5.3 Legge della moltiplicazione

Al solito, preferiamo motivare l'introduzione della legge della moltiplicazione mediante la discussione di problemi, quali la valutazione della probabilità di errore di un test diagnostico. Comunque per costruire il risultato lavoreremo in un contesto più elementare, quello delle estrazioni da un'urna, che può modellizzare quasi tutte le situazioni in cui interviene la probabilità nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado.

Compleanni
Ti trovi ad una festa a cui partecipano 23 persone.
Scommetteresti che vi sono almeno due tra esse che compiono gli anni nello stesso giorno (anche se sono nate in anni diversi)?

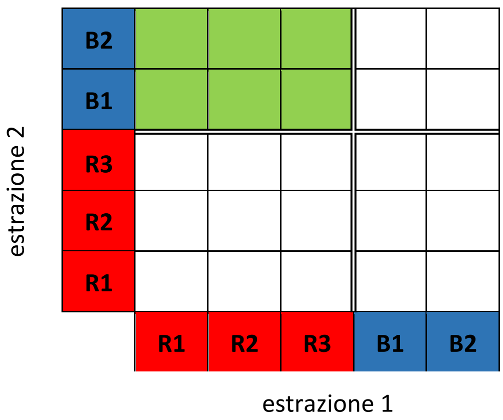
Test clinici
Il test "Elisa" relativo all'HIV ha una sensibilità del 99,9% e una specificità del 99,9%.
Se la malattia ha una prevalenza dello 0,3%, qual è la probabilità che il test dia indicazioni errate su un individuo scelto a caso nella popolazione?

L'esame diretto di tali questioni è delicato. Pertanto puntiamo a sviluppare gli strumenti matematici per risolverli, nel contesto più elementare dell'urna.

a) Un problema modello: l'urna con reinserimento

In un'urna vi sono 5 palline, diverse solo per il colore:
3 sono rosse e **2** blu.
Si estrae in modo casuale una pallina alla volta e la si *reinserisce* nell'urna prima dell'estrazione successiva.
Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia **rossa** e la seconda sia **blu**?

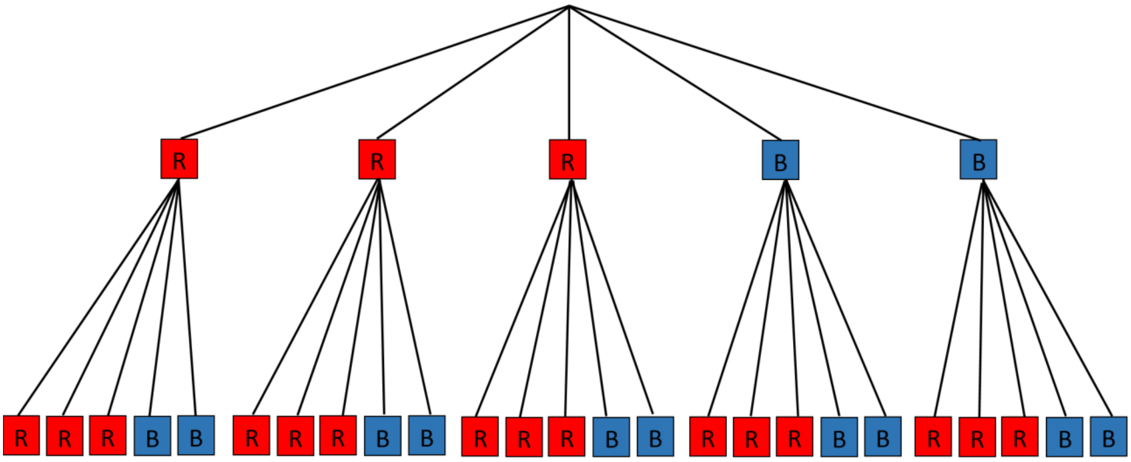
Gli studenti esplorano il problema: effettuano ***prove*** *dell'esperimento, poi magari* ***elencano*** *i casi possibili:*
$\boldsymbol{R}1\boldsymbol{R}1, \boldsymbol{R}1\boldsymbol{R}2, \dots\ \boldsymbol{R}1\boldsymbol{B}1, \dots$
Eventualmente possono schematizzare la situazione mediante una **tabella:**



