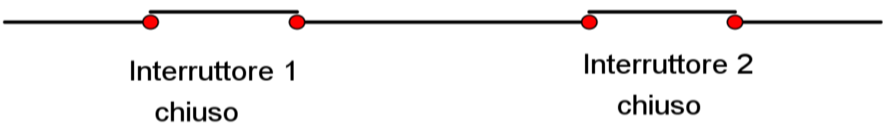
A2 Legge della moltiplicazione

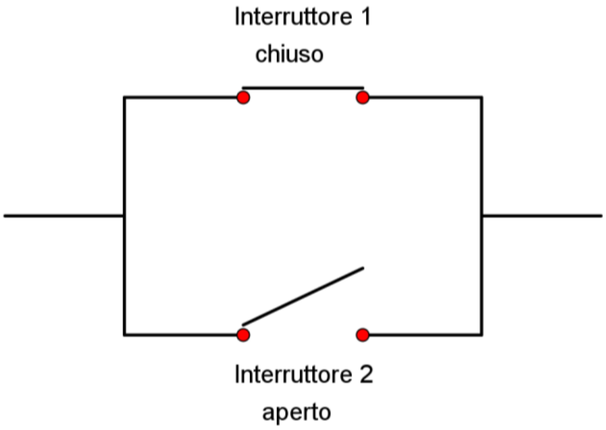
1. Problema degli interruttori[24]

a) si collegano due interruttori così (cioè "in serie").



In quali casi passa la corrente? Fare il grafo.

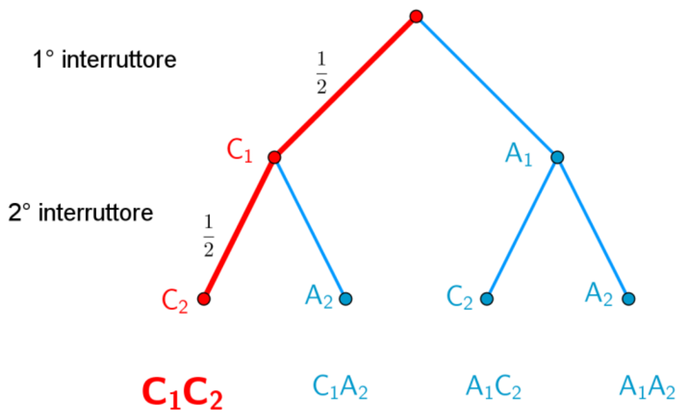
b) si collegano due interruttori così (cioè "in parallelo").



In quali casi passa la corrente? Fare il grafo. Supponendo che vi sia probabilità 1/2 per ciascun interruttore di essere chiuso (o aperto senza alcuna dipendenza fra i due interruttori) quale è la probabilità che passi corrente?

Abbiamo già mostrato come si può risolvere il problema nella Sezione A1. Ora esaminiamo come si possa affrontare la questione anche mediante opportuni grafi.

Ogni interruttore è chiuso o aperto *a caso*. Questo comporta che la probabilità che esso sia chiuso è ½ e quella che sia aperto è ancora ½.
La situazione relativa al **collegamento in serie** si può rappresentare efficacemente con un grafo ad albero, come il seguente



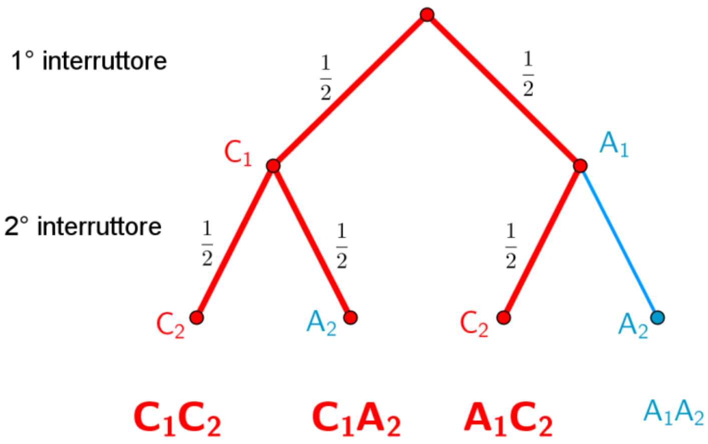
Sul grafo è evidenziato in rosso l'*unico* cammino per il quale si ha passaggio di corrente.
Dato che i 4 cammini sono equiprobabili[25], la probabilità richiesta è $\frac{1}{4}$.

