

3.7 Non dimentichiamo le prove con oggetti

Le simulazioni mediante il foglio elettronico costituiscono un formidabile strumento didattico, ma, come discusso all'inizio del capitolo, non sostituiscono le prove materiali e la manipolazione di oggetti.

Come le altre attività operative – sperimentali, esse risultano efficaci quando sono integrate con l'esame teorico delle questioni: teoria e "pratica" sono indissolubilmente legate nella costruzione dei significati degli oggetti matematici.

Attività. Lanci di un dado materiale

Per non impiegare troppo tempo nell'effettuare i lanci, conviene suddividere la classe in gruppi e raccogliere in una tabella le frequenze osservate.

gruppo	1	2	3	4	5	6
I	15	21	13	17	16	14
II	15	15	18	12	22	12
III	14	19	15	15	15	18
IV	18	15	15	19	9	20
V	13	18	20	12	17	16
VI	22	17	13	13	11	19
VII	17	17	18	16	12	16

La tabella riporta gli esiti delle prove effettuate in una scuola secondaria di La Spezia. Come si vede, ogni gruppo ha effettuato 96 lanci, tranne uno che ne ha effettuati 93; così, in poco tempo si sono avuti a disposizione $16 \cdot 6 \cdot 7 - 3 = 669$ esiti. Vale la pena notare esplicitamente, o meglio decidere assieme agli studenti, che ciò è equivalente a ripetere l'esperimento 669 volte.

Il passo successivo è quello di elaborare i dati raccolti:

frequenza	1	2	3	4	5	6
assoluta	114	122	112	104	102	115
relativa	0,170	0,182	0,167	0,155	0,152	0,172

Alla luce di quanto discusso nelle sezioni precedenti, il docente dovrebbe aver ormai chiaro quale tipo di analisi si può condurre a partire dai valori così calcolati.

Attività. Lanci di monete

In modo analogo si può esaminare cosa succede lanciando più volte una moneta. Per osservare l'avvicinamento delle frequenze relative al valore teorico atteso, possono bastare 300 lanci complessivi ... probabilmente²².

Se si riesce a reperire una moneta truccata, si può proporre una variante dell'esperimento, ancora più ricca e coinvolgente²³. Si consegnano agli studenti due monete, una delle quali è appunto truccata, e si chiede loro di identificare la moneta truccata, mediante una scrupolosa investigazione degli esiti.

Attenzione però a non esultare troppo presto: per quanti lanci si effettuino, si potrà mai essere certi della correttezza della risposta? La questione è delicata ed è sottesa anche alle attività che seguono.

²² Come si sostiene nel testo di Villani e altri "Non solo calcoli", ed. Springer.

²³ L'attività è suggerita nel testo di Villani e altri "Non solo calcoli", ed. Springer.

Attività. Test di ipotesi

Le prove ripetute di un esperimento si rivelano efficaci anche per sondare la validità di una congettura. A tale proposito, esaminiamo ora due questioni particolarmente significative, anche per la rilevanza storica che hanno avuto.

- L'errore di D'Alembert²⁴.

Nel lancio di due monete oneste consideriamo i tre esiti possibili: "escono due teste", "escono una testa e una croce", "escono due croci". Essi sono equiprobabili?

Per rispondere, proviamo a lanciare molte volte due monete, proseguiamo registrando gli esiti e elaborandoli come discusso nell'attività dei lanci del dado. Al crescere dei lanci dovrebbe affiorare (probabilmente) qualche dubbio sull'equiprobabilità dei tre eventi.

Naturalmente i risultati sperimentali non costituiscono una dimostrazione, ma diventano un stimolo per investigare le ragioni di tale andamento degli esiti. L'analisi dovrebbe condurre ad approfondire il significato dell'evento "esce una testa e una croce": nel linguaggio naturale in cui tale evento è descritto, non si precisa l'ordine in cui gli esiti "testa", "croce" devono susseguirsi ...

- Il gioco della zara²⁵.

Convieni puntare sul punteggio 9 o sul punteggio 10?

Il fatto che gli esiti di prove ripetute possano servire a formulare delle congetture, doveva essere noto già a G. Galilei, secondo il quale "... la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 che il 9 ...". Un risultato che stupisce anche noi moderni, visto che la differenza tra i due valori di probabilità è minore dell'1%! Per l'esattezza, la differenza è $\frac{2}{216}$.

Noi però, a differenza di Galileo, non dobbiamo per forza vestire i panni di giocatori incalliti per effettuare molte prove: possiamo utilizzare il foglio elettronico, come discusso nel paragrafo 3.2.

Attività. Un problema "inverso": ricostruiamo la composizione dell'urna

Il docente mette in un sacchetto delle biglie uguali al tatto ma di colore diverso, ad esempio alcune blu altre nere, e comunica agli studenti solo il numero totale delle biglie. Lancia così la sfida:

quante biglie blu prevedete ci siano nel sacchetto?

Agli studenti è consentito unicamente di estrarre una biglia alla volta, registrarne il colore e reinserirla nel sacchetto.

L'idea vincente per ricostruire la composizione dell'urna è di ricorrere alle frequenze relative osservate nelle varie estrazioni ... Attenzione però: anche in questa situazione è delicato interpretare gli esiti in modo adeguato.

Osservazione

Per la legge dei grandi numeri, la previsione richiesta potrà essere attendibile (con probabilità "grande") se si dispone di "molte" osservazioni. Pertanto può essere utile suddividere gli studenti in gruppi, assegnare ad essi sacchetti che hanno la stessa composizione (uno per gruppo) e poi unire gli esiti di tutte le prove effettuate. L'attività si può ulteriormente velocizzare, simulando le estrazioni al calcolatore.

Per una discussione più accurata della questione si rimanda all'appendice A3, in fondo al capitolo.

²⁴ L'autore dell'Encyclopédie riteneva che nel lancio di due monete, i tre esiti "due teste", "due croci", "una testa e una croce" sono equiprobabili.

²⁵ Esaminato nel capitolo 2 e anche nelle sezioni precedenti di questo capitolo.