A questo punto, semplicemente contando il numero di "celle favorevoli" si ottiene la probabilità richiesta dal quesito in esame, ossia la probabilità dell'evento che indichiamo[3] con *"**R** e **B**"*: $\frac{6}{25}$

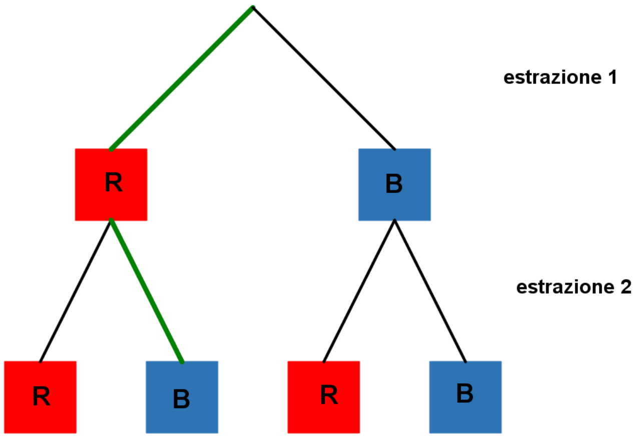
Ma, ci chiediamo, c'è un approccio più efficace per determinare il valore di probabilità richiesto? E che sia valido anche nel caso di tre o più estrazioni?

Il primo passo che si può compiere è ricorrere ad una diversa schematizzazione, nella forma di **grafo ad albero:**



Ora, per quanto tale rappresentazione sia espressiva, essa diventa poco leggibile non appena aumenta il numero di palline. Pertanto è più conveniente considerare un grafo "contratto", tipo quello rappresentato nella seguente figura[4].

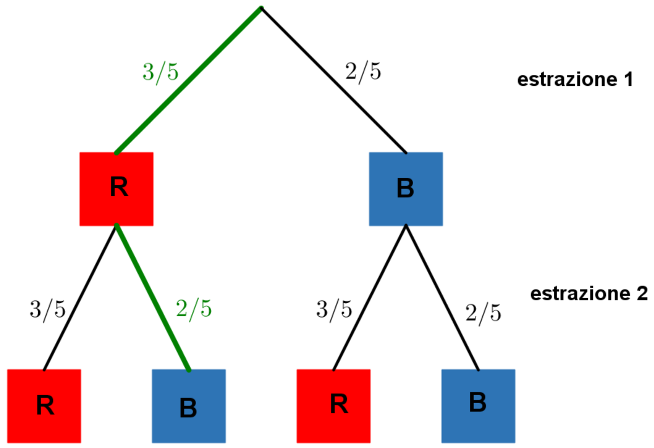
Il cammino "favorevole" è evidenziato in verde.



[3] Osserviamo che nel linguaggio naturale con la frase "viene estratta la pallina rossa e la pallina blu" non si precisa l'ordine nel quale sono estratte le due palline, ossia si contempla sia il caso in cui la prima estratta è rossa e la seconda è blu sia il caso in cui la prima estratta è blu e la seconda rossa. Invece il quesito in esame richiede una condizione più forte, ossia impone di tener conto dell'ordine di estrazione: prima la pallina rossa e poi la pallina blu.
Pertanto con la scrittura "R e B" conveniamo di tener conto anche dell'ordine di estrazione, ossia intendiamo "la prima pallina estratta è rossa, la seconda è blu".

[4] Didatticamente è opportuno che il passaggio alla rappresentazione contratta avvenga solo nel momento in cui gli studenti ne avvertono realmente l'esigenza. Ossia prima dovrebbero cimentarsi nella realizzazione di grafi ad albero con molti rami, esperirne le difficoltà e dunque riflettere sulla necessità (dello studente, non del docente) di una schematizzazione più compatta Naturalmente ciò non significa che alcuni studenti non propongano di costruire direttamente l'albero contratto; in questo caso è compito del docente premurarsi che essi abbiano compreso a fondo i vantaggi che derivano da tale rappresentazione.

