5.8 Un punto d'arrivo: il problema dei compleanni[16]

Ti trovi ad una festa a cui partecipano 23 persone.
Qual è la probabilità che almeno due tra esse compiano gli anni in uno stesso giorno (anche se sono nate in anni diversi)?

La situazione dei compleanni può essere esaminata anche da una prospettiva matematicamente più interessante, ma che può rivelarsi troppo complessa per la classe:

Ad una festa scommetti che almeno due partecipanti compiano gli anni in uno stesso giorno. Affinché la tua probabilità di vittoria sia maggiore del 50%, i partecipanti devono essere più della metà del numero di giorni dell'anno, cioè più di 182?

Per quanto osservato, preferiamo però affrontare solo in un secondo momento questa diversa formulazione del problema.
Prima di affrontare la questione dal punto di vista teorico è importante che gli studenti la esplorino per prendere confidenza con la situazione, per provare a stimare il risultato, e per far emergere conoscenze pregresse o legate al senso comune. A tale scopo possono risultare utili le attività che descriviamo sinteticamente di seguito.

a) Attività esplorative

1) Verificare se vi sono compleanni nello stesso giorno all'interno di una stessa classe dell'Istituto.
2) Simulare i «compleanni», facendo scrivere a ogni studente un naturale "a caso" tra 1 e 365; poi confrontare i numeri scritti.
3) Esaminare i compleanni dei titolari e dell'arbitro (22+1) di alcune partite di calcio della squadra del cuore.

<u>**Osservazione**</u>

Ogni squadra ammessa alla fase finale del mondiale di calcio 2014 ha dovuto convocare 23 giocatori.
Per **15** squadre sulle **32 partecipanti a tale fase vi erano** almeno due giocatori che compiono gli anni nello stesso giorno[17].

A conclusione di queste attività, ci sia aspetta che gli studenti formulino delle congetture sul risultato del problema dei compleanni.

b) Risoluzione del problema dei compleanni

Conviene esaminare prima il caso, più semplice, in cui alla festa partecipano solo 3 persone. Se non emerge dalla discussione, il docente può suggerire di calcolare la probabilità dell'evento complementare, più semplice da esprimere in termini di eventi elementari.

[16] Il problema è stato formulato da Richard von Mises.
[17] Dati desunti da Wikipedia, consultata in data 01/06/2014.

c) Un problema semplificato

Consideriamo prima la situazione in cui alla festa partecipano **solo 3 persone**.
Vogliamo cioè determinare la probabilità dell'evento

E = "Almeno due delle tre persone date compiono gli anni lo stesso giorno"

- Tale evento si può realizzare in più modi: quando le persone sono nate tutte nello stesso giorno o quando esattamente due di esse sono nate nello stesso giorno.
  Pertanto il calcolo *diretto* della probabilità di *E* deve essere articolato in più casi e può rivelarsi lungo[18].
  Proviamo allora a considerare l'evento **complementare** di E

  *E^c = "**Le 3 persone compiono gli anni in giorni diversi**"*

  Una volta determinata la probabilità di *E^c*, resta individuata anche quella di *E:* infatti la somma delle due probabilità deve essere 1.

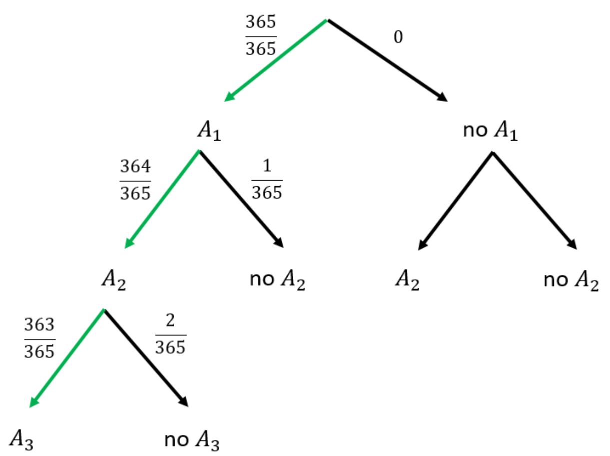
- Vediamo innanzitutto di esprimere l'evento *E^c* in termini di eventi "elementari", dei quali si possa calcolare più agevolmente la probabilità.
  Identificando, per semplicità di linguaggio, ciascuna persona con un numero[19] da 1 a 3, decidiamo di considerare gli eventi:

  *A_1 = "La prima persona compie gli anni in un **giorno qualsiasi**"*
  A_2 = "La seconda compie gli anni in un giorno diverso dalla prima"
  *A_3 = "La terza compie gli anni in un giorno **diverso dalle prime due**"*

  L'evento *E^c* si può così esprimere in termini di tali eventi:

  $$\mathbf{E^c = A_1 \cap A_2 \cap A_3}$$

- Possiamo rappresentare la situazione mediante un diagramma ad albero, in modo analogo a quanto visto nei problemi precedenti.



