5. Pensare in termini elementari... legge della moltiplicazione

Nei capitoli precedenti abbiamo discusso e risolto vari problemi, interpretando spesso la situazione mediante lo schema classico, e valutando dunque la probabilità come rapporto tra il numero dei casi "favorevoli" e quello dei "casi possibili". Gli strumenti probabilistici introdotti si sono rivelati pertanto efficaci; ma non bastano per interpretare situazioni più articolate. Ad esempio, non sono sufficienti per rispondere a varie questioni motivanti che abbiamo posto a fondamento del nostro Percorso nel capitolo 1, come le domande relative ai test clinici oppure ai misconcetti.
È dunque per arricchire il Percorso che introdurremo in questo capitolo la legge della moltiplicazione e fisseremo l'attenzione sulla probabilità dell'evento complementare. Questi sono gli aspetti sui quali abbiamo scelto di concentrare l'attenzione, evitando di proporre troppi termini o troppi risultati: in particolare presenteremo nella forma di domanda aperta, ossia come questione sulla quale discutere, la formula che viene spesso indicata come teorema della probabilità totale. Piuttosto preferiamo investire del tempo per guidare gli studenti a (ri)scoprire i due risultati prima evidenziati, in contesti opportunamente semplificati, e a saggiarne poi la potenza in vari ambiti, dalla giurisprudenza alla genetica.
L'idea sottesa agli strumenti matematici che ci apprestiamo ad introdurre è di interpretare gli eventi in termini di eventi più elementari, dei quali sia più semplice valutare la probabilità. Proprio allo sviluppo di questa abilità interpretativa daremo rilevanza, perché in essa e nell'abilità di esprimere gli eventi mediante registri diversi, prima che nei risultati, risiede la valenza didattica delle attività che proporremo nel capitolo.

5.1 Unione

Se alla roulette (europea[1]) punto su un numero pari o nero, qual è la probabilità che io vinca?

Coerentemente con l'approccio metodologico che anima il Percorso, in un primo momento è opportuno lasciare spazio agli interventi degli studenti.

Si può rispondere semplicemente contando i casi favorevoli; si ottiene così che la probabilità richiesta è

$$\frac{\mathbf{26}}{\mathbf{37}}$$

Ma si può investigare ulteriormente la situazione, proponendo agli studenti una questione del tipo:

"Possiamo ricorrere all'uguaglianza seguente? È vera? Perché?"

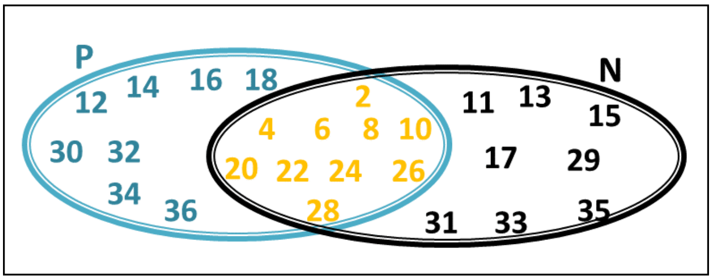
$$p(\text{"}\mathbf{pari}\text{"} \cup \text{"}\mathbf{nero}\text{"}) = p(\text{"}\mathbf{pari}\text{"}) + p(\text{"}\mathbf{nero}\text{"}) \quad (5.1)$$

L'esame che ne segue risulta più coinvolgente e didatticamente significativo se è arricchito dall'effettuazione di prove materiali. E dovrebbe portare a concludere che
l'uguaglianza è falsa poiché vale:

$$\frac{26}{37} \neq \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{38}} + \frac{18}{37}$$

[1] Ovvero la roulette costituita da 37 caselle, delle quali una è indicata come 0 (zero). Altre tipologie di roulette, come ad esempio quelle americane, hanno 38 caselle: oltre alla casella 0 hanno la casella 00.