Accanto a ogni ramo si indica la probabilità dell'evento che esso rappresenta.



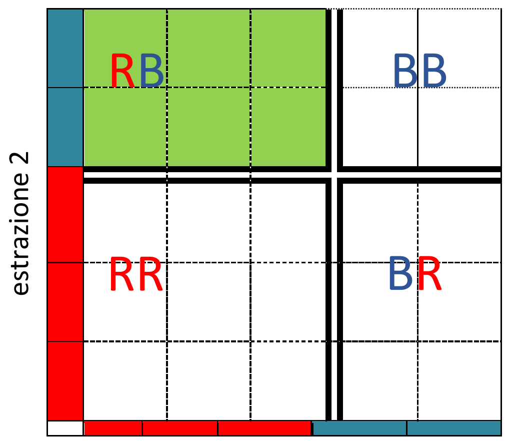
Il passo successivo consiste nell'esplorare la situazione lavorando sul grafo: si invitano gli studenti a cercare relazioni tra $p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = \frac{6}{25}$ *e le probabilità sul grafo, per arrivare ad accorgersi che vale*

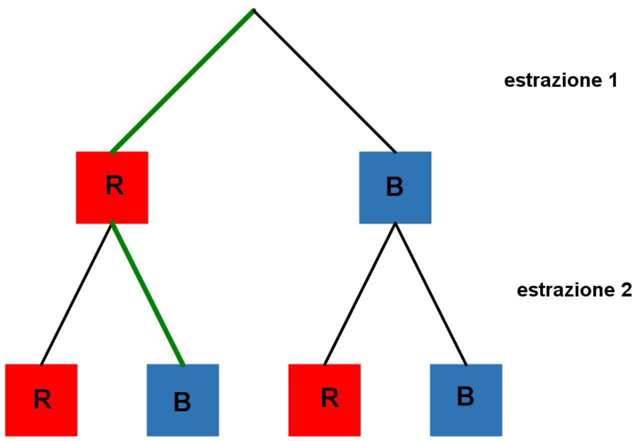
$$p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \qquad \text{ossia } p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = p(\boldsymbol{R}) \cdot p(\boldsymbol{B}) \qquad (5.5)$$

Gli studenti possono così provare la soddisfazione di scoprire che, nella situazione in esame, la probabilità dell'evento R e B è uguale alla probabilità degli eventi componenti R, B. In realtà, tale risultato vale più in generale, ma ciò che interessa in questa fase è che gli studenti sappiano leggere l'uguaglianza $p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = p(\boldsymbol{R}) \cdot p(\boldsymbol{B})$ *direttamente sul grafo ad albero.*

<u>Osservazione</u>

Infine è utile mettere a confronto i due modelli introdotti. Analogamente al grafo, si può pensare di "contrarre" anche la tabella a doppia entrata rappresentando solo gli esiti Rosso, Blu; in questa rappresentazione le celle tratteggiate mostrano anche una misura della probabilità dei 4 casi RR, RB, BR, BB.





In particolare si può notare che ad ogni **cammino** sull'albero corrisponde una **cella** della tabella contratta; ad esempio al cammino evidenziato in verde corrisponde la cella verde RB.
A sua volta, ogni cammino rappresenta un evento intersezione; ad esempio quello evidenziato in verde corrisponde all'evento $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{B}$.

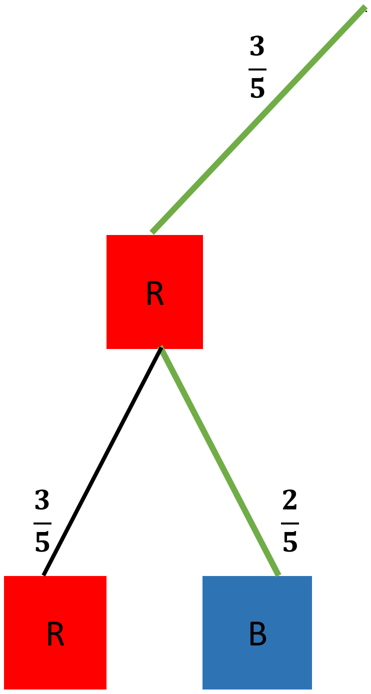
Una giustificazione mediante un'analogia

