così concludere che:

a) la probabilità richiesta è $\frac{1}{3}$
b) la probabilità è $\frac{1}{2}$.

Altri interessanti esercizi analoghi, interamente svolti, sono riportati in fondo al capitolo nell'appendice A5.

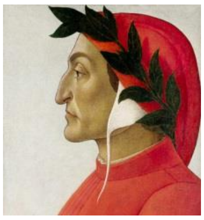
[25] Al solito, nel testo denotiamo con il simbolo * i paragrafi che possono essere omessi dallo studente, senza precludere la comprensione delle altre parti.
[26] Dove M indica l'evento "nato maschio", F l'evento "nato femmina". Inoltre l'ordine di lettura di tali lettere coincide con l'ordine cronologico delle nascite; ad esempio MF rappresenta l'evento "è nato prima un maschio e poi una femmina".
[27] Ancora una volta osserviamo che l'assumere tali ipotesi costituisce una nostra scelta, tra le tante possibili, e non ha alcuna pretesa di oggettività. Ad esempio, si poteva valutare la probabilità di nascere femmina mediante la frequenza relativa dell'evento nell'anno 2013 in Italia: sono nati 264.260 maschi e 250.048 femmine, secondo il bilancio demografico Istat (http://demo.istat.it/bil2013/index.html). Un illuminante approfondimento della questione si trova in Rossi, "La matematica dell'incertezza", Zanichelli, 1999.

Questioni dalla genetica

Esse costituiscono un ottimo contesto per attività interdisciplinari. A titolo di esempio, riportiamo alcuni quesiti nell'appendice A6 in fondo al capitolo.

Il gioco della zara

È un gioco medioevale, noto anche a Dante, visto che è citato addirittura nel sesto canto del Purgatorio:



"Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara."

Si gioca con tre dadi. A turno, ogni giocatore chiama un numero compreso tra 3 e 18 e poi lancia i tre dadi. Vince chi per primo ottiene come punteggio, ossia come somma dei numeri usciti su ciascun dado, il numero chiamato.

Sull'uscita di quale punteggio scommettereste? Perché?

Le regole del gioco prevedono di non ritenere validi i punteggi dal 3 al 7 e dal 14 al 18. Provate ad individuarne una ragione.

La risoluzione di questo quesito è più impegnativa rispetto a quella degli altri proposti nel capitolo. Pertanto, ci si può eventualmente accontentare di "repetere le volte" … magari con il foglio elettronico. La significatività didattica di tale attività è sancita dallo stesso Dante, che si premura di precisare: "repetendo le volte […] tristo impara", ossia effettuando prove ripetute si arriva a comprendere.
Avremo modo di occuparci più diffusamente della questione nel prossimo capitolo. Per ora ci limitiamo a segnalare l'articolo di Mario Barra da Dida Mat[28]*, nel quale si trova anche la risoluzione del quesito in esame.*

[28] M. Barra, R. Gallo, Motivazioni per lo sviluppo del calcolo delle probabilità: scienza, assicurazioni e banche. Gioco d'azzardo, cultura, rischi di plagio e banche, Progetto Alice, n. 53, 2017.
Un articolo meno completo si trova in rete all'indirizzo seguente. Il lancio dei tre dadi è esaminato a pag. 11.
http://www.sbai.uniroma1.it/accascinamonti/ssis/linguaggiodellincertezza1/1%20TeorLimiteCentrStampa2.pdf

APPENDICE

A1 Prime valutazioni di probabilità

Problema del gioco della morra[29].

1. **Nell'antico gioco della morra due giocatori mostrano contemporaneamente la loro mano destra, stendendo la mano chiusa a pugno (zero dita) oppure una o due o tre o quattro o cinque dita; ogni giocatore deve indovinare il numero che si ottiene *sommando le dita"* di entrambi. Valutare i possibili risultati della "*somma delle dita*" e la probabilità di ciascun risultato.**

Per iniziare, assumiamo che entrambi i giocatori scelgano "a caso" il numero di dita da esporre. In altre parole decidiamo che i casi che si possono presentare per ciascun giocatore siano: esporre zero dita, un dito, due dita, …, cinque dita; e che essi siano equiprobabili[30].
Proseguiamo rappresentando i possibili esiti: in questa situazione conviene realizzare una tabella a doppia entrata, analoga alla seguente, che è in sostanza una tavola dell'addizione.