Per comprendere le ragioni profonde sottese a tale conclusione, è utile ricorrere a una rappresentazione grafica, quale la seguente, dell'insieme P dei numeri pari della roulette e dell'insieme N costituito dai numeri neri del gioco:



Essa permette di esprimere # (P U N) nella forma[2]:

$$\#\,(\mathbf{P} \cup \mathbf{N}) = \#\,\mathbf{P} + \#\,\mathbf{N} - \#\,(\mathbf{P} \cap \mathbf{N}) \qquad (5.2)$$

Si conclude quindi che l'uguaglianza (5.1) è errata perché il suo secondo membro conta due volte gli elementi di $(\mathbf{P} \cap \mathbf{N})$.

*Quesiti di tale tipo, che non avrebbero una grande importanza di per sé visto che si possono risolvere semplicemente contando con attenzione il numero dei casi favorevoli, possono fornire l'occasione per sviluppare abilità trasversali. Essi, infatti, stimolano l'uso di più forme di rappresentazione e l'abilità di **passare** da un registro all'altro coinvolgendo:*

- *il linguaggio degli **insiemi** (simboli e termini, operazioni),*
- *la schematizzazione grafica mediante **diagrammi** di Venn,*
- *il linguaggio **logico** … i connettivi "**o**", "**e**", "**non**" (significato logico e uso nel linguaggio naturale).*

*Anche in questo contesto è importante **scegliere** oculatamente quali formule e quali termini proporre agli studenti. A tale proposito, si consideri l'assioma della probabilità:*

$$\text{se } A \cap B = \emptyset, \text{ vale } p(A \cup B) = p(A) + p(B) \qquad (5.3)$$

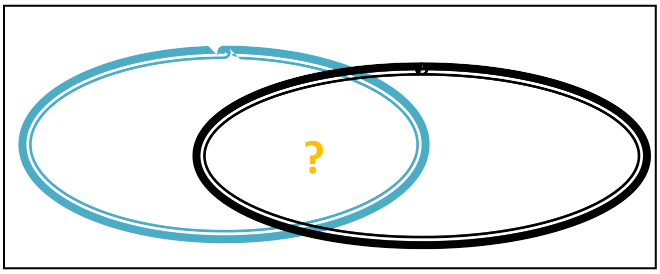
Il docente dovrebbe essere consapevole della sua rilevanza culturale, ma anche del fatto che non è opportuno, almeno in questa fase, presentarlo come una formula di cui disporre immediatamente o, peggio, da imparare a memoria.
Analogamente, per risolvere la maggior parte degli esercizi proposti sui libri di testo, non è necessario ricorrere alla formula (5.2)*: è sufficiente contare i casi possibili con attenzione. In quest'ottica è utile spostare l'attenzione da mere questioni di calcolo a questioni come la seguente*

In una scuola la probabilità che uno studente, scelto a caso, sappia pattinare è del *31%, q*uella che uno studente sappia arrampicare è del *24%*.
Qual è la probabilità che uno studente della scuola sappia pattinare *e* arrampicare?

Anche in questa situazione è opportuno lasciare spazio agli interventi degli studenti e discutere con loro: alcuni forniranno dei valori di probabilità, ma altri potrebbero osservare che è necessario assumere ipotesi aggiuntive e/o dire che non vi sono gli elementi sufficienti per rispondere...

[2] Come indicato nel capitolo 4, dato un insieme E, indichiamo con #E, la sua cardinalità.

In ogni caso, può essere utile far riferimento alla ormai collaudata schematizzazione grafica



Si comprende così che le informazioni fornite dal problema ***non*** *sono sufficienti per rispondere!*
Vale la pena allora esplorare più a fondo la questione:

Fornisci un esempio di informazione aggiuntiva, mediante la quale si possa determinare la probabilità richiesta.

Osservazione

Un approccio diverso a questi problemi, ma con gli stessi obiettivi, è proposto nell'approfondimento relativo alla sperimentazione in classe.