[24] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 2.

Possiamo anche seguire un approccio di validità più generale, riportando accanto a ciascuno dei rami del cammino "favorevole" i valori di probabilità dei corrispondenti eventi costituenti C_1 , C_2.
Disponiamo così di tutti gli elementi per *leggere* direttamente *dal grafo* la probabilità dell'evento C_1 *e* C_2*:* essa è il prodotto delle probabilità relative a ciascun ramo del cammino in considerazione; ossia ancora

$$p(passa\ corrente) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Invece il **collegamento in parallelo** si può così rappresentare



I tre cammini sul grafo per i quali si ha passaggio di corrente sono quelli evidenziati in rosso.
Pertanto la probabilità richiesta sarà $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Analogamente a quanto visto per il collegamento in serie, la probabilità che passi corrente si può anche calcolare come somma delle probabilità dei 3 cammini "favorevoli"

$$p(passa\ corrente) = p(C_1C_2) + p(C_1A_2) + p(A_1C_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Osservazioni

- Per calcolare la probabilità nel collegamento in parallelo si può, in alternativa, considerare la probabilità dell'**evento complementare** "non passa corrente", ossia l'evento A_1A_2.
  Si ha così:
  $$p(passa\ corrente) = 1 - p(A_1A_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- Abbiamo denotato con C_1C_2 l'evento: "sono chiusi gli interruttori 1 e 2".
  Potevamo invece indicare, in modo più preciso, con C_1 l'evento "*è chiuso l'interruttore 1*", con C_2 l'evento "*è chiuso l'interruttore 2*" e **denotare** l'evento in esame con C_1 **e** C_2.
  O, ancora più precisamente, considerare gli **insiemi** C_1, C_2 che corrispondono rispettivamente agli eventi C_1 , C_2. E denotare l'evento in esame con $C_1 \cap C_2$.
  La scelta tra le due notazioni dipende dalla situazione didattica e dalla sensibilità del docente. Ma, qualsiasi sia la notazione utilizzata, lo studente deve essere consapevole del fatto che essa si riferisce all'evento: "è chiuso l'interruttore 1 **ed** è chiuso l'interruttore 2" e disponga del significato del connettivo "e", anche operativamente.
  Naturalmente analoghe considerazioni valgono a proposito delle altre notazioni: A_1C_2 …

[25] Attenzione: l'ipotesi di equiprobabilità non si può estendere a qualsiasi situazione. Ad esempio, vedremo che non si può applicare nel problema delle lampadine fulminate che proponiamo di seguito.

- Abbiamo **letto** direttamente **sul grafo ad albero** il procedimento di calcolo delle probabilità richieste, ad esempio di $p(C_1C_2)$. Lo abbiamo cioè utilizzato, non solo per rappresentare la situazione ma anche come **modello** di calcolo.
  Però, anche in tale contesto, lo studente deve essere consapevole che in sostanza non si è fatto altro che applicare la ben nota legge della moltiplicazione
$$p(C_1C_2) = p(C_1) \cdot p(C_2)$$

2. Problema dei cacciatori[26]

Due cacciatori bravi (che non sbagliano mai il bersaglio!) vanno a caccia assieme. Passano due fagiani e ciascuno spara ad un fagiano, a caso. Quale è la probabilità che un fagiano si salvi? (Lo sparo di ciascun cacciatore è un esperimento con due risultati...)

Ovviamente un fagiano potrà salvarsi solo se l'altro fagiano sarà colpito con due colpi...

Anche in questo caso si può schematizzare la situazione con una tabella a doppia entrata.