Giocatore A

Giocatore B	0	1	2	3	4	5
0	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
3	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
4	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
5	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

Il valore minimo delle somme è 0 e si ottiene nel caso in cui entrambi i giocatori mostrano i pugni chiusi. Il massimo è 10 e si ottiene nel caso in cui i giocatori esibiscono le mani aperte. Pertanto la probabilità che la somma sia 0, come la probabilità che la somma sia 10, è $\frac{1}{36}$.
Inoltre la tabella evidenzia che vi sono due casi in cui la somma ha valore 1, quindi p(1) = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Vi sono 3 casi in cui la somma ha valore 2, quindi p(2) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Vi sono 4 casi in cui la somma ha valore 3, quindi p(3) = $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$…

<u>Osservazione</u>
Si può osservare che la somma con maggiore probabilità di uscita è 5: può avvenire in 6 modi.
Quindi p(5) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

[29] Problema tratto da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 803 n. 65.
[30] Queste ipotesi sono alla base del modello probabilistico della situazione. Ma non è detto che esse valgano nella realtà: infatti, i giocatori potrebbero seguire una precisa strategia oppure uno di essi potrebbe non scegliere a caso il numero di dita da esporre. Pertanto il nostro modello della situazione non è "il" modello, ma solo uno dei modelli, tra i vari possibili, fondato su nostre specifiche decisioni.

Problema amici al bar[31]

2. **Gianni e Francesco sono amici e abitano in due diverse frazioni di un paese, si recano al bar del paese una volta alla settimana, a caso, entrambi alla stessa ora.**
   Che probabilità hanno di incontrarsi?

Possiamo schematizzare la situazione mediante una tabella a doppia entrata come la seguente

Secondo tale schematizzazione, ad esempio, la cella evidenziata in grigio rappresenta l'evento "Gianni va al bar il mercoledì e Francesco il venerdì".
Le celle sono in totale $7 \cdot 7 = 49$ ("casi possibili"). Invece le celle che corrispondono agli incontri tra i due amici sono segnate in verde e si trovano su una diagonale della tabella ("casi favorevoli").
Sono pertanto 7.
Dunque la probabilità p che i due amici si incontrino al bar è

$$p = \frac{7}{49} = \mathbf{\frac{1}{7}}$$

Francesco

Gianni	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Lunedì							
Martedì							
Mercoledì							
Giovedì							
Venerdì							
Sabato							
Domenica							

<u>**Osservazioni**</u>

- La schematizzazione mediante tabella a doppia entrata, per la sua espressività, ha un profondo valore didattico ed è utile che lo studente produca rappresentazioni analoghe, anche solo mentali. Detto ciò, per risolvere il quesito in esame si può anche osservare **direttamente** che Gianni si reca al bar un (solo) giorno della settimana. Francesco può andarci in uno qualunque dei 7 giorni ("casi possibili"); e, tra questi, vi è un solo giorno in cui può incontrare Gianni ("caso favorevole").
  Questo basta per concludere che la probabilità di incontrare Gianni è
  $$p = \frac{1}{7}$$
- Le due **ipotesi** fornite nel testo, "*a caso*" e "*entrambi alla stessa ora*", sono **essenziali** per poter rispondere al quesito. In particolare l'ipotesi "a caso" ci permette di affermare che la visita al bar può avvenire ogni giorno della settimana con la stessa probabilità. E questo giustifica la nostra scelta di optare per una valutazione della probabilità secondo lo schema classico.

[31] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 4.

Problema del cubo verniciato[32]

3. **Un cubo di legno verniciato in azzurro viene tagliato con piani paralleli alle facce in 1.000 cubetti uguali che vengono poi mescolati. Quale è la probabilità che un cubetto preso a caso:**
    - **abbia una sola faccia azzurra;**
    - **abbia due facce azzurre;**
    - **abbia tre facce azzurre;**
    - **abbia nessuna faccia azzurra.**

Osserviamo innanzitutto che dividere un cubo in 1.000 cubetti uguali nel modo indicato nel testo significa effettuare 10 tagli in verticale, 10 in orizzontale e 10 in "profondità". I cubetti colorati si troveranno sulle *facce esterne* del cubo.