  Dunque per la legge della moltiplicazione

  $$p(E^c) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \approx 0{,}9918$$

- In definitiva il valore di probabilità richiesto è

  $$p(E) = 1 - p(E^c) \approx 1\text{-}0{,}9918 = \mathbf{0{,}0082}$$

[18] A più forte ragione se alla festa partecipano più di 3 persone.
[19] In alternativa possiamo identificarle con il nome proprio. Ad esempio Luca, Paolo, Giovanni.

d) Il problema

Il problema iniziale si può affrontare in modo analogo.
Siamo interessati a determinare la probabilità dell'evento

E = "Almeno due delle 23 persone date compiono gli anni lo stesso giorno"

- Consideriamo l'evento **complementare** di E

  E^c = "Le 23 persone compiono gli anni in giorni diversi"

- Esprimiamo l'evento E^c in termini degli eventi "elementari seguenti, identificando, per semplicità di linguaggio, ciascuna persona con un numero da 1 a 23

  *A_1 = "La prima persona compie gli anni in un **giorno qualsiasi**"*
  A_2 = "La seconda compie gli anni in un giorno diverso dalla prima"
  *A_3 = "La terza compie gli anni in un giorno **diverso dalle precedenti**[20] nella numerazione"*
  …
  *A_{23} = "La 23-esima compie gli anni in un giorno **diverso dalle precedenti** nella numerazione"*

  L'evento E^c si può così esprimere in termini di tali eventi

  $$E^c = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap_{\dots} \cap A_{23}$$

- Dunque per la legge della moltiplicazione

  $$p(E^c) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365} \approx 0{,}4927$$

  Per effettuare il calcolo conviene utilizzare il foglio elettronico.

- In definitiva la probabilità in esame vale

  $p(E) = 1 - p(E^c) \approx 1\text{-}0{,}4927 = \mathbf{0{,}5073}$

Il risultato ottenuto è… sorprendente:
ad una festa alla quale partecipano 23 persone, è più probabile che almeno due dei presenti compiano gli anni lo stesso giorno, piuttosto che tutti abbiano compleanni diversi.

e) Alcune precisazioni

- **Ipotesi**
  Per semplicità supponiamo che tutti gli anni siano di 365 giorni, che le date di nascita siano indipendenti e che siano equidistribuite su un periodo di 365 giorni[21].

- **Non solo linguaggio naturale**
  Il problema in esame ci sembra adatto per motivare l'uso del linguaggio simbolico, di termini specifici della matematica e di alcune regole di ragionamento. Infatti, in questa situazione didattica, il ricorso a tale approccio è motivato dall'**esigenza** di descrivere e giustificare il procedimento con **precisione, concisione** ed espressività.
  Attenzione però a tenere conto del livello della classe: se gli studenti non sono ancora in grado di affrontare con sicurezza quesiti analoghi, allora il ricorso alla formalizzazione può venir percepito come una inutile complicazione imposta dall'esterno.

[20] Cioè dalla prima e dalla seconda.
[21] L'ipotesi di equidistribuzione delle nascite nell'arco dell'anno è un'ipotesi semplificativa. Ad esempio nel 2012 in Italia, secondo i dati Istat, il numero di nati al giorno varia tra gli 895 del 25 dicembre e i 1949 del 4 ottobre.

- **Quale formalizzazione per gli eventi?**
  Nella risoluzione abbiamo scelto di caratterizzare gli eventi in termini di insiemi. In particolare abbiamo fatto ricorso all'operazione di intersezione e al complementare.
  Una scelta altrettanto valida poteva essere quella di ricorrere alle **proposizioni logiche,** facendo invece riferimento alla congiunzione e all'evento contrario.

f) Alcuni numeri…

Ad una festa scommetti che almeno due partecipanti compiano gli anni in uno stesso giorno. Affinché la tua probabilità di vittoria sia maggiore del 50%, i partecipanti devono essere più della metà del numero di giorni dell'anno, cioè più di 182?

Si può rispondere per tentativi, fissando volta per volta il numero di partecipanti e calcolando, mediante il foglio elettronico, la probabilità che almeno due tra loro compiano gli anni nello stesso giorno.
Se però gli studenti hanno già affrontato il problema posto ad inizio del paragrafo, relativo cioè alla festa che prevede 23 partecipanti, la questione perde di significato.
In questo caso può essere interessante determinare (ancora per tentativi) il numero minimo di partecipanti affinché la probabilità di compiere gli anni nello stesso giorno sia maggiore di un valore dato: ad esempio del 90% oppure del 99%. Anche in questi casi la risposta non è per nulla scontata…

Più in generale ecco alcuni valori della probabilità p che almeno due partecipanti compiano gli anni lo stesso giorno, in funzione del numero n di persone presenti alla festa:

n. persone	p (≥ 2 compleanni = giorno)
10	*0,12*
20	*0,41*
23	***0,51***
30	*0,71*
40	*0,90*
50	*0,97*
56	***0,99***

g) Per comprendere

Perché la probabilità del problema iniziale è "**grande**"?

Ti trovi ad una festa a cui partecipano 23 persone. Qual è la probabilità che almeno una tra esse compia gli anni **nel tuo** stesso giorno (oltre a te)?

La probabilità richiesta è:

$$p = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{22} \approx 0{,}0586$$

Qual è il motivo per cui le due probabilità relative al problema dei compleanni ("in **uno** stesso giorno") e a quello ora proposto ("nel **tuo** stesso giorno") sono diverse?

L’idea è che:

- nel problema iniziale i casi favorevoli non sono 23; intervengono le **coppie di persone**: $23 \cdot \frac{22}{2}$
- nel problema ora proposto le coppie sono 22

Un approfondimento interessante relativo alle coincidenze è quello proposto da G. Anichini all'indirizzo https://passcienzeunitn2014.files.wordpress.com/2014/04/coincidenze.pdf.