Per giustificare il fatto che vale il prodotto delle probabilità sui rami, si può ricorrere a un'analogia con un condotto per l'acqua. Precisamente:

si può immaginare che il grafo rappresenti un condotto per l'**acqua** e i valori di probabilità rappresentino la portata[5] in un'opportuna unità di misura

- se il tubo verde in alto porta a litri, allora nel tubo verde sotto scorrono i $\frac{2}{5}$ di $\boldsymbol{a}$ litri, ossia $\frac{2}{5} \cdot \boldsymbol{a}$ litri

- se il tubo in alto porta $\frac{3}{5}$ di litro, allora …



Analogamente nel problema in esame si ha che:

il ramo in alto si percorre con probabilità $\frac{3}{5}$, quindi
quello verde in basso si percorre con probabilità globale $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$

Attenzione: è solo un'analogia. Non una dimostrazione!
Inoltre tale modello richiama le percentuali iterate.

Una risoluzione più formale

Per concludere l'esame del problema mediante lo schema del grafo ad albero, osserviamo che la legge della moltiplicazione si può leggere direttamente sull'albero "non contratto", precedentemente rappresentato, anche in modo formale.
Infatti, fissiamo l'esito della prima estrazione, ad esempio la prima rossa a sinistra. La probabilità che esso si realizzi è $\frac{1}{5}$ *, quindi la probabilità dell'insieme dei 5 esiti della estrazione successiva deve essere* $\frac{1}{5}$. *Ma gli esiti sono equiprobabili, dunque la probabilità di "ciascun cammino" è* $\frac{\frac{1}{5}}{5} = \frac{1}{5}\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. *Si può concludere quindi che* $p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = 6 \cdot \frac{1}{25}$ *lo stesso risultato ottenuto seguendo l'approccio discusso precedentemente.*

b) Un ulteriore problema modello: l'urna senza reinserimento

In un'urna vi sono 5 palline, diverse solo per il colore:
3 sono rosse e **2** blu.
Si estrae in modo casuale una pallina alla volta e NON la si *reinserisce* nell'urna prima dell'estrazione successiva.
Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia **rossa** e la seconda sia **blu**?

*Come nel problema dell'urna con reinserimento, dovremmo creare le condizioni affinché gli studenti esplorino a fondo il problema ed effettuino **prove** dell'esperimento.*

[5] Per portata del tubo intendiamo la quantità massima d'acqua che può fluire attraverso una sua sezione nell'unità di tempo. Supponiamo inoltre che ogni tubo venga sfruttato al massimo della sua portata.

E, ancora una volta, è istruttivo schematizzare il problema mediante una **tabella:**

estrazione 2

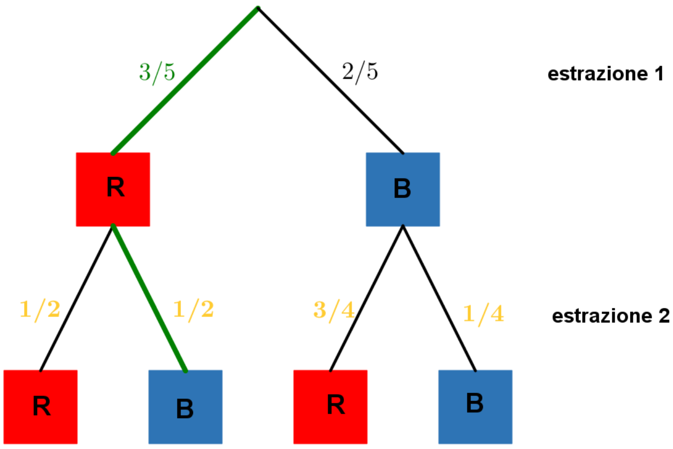
B2					X
B1				X	
R3			X		
R2		X			
R1	X				
	R1	**R2**	**R3**	**B1**	**B2**

estrazione 1

Attenzione però: dato che ora la pallina non viene reinserita nell'urna, alcune celle (non rappresentano più dei casi possibili! Si tratta delle celle segnate con la lettera X in figura.