- I cubetti che contengono i vertici del cubo hanno **tre facce colorate** e sono 8.
  Perciò $P_3 = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125}$

- I cubetti con **due facce colorate** contengono parte di uno spigolo del cubo, ma non i vertici. Su ogni spigolo ci sono 10 cubetti, ma due contengono i vertici. Quindi su ogni spigolo vi sono 8 cubetti con due facce colorate. Gli spigoli del cubo sono 12.
  Perciò $P_2 = \frac{(8 \cdot 12)}{1.000} = \frac{12}{125}$

- I cubetti con **una sola faccia** azzurra contengono parte di una faccia del cubo, ma non gli spigoli. Su ogni faccia ci sono dunque $8 \cdot 8 = 64$ cubetti[33] e le facce del cubo sono 6.
  Perciò $P_1 = \frac{(8^2 \cdot 6)}{1.000} = \frac{48}{125}$

- Per determinare il numero dei cubetti **non verniciati**, possiamo osservare che la *parte interna* del cubo contiene $8^3 = 512$ cubetti.
  In alternativa possiamo seguire un procedimento indiretto, sottraendo al numero totale di cubetti (1.000) il numero di quelli colorati. Otteniamo così:

$$1.000 - (8 + 8 \cdot 12 + 8^2 \cdot 6) = 512 = 8^3$$

  In ogni caso, la probabilità di estrarre un cubetto con nessuna faccia azzurra è:

$$P_0 = \frac{8^3}{1.000} = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{125}}$$

Osservazione

Il metodo indiretto, proposto per contare i cubetti, può essere utile almeno come controllo.

[32] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 14 n. 5.
[33] Abbiamo tolto i cubetti che contengono uno spigolo.

A2 Esercizi dai libri di testo

Esercizi tratti da "Nuova Matematica a colori - Algebra 2" di L. Sasso, Petrini editore

Alcuni esercizi significativi possono essere i numeri 41,42,44,45,52,54,56,58,60,62,63,67 del capitolo dedicato alla probabilità.

A3 Intolleranza al lattosio[34]

A seconda dei vari paesi la prevalenza cambia, la capacità di digerire il lattosio si ritrova nella maggior parte dei popoli dell'Europa del nord e in alcuni popoli del mediterraneo. Sono lattosio-intolleranti molti asiatici, africani e nativi americani:

Nazione	Prevalenza
Svezia	2%
Inghilterra	5–15%
Svizzera	10%
Finlandia	17%
Austria	15-20%
Germania	15%
Francia	17%-65% (a seconda del nord o sud Francia)
Italia	52% nord, 19% centro, 41% sud
India	20%
Portogallo	35%
Mongolia	87.9%
Cina	95%

L'intolleranza congenita conclamata in Italia è oggettivamente rara (sono stati descritti in letteratura non più di 100 casi); è più facile imbattersi in casi di progressiva perdita di efficienza dell'enzima nell'individuo con l'avvicinarsi dell'età adulta, più presente in popolazioni di ceppo etnico riferibile al sud del pianeta con picchi del 90% nella popolazione nera e asiatica fino ad un minimo del 15% nella popolazione del Nord Europa.

[34] Estratto da http://it.wikipedia.org/wiki/Intolleranza_al_lattosio

A4 Insider trading

Il reato di abuso di informazioni privilegiate[35]

In Italia l'abuso di informazioni privilegiate è, infatti, attualmente disciplinato dal decreto legislativo del 24 febbraio 1998 n. 58 che ha recepito, tramite la legge comunitaria del 2004, le indicazioni contenute nella norma europea.
Ai sensi del disposto di cui all'art.184 del TUF compie il reato di abuso di informazioni privilegiate:
«[...] chiunque, essendo in possesso di informazioni privilegiate in ragione della sua qualità di membro di organi di amministrazione, direzione o controllo dell'emittente, della partecipazione al capitale dell'emittente, ovvero dell'esercizio di un'attività lavorativa, di una professione o di una funzione, anche pubblica, o di un ufficio:

a) acquista, vende o compie altre operazioni, direttamente od indirettamente, per conto proprio o per conto di terzi, su strumenti finanziari utilizzando le informazioni medesime;
b) comunica tali informazioni ad altri, al di fuori del normale esercizio del lavoro, della professione, della funzione o dell'ufficio;
c) raccomanda od induce altri, sulla base di esse, al compimento di taluna delle operazioni indicate nella lettera a)**»**

mentre l'articolo 181, comma 1, specifica cosa debba intendersi per *informazione privilegiata*:

«[...] si intende un'informazione di carattere preciso, che non è stata resa pubblica, concernente, direttamente o indirettamente, uno o più emittenti strumenti finanziari od uno o più strumenti finanziari, che, se resa pubblica, potrebbe influire in modo sensibile sui prezzi di tali strumenti finanziari.**»**

[35] Estratto da https://it.wikipedia.org/wiki/Insider_trading consultato in data 16/04/2014.

A5 Valutazioni: aspetti concettuali

Errori sul calcolo delle probabilità[36]

1. **Un giocatore alla roulette dice:**
   "*Punto sul numero 25, così i casi sono due o esce 25 oppure non esce 25, perciò ho una probabilità di vincita del 50%*".
   Perché il giocatore sbaglia?

A seconda del tipo di roulette, i numeri che possono uscire sono 37 o 38. Quindi la probabilità di vincere puntando su un solo numero, nel nostro caso sul 25, è di $\frac{1}{37}$ o $\frac{1}{38}$. Vale a dire, molto meno del 50%.
La probabilità che non esca il 25 è invece $\frac{36}{37}$ oppure $\frac{37}{38}$.

Il giocatore sbaglia perché ha attribuito, *a priori*, la stessa probabilità ai due eventi in esame. In particolare non ha considerato che l'evento "non esce 25" si può scomporre in 36 o 37 eventi elementari, che hanno tutti la stessa probabilità dell'evento "esce 25".

Osservazioni
- In realtà il giocatore è in ottima compagnia: J.B. D'Alembert riteneva che nel lancio di due monete (non truccate) i tre esiti "*due teste*", "*una testa e una croce*", "*due croci*" fossero **equiprobabili.**
- In entrambe le situazioni, un efficace strumento per dirimere la questione consiste nell'effettuare un opportuno numero di **esperimenti** e nell'esaminarne gli esiti.

[36] Esempi e problemi tratti da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 804 n. 84.

Problema dell'interrogazione a sorte[37]

2. **In una classe ci sono 22 alunni. Per interrogarli, il professore procede estraendo a sorte: ha un sacchetto che contiene 30 palline, numerate da 1 a 30, e ne estrae una. Se il numero estratto non supera 22, interroga il ragazzo che ha quel numero sul registro, se il numero supera 22 fa la somma delle cifre e interroga il ragazzo che corrisponde al numero ottenuto.**
    - **È "giusto"?**
    - **Qual è la probabilità che ha ciascun ragazzo di essere interrogato?**

Cominciamo osservando che si possono estrarre 30 numeri, quindi vi sono 30 "casi possibili".
Analizziamo prima la situazione in cui viene estratto un **numero maggiore di 22**, organizzando i vari esiti tramite la tabella seguente.

Num. pallina estratta	Somma cifre	Num. Registro Studente
23	2+3=	5
24	2+4=	6
25	2+5=	7
26	2+6=	8
27	2+7=	9
28	2+8=	10
29	2+9=	11
30	3+0=	3

In tale situazione verrà interrogato *solo* uno degli studenti che compare in tabella, ossia un ragazzo il cui numero di registro è tra i seguenti: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Ad esempio, se esce il numero 27, verrà interrogato lo studente che ha numero di registro uguale a 9.
Naturalmente tali casi non esauriscono gli studenti della classe: se esce un numero maggiore di 22, non potrà certo essere interrogato, ad esempio, lo studente che ha numero di registro 4.
Osserviamo comunque che agli 8 numeri da 23 a 30 vengono associati 8 *studenti diversi*. Cioè non c'è uno studente tra gli 8 indicati che può essere interrogato in corrispondenza dell'uscita di due diversi numeri interi compresi tra il 23 e il 30.
Nel caso in cui viene estratto un **numero minore o uguale a 22** si comprende facilmente che può invece venir interrogato uno studente *qualsiasi* tra i 22 della classe. I candidati non sono più ristretti agli 8 del precedente elenco.

