## 4.4 Gioco equo

*Una volta valutate le probabilità di vincita nei vari giochi esaminati è interessante approfondire l'analisi introducendo un nuovo strumento per i ragazzi: una grandezza che misuri "l'equità del gioco". Affinché gli studenti possano comprenderne il senso, è opportuno lasciare spazio ai loro interventi. Inoltre, per rendere più efficace l'attività, iniziamo con un gioco più elementare per poi tornare a considerare quelli precedentemente introdotti.*

**Scommesse sul lancio di un dado**
L'insegnante mostra alla classe un dado a 6 facce e una moneta da 1 €, dicendo:

> "Io punto questo euro e voi[16] puntate 1 €, lanciamo il dado: se esce "6" vincete voi, altrimenti vinco io. Chi vince si prende la posta, ovvero i 2 €. Accettate di giocare?"

*La risposta degli studenti dovrebbe essere scontata: non accettano di giocare. A questo punto l'insegnante aumenta la propria puntata, ad esempio a 10 € (e li mostra[17] anche in questa occasione), mentre quella degli studenti rimane invariata. Chiede agli studenti:*

> "accettate ora di giocare?"

*A questo punto si prevedono risposte discordanti da parte degli studenti. Il docente allora varia la propria puntata, ad esempio fissandola a 100 €, 500 €, 1.000 € (sempre facendo vedere delle banconote, eventualmente false), fino a che la maggior parte degli studenti non si trova d'accordo... l'insegnante potrebbe non essere più disposta a giocare con le nuove cifre puntate... La trattazione/discussione continua fino a quando gli studenti arrivano a intuire che c'è un legame tra probabilità di vittoria e quote puntate[18].*
*In questo modo si arriva a costruire insieme una formula che definisce il gioco equo. Essa si può generalizzare nel seguente modo.*

Ad un dato gioco un partecipante può vincere una quantità di denaro $V$ o perdere una quantità $S$.
Il gioco è:

- equo se $\mathrm{V} \cdot \mathrm{p}(\text{"vincere"}) - \mathrm{S} \cdot \mathrm{p}(\text{"perdere"}) = 0$
- favorevole per tale giocatore se $\mathrm{V} \cdot \mathrm{p}(\text{"vincere"}) - \mathrm{S} \cdot \mathrm{p}(\text{"perdere"}) > 0$
- sfavorevole per tale giocatore se $\mathrm{V} \cdot \mathrm{p}(\text{"vincere"}) - \mathrm{S} \cdot \mathrm{p}(\text{"perdere"}) < 0$

*Per aiutare gli studenti a comprendere più in profondità la situazione, si dovrebbe chiarire inoltre che il gioco è equo quando* **i giocatori sono disposti a scambiare i loro ruoli.**

**Osservazione**
L'espressione $\mathrm{V} \cdot \mathrm{p}(\text{"vincere"}) - \mathrm{S} \cdot \mathrm{p}(\text{"perdere"})$ restituisce il valore medio di vincita. Un modello di riferimento per far comprendere l'utilità e il senso di tale media agli studenti può essere la valutazione complessiva finale degli esami universitari sostenuti (che è appunto la media pesata dei voti ottenuti nei vari esami con pesi il numero di crediti relativi al corrispondente esame).

**Il casinò è equo?**

*Una volta stabilito cosa s'intende con gioco equo, è interessante sondare se i giochi precedentemente considerati (Roulette, 10eLotto…) sono o meno equi.*

---

[16] La puntata è di 1 € per l'intera classe.
[17] L'intento è di attivare gli studenti e ciò si ottiene in misura maggiore se si utilizzano fattivamente oggetti concreti e non li si lascia sullo sfondo. Anche in questo senso il percorso promuove un approccio laboratoriale.
[18] Eventualmente lo può suggerire l'insegnante mediante opportune domande.

Si considera ad esempio il caso della roulette in cui si puntano 10 € sulla prima dozzina. In caso di vittoria il banco restituisce due volte la puntata (oltre ai 10 € puntati), quindi la quantità di denaro vinta (netta) sarebbe 20 euro, mentre la somma persa sarebbe 10 euro.
Si ottiene quindi:

$$V \cdot p(\text{"}vincere\text{"}) - S \cdot p(\text{"}perdere\text{"}) = 20€ \cdot \frac{12}{37} - 10€ \cdot \frac{25}{37} = -1€ \cdot \frac{25}{37} = -0{,}27 \ldots €$$

Il gioco non è equo e su un gran numero di giocate vi è una probabilità "alta" che il giocatore perda in media circa 0,27 € a partita.
Nell'appendice A7 in fondo al capitolo si trovano i calcoli relativi agli altri giochi considerati.

**<u>Osservazione</u>** (legge dei grandi numeri e gioco equo)
L'espressione $V \cdot p(\text{"}vincere\text{"}) - S \cdot p(\text{"}perdere\text{"})$ è il valore a cui si approssima con probabilità "grande" il guadagno medio al gioco su "molte" partite. Una possibile giustificazione di ciò si può articolare nei seguenti passi.

- Supponiamo che dopo n partite il giocatore A abbia vinto m volte, quindi il guadagno medio a partita di A è $V \cdot \frac{m}{n} - S \cdot \frac{1-m}{n}$.
- Per n "grande" è "molto" probabile che $\frac{m}{n} \simeq p(\text{"}vincere\text{"})$ e $\frac{1-m}{n} \simeq p(\text{"}perdere\text{"})$ (per la Legge dei grandi numeri[19]).
- Dunque per n "grande" è "molto" probabile che il guadagno medio sia circa uguale a $\mathrm{V} \cdot \mathrm{p}(\text{"vincere"}) - \mathrm{S} \cdot \mathrm{p}(\text{"perdere"})$.

[19] Abbiamo utilizzato la legge dei grandi numeri in una versione informale, più adatta allo studente del biennio. Per una declinazione di tale legge ad uso dello studente rimandiamo alla formulazione proposta nel capitolo 3 sezione 4. Più precisamente la legge dei grandi numeri afferma che, sotto opportune ipotesi, al limite per n che tende all'infinito tale approssimazione sia un'uguaglianza.