Dunque, anche in questa situazione, pur di prestare un po' di attenzione, si può dedurre dalla tabella che la probabilità dell'evento *"**R** e **B**" :* $\frac{6}{25-5} = \frac{3}{10}$

Cambiando angolazione, possiamo considerare anche la rappresentazione mediante grafo ad albero[6].



Attenzione: rispetto al problema dell'urna con reimmissione cambiano le probabilità della seconda estrazione. Infatti, senza reinserimento, dopo la prima estrazione, cambia la composizione dell'urna!

Ad esempio dopo aver estratto un pallina rossa rimangono nell'urna quattro palline delle quali solo due rosse[7]. Quindi la probabilità di estrarre una pallina blu (alla seconda estrazione) è $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
A questo punto non dovrebbe essere difficile osservare che vale

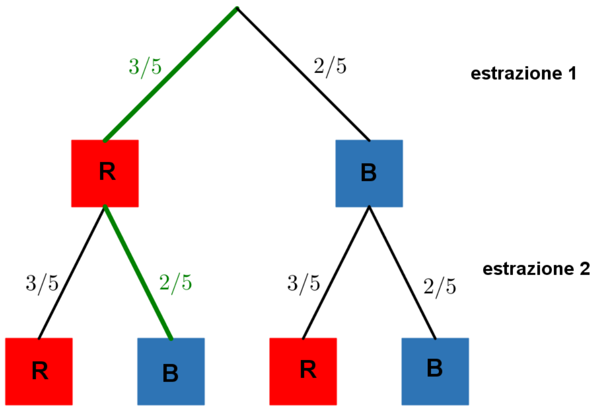
$$p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Ma se a tale conclusione giungono gli studenti in un'attività esplorativa, allora tale scoperta è … "per sempre" e contribuisce a rafforzare il senso di autoefficacia.

[6] Per semplicità abbiamo considerato direttamente il grafo contratto; naturalmente può aver senso, a seconda delle esigenze della classe, invitare gli studenti a schematizzare prima l'intero albero.
[7] Tale situazione è descritta in modo espressivo mediante il grafo ad albero "*non contratto*", il quale è costituito dagli stessi 5 rami di quello con reinserimento relativi alla prima estrazione. Ma, in questo caso, per ciascuno di essi, vi sono 4 rami per la seconda estrazione.

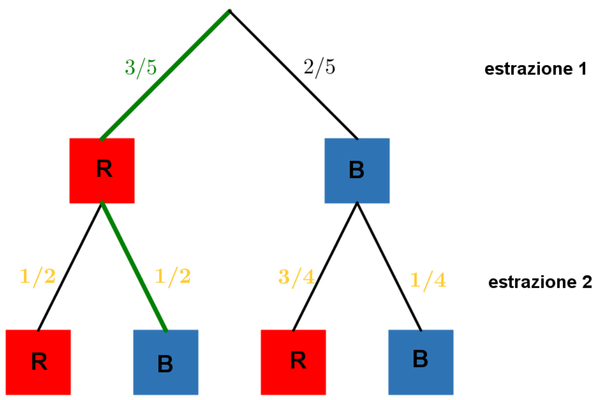
In definitiva, come accade per l'estrazione con reimmissione, la probabilità richiesta è il **prodotto** delle probabilità "elementari", pur di tener presente che la composizione dell'urna è cambiata dopo la prima estrazione. Questo è anche quanto evidenzia il confronto tra le due situazioni:

con reimmissione



$$p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$

senza reimmissione

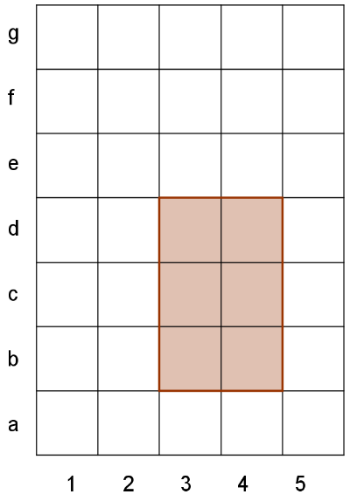


$$p(\boldsymbol{R} \text{ e } \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

c) Un'altra giustificazione della Legge*

Un altro approccio[8] per giustificare la legge della moltiplicazione può essere quello di ricorrere al contesto della battaglia navale.