Concludiamo quindi che ogni studente che compare in tabella può essere interrogato sia se viene estratto il suo numero di registro sia se viene estratto un opportuno altro numero maggiore di 22. Pertanto per ciascuno di questi la **probabilità** di venir interrogato è $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$.
Invece lo studente numero 1 e tutti quelli che non compaiono in tabella possono essere interrogati solo se viene estratto il loro numero di registro. Pertanto questi ultimi sono interrogati con **probabilità** $\frac{1}{30}$.
Concludiamo quindi che la procedura stabilita dal docente non sembra "giusta", in quanto non prevede che ogni studente della classe abbia la stessa probabilità di essere interrogato.

Osservazione
Per rispondere alla domanda *a*, sarebbe bastato fornire un "controesempio", cioè indicare due studenti che hanno differenti probabilità di essere interrogati. Ad esempio il numero 5 ed il numero 4 del registro.

[37] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed. D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 14 n. 7.

A6 Questioni di genetica

Esercizi relativi alla Genetica

Commenti ed indicazioni sulla risoluzione si trovano sulle letture relative alla genetica, tratte dallo stesso libro di testo della Castelnuovo.

La galattosemia[38]

Una malattia ereditaria rara, ma curabile, è la *galattosemia*. Un neonato *galattosemico* manca di un enzima necessario per digerire il latte e perciò mostra gravi reazioni anche quando viene nutrito col latte materno. Basta nutrire il bambino con uno speciale latte artificiale per assicurargli una crescita del tutto normale; altrimenti si hanno gravi conseguenze, come la deficienza mentale o la morte.
Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:

- GG persona sana anche geneticamente;
- gg persona *galattosemica*;
- Gg "portatore sano" di *galattosemia*.

La malattia è dunque *recessiva*, perché si manifesta solo quando la situazione cromosomica è "gg" (omozigote).

Spunti di lavoro
Descrivere le situazioni che si possono presentare e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:

1. Figli di due "portatori sani di galattosemia";
2. Figli di un *galattosemico* e di un "portatore sano";
3. Figli di un genitore *galattosemico e* di un genitore sano anche geneticamente.

Il fattore Rh del sangue

Fra le caratteristiche ereditarie del sangue ha particolare importanza la presenza del *fattore Rh*, una sostanza scoperta nel 1940, che porta a catalogare gli individui in Rh positivi (o Rh^+) e Rh negativi (o Rh^-).
Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:

- RR individuo Rh^+;
- rr individuo Rh^-;
- Rr individuo Rh^+;

In questo caso la caratteristica esaminata (la presenza del fattore Rh nel sangue) è *dominante*, cioè si manifesta anche nella situazione cromosomica Rr (eterozigote).
È importante conoscere il proprio fattore Rh, perché il sangue di tipo Rh^- reagisce contro il sangue di tipo Rh^+ e quindi bisogna tenere presente questa reazione nelle trasfusioni. Il fattore Rh è ancora più importante nelle donne: una donna Rh^- che concepisce un figlio Rh^+ può manifestare delle reazioni contro "il sangue estraneo" del figlio.

---

[38] Esempi e problemi tratti da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 805 n. 92, 93, 94.

Spunti di lavoro
Descrivere le situazioni possibili[39] per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
1. madre rr e padre RR;
2. madre rr e padre Rr;
3. madre RR e padre rr;
4. madre Rr e padre Rr.

Trasfusioni e gruppi sanguigni

Al principio del secolo si è scoperto che non sempre si può trasfondere il sangue di una persona in un'altra. Questo fatto ha portato a suddividere il sangue delle persone in quattro gruppi sanguigni, che ora sono chiamati 0, A, B, AB.
Dal punto di vista genetico, le situazioni possibili sono le seguenti:
- AA oppure A0: individuo con sangue di gruppo A;
- BB oppure B0: individuo con sangue di gruppo B;
- 00: individuo con sangue di gruppo 0;
- AB: individuo con sangue di gruppo AB.

Spunti di lavoro
Descrivere le situazioni possibili per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
1. un genitore 00 e l'altro AB;
2. i due genitore AB;
3. un genitore A0 e l'altro B0;
4. un genitore AA e l'altro BB.

[39] Si noti che in questo caso i ruoli di padre e madre sono simmetrici.