Cacciatore 1

Cacciatore 2	**Fagiano 1**	**Fagiano 2**
Fagiano 1		
Fagiano 2		

Cerchiamo di comprendere il significato di tale rappresentazione. Consideriamo, ad esempio, la cella evidenziata in grigio, che si trova sulla prima riga e seconda colonna: essa rappresenta l'evento "il cacciatore 1 ha sparato al fagiano 2 e il cacciatore 2 ha sparato al fagiano 1".
A questo punto, servendoci di tale schematizzazione, possiamo classificare i possibili esiti:

Cacciatore 1

Cacciatore 2	**Fagiano 1**	**Fagiano 2**
Fagiano 1	*Colpito solo fagiano 1*	*Colpiti entrambi*
Fagiano 2	*Colpiti entrambi*	*Colpito solo fagiano 2*

Pertanto la probabilità *p* che uno qualsiasi dei due fagiani si salvi è
$$p = \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

<u>**Osservazione**</u>
Senza ricorrere alla tabella, si può pensare di esprimere l'evento
A: "*I due cacciatori colpiscono lo stesso fagiano*",
in termini degli eventi
C: "*Il cacciatore 1 colpisce un fagiano (uno qualsiasi tra i due)*"
D: "*Il cacciatore 2 colpisce lo stesso fagiano che colpisce il cacciatore 1*".

[26] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 5.

Precisamente, utilizzando queste notazioni, si può dire che

$$A = C \text{ e } D.$$

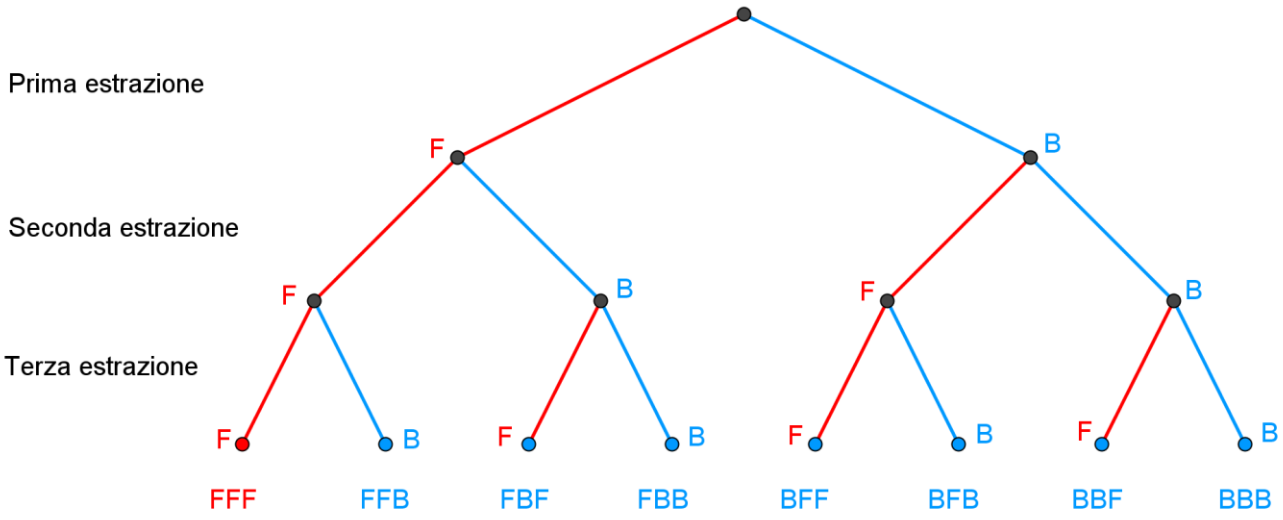
E si conclude ancora che

$$p(A) = p(C \text{ e } D) = p(C) \cdot p(D) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. Problema delle lampadine[27]

Una scatola contiene 3 lampadine elettriche fulminate e sette buone. Se ne prendono 3 a caso. Quale è la probabilità che una lampadina almeno sia buona? Disegnare il grafo e calcolare le probabilità dei vari risultati.

Iniziamo schematizzando la situazione mediante un diagramma ad albero a 3 "livelli", ciascuno dei quali rappresenta un'estrazione. Denotiamo con *F* l'evento "*la lampadina estratta è fulminata*" e con *B* l'evento "*la lampadina estratta è buona*".