Giochiamo a **battaglia navale**[9]. Qual è la probabilità di colpire la portaerei in figura con un solo colpo?

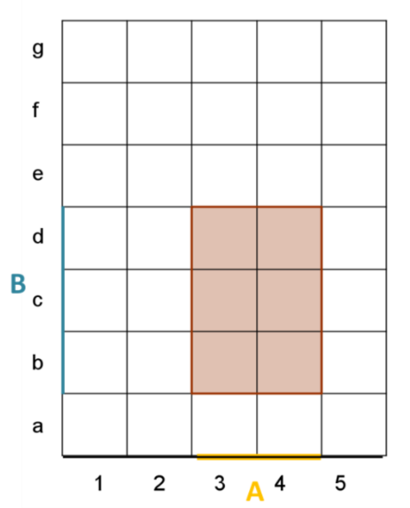


Contando esplicitamente il numero di casi favorevoli e quello dei casi possibili si ha che la probabilità è

$$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{35}}$$

[8] Ispirato ad un'attività proposta da Giovanni Prodi, in "Matematica come scoperta", ed. D'Anna.
[9] La questione si può esprimere più formalmente in termini di *prodotto cartesiano.*

Un altro modo per giungere al risultato è seguire un approccio per componenti:



- sparare un colpo si può pensare come:
  1) indicare un *numero*
  2) indicare una *lettera*

- "colpire la portaerei" è l'evento $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$, dove A, B sono gli insiemi rappresentati in figura ossia $\boldsymbol{A}$ è l'insieme dei numeri favorevoli e $\boldsymbol{B}$ l'insieme delle lettere favorevoli

- numero casi *favorevoli* $= \mathbf{2 \cdot 3}$
  numero casi *possibili* $= \mathbf{5 \cdot 7}$

Pertanto:

$$\mathrm{p}(A \; e \; B) = \frac{\mathbf{2 \cdot 3}}{\mathbf{5 \cdot 7}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B)$$

d) Legge della moltiplicazione – Facciamo il punto

Mediante attività analoghe a quelle discusse nelle sezioni precedenti, gli studenti hanno modo di prendere confidenza con la legge della moltiplicazione e con i concetti ad essa sottesi, in particolare la dipendenza-indipendenza di eventi. Su queste basi dovrebbero poi essere in grado di apprezzare la precisazione di tali aspetti matematici, almeno nella forma che proponiamo di seguito: si tratta di un primo livello di formalizzazione che, eventualmente, potrà essere ripreso e affinato nelle classi successive al biennio. In sostanza, ancora una volta, vorremmo che la definizione costituisca il punto di arrivo del Percorso, non quello di partenza. Anzi, spingendoci oltre, ci piacerebbe che, prima delle parole, lo studente disponga di efficaci rappresentazioni degli oggetti matematici e, a partire da esse, trovi volta per volta le parole per descriverli in modo compiuto.

Due eventi si dicono **indipendenti** se la conoscenza del fatto che uno di essi si è verificato non modifica la probabilità di verificarsi dell'altro. Altrimenti si dicono **dipendenti.**
Un modello di riferimento per tali concetti è l'urna da noi considerata negli esempi precedenti[10]. Precisamente:

l' **urna con** reimmissione è il modello di riferimento per eventi indipendenti

l' **urna senza** reimmissione è il modello di riferimento per eventi dipendenti

Legge della moltiplicazione:
dati due eventi A, B, la probabilità dell'evento A e B è uguale al prodotto della probabilità dell'evento A per la probabilità di B valutata assumendo **l'ipotesi che A si sia verificato**.

Tale formulazione vale sia per eventi indipendenti che dipendenti.

[10] Ci sono casi particolari, come ad esempio l'urna contenente solo palline nere, in cui anche l'estrazione senza reimmissione dà luogo a eventi probabilisticamente indipendenti.