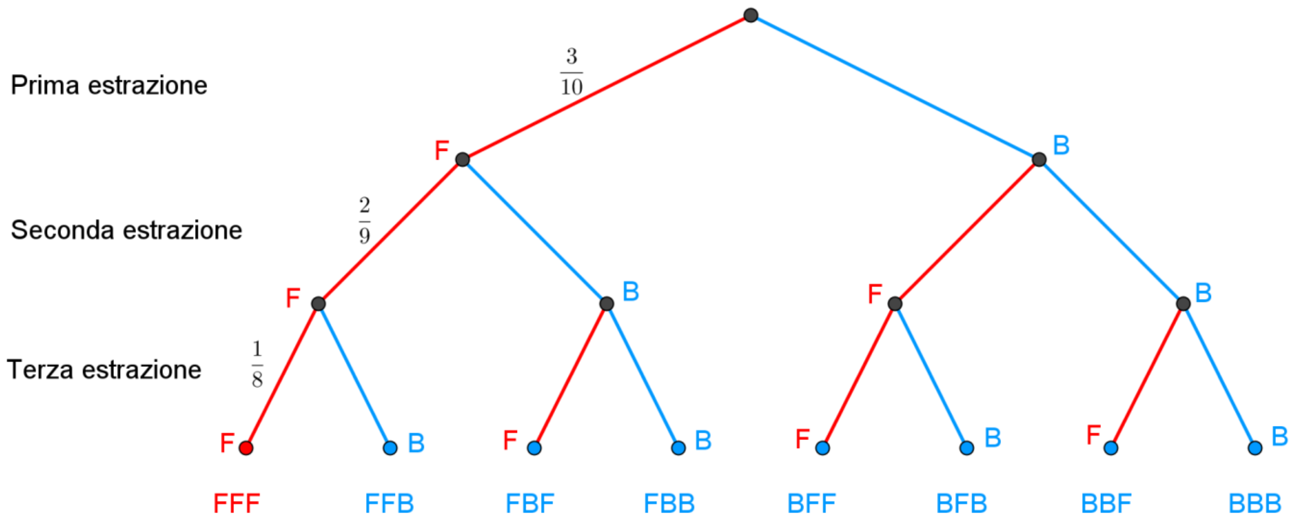


Come chiariremo nelle osservazioni, per risolvere il problema conviene considerare l'evento *complementare* dell'evento "*viene estratta almeno una lampadina buona*". Si tratta dell'evento: "*tutte le lampadine estratte sono fulminate*", che possiamo anche denotare schematicamente con *FFF,* analogamente a quanto visto nell'esercizio dei circuiti. Sul grafo è rappresentato dal cammino più a sinistra.

Per calcolare la probabilità di tale evento, riportiamo accanto a ciascuno dei rami che formano il cammino *FFF*, le probabilità delle relative estrazioni. Allo scopo dobbiamo tener presente che **dopo ogni estrazione la composizione** della scatola **risulta modificata**, dato che le lampadine *non* vengono reinserite al suo interno[28]. Di conseguenza anche il numero dei "casi favorevoli", come del resto quello dei "casi possibili", varia in seguito ad ogni estrazione.

[27] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 44 n. 3. Calcoleremo la probabilità dell'evento "Almeno una lampadina è buona". Le probabilità degli altri esiti si possono ricavare in modo analogo.

[28] In altre parole, gli esiti delle varie estrazioni sono eventi dipendenti.



Così analogamente agli esercizi precedenti[29], possiamo *leggere dal grafo* che la probabilità dell'evento *FFF* è

$$p(FFF) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

e quindi la probabilità richiesta è

$$p(almeno\ una\ buona) = 1 - p(FFF) = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120} = \mathbf{0{,}992}$$

<u>Osservazioni</u>

- Per rispondere al quesito si può anche optare per un *approccio diretto*. Cioè si può pensare di calcolare direttamente la probabilità dell'evento indicato nel testo, cioè l'evento: "*viene estratta almeno una lampadina buona*". Ma, esso si realizza in ben 7 differenti modalità:
  FFB, FBF, FBB, BFF, BFB, BBF, BBB
  Per questo il procedimento si rivela più complesso di quello che abbiamo precedentemente proposto e che prevede il ricorso all'evento complementare.

- Le 8 possibili tipologie di estrazione (le 7 ora elencate oltre al caso *FFF*) **non sono equiprobabili**.
  Senza calcolare esplicitamente le probabilità dei vari casi, ci si può rendere conto di ciò riflettendo sul fatto che estrarre una lampadina fulminata è meno probabile che estrarne una buona, visto che quelle difettose sono di meno. E quindi, ad esempio, l'evento *FFB* avrà probabilità minore dell'evento BBB.

- Per il **significato delle notazioni** del tipo *FFF* e per i risultati sottesi all'uso del grafo ad **albero come modello di calcolo**, rimandiamo alle osservazioni scritte a commento di altri esercizi (in particolare, quello relativo ai *circuiti elettrici*).

- Come osservato relativamente ad altri esercizi, l'uso dei grafi ad albero è didatticamente significativo: può aiutare a comprendere più a fondo la situazione, ma *non è necessario* per rispondere al quesito.
  Ad esempio, lo studente può iniziare a investigare sul problema producendo un **elenco** dei vari casi possibili (ma, ricordiamo, non equiprobabili!): *FFF, FFB*, … e da qui rendersi conto che è più conveniente passare all'evento contrario *FFF*.

[29] A tale proposito si veda, in particolare, l'esercizio dei circuiti elettrici, collegamento in serie.

4. Problema del quadrigetto[30]

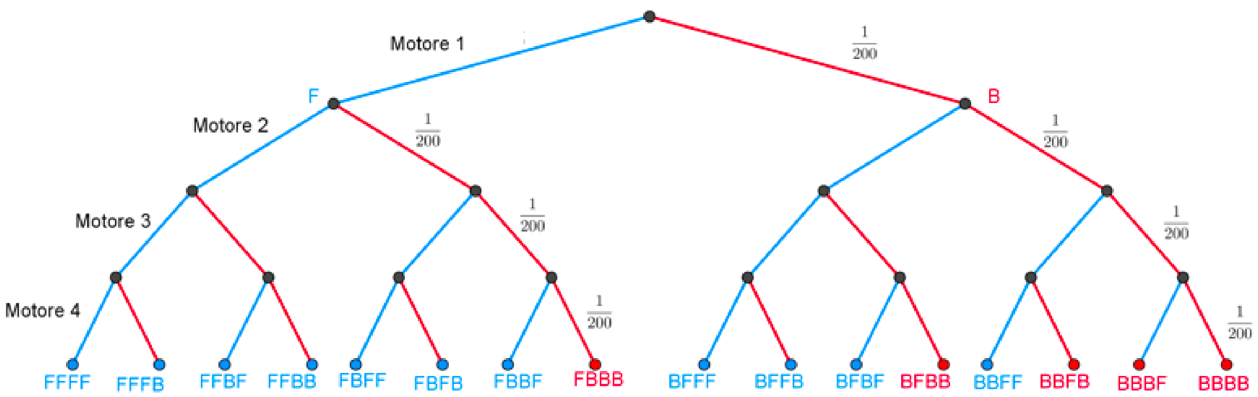
Un quadrigetto compie la traversata dell'Atlantico. La probabilità che un motore si blocchi si può valutare 1/200; perché l'aereo arrivi a destinazione basta che due motori funzionino regolarmente. Quale è la probabilità che l'aereo non arrivi a destinazione?
(Indicare l'espressione esatta della probabilità e poi darne una valutazione approssimata con un po' di buon senso).

Si assuma che il funzionamento di ogni motore sia indipendente da quello degli altri.

Esaminiamo cosa significa l'ipotesi "*perché l'aereo arrivi a destinazione basta che due motori funzionino*". Vuol dire che per *non* arrivare a destinazione devono bloccarsi **almeno** 3 motori. Ossia devono bloccarsi 3 dei quattro motori oppure tutti e 4 i motori. In particolare, allora, la probabilità richiesta **non** è

$P(BBB) = \left(\frac{1}{200}\right)^3 = 0{,}005^3.$

Pertanto è necessario esaminare più alternative. E questo si può fare in modo espressivo con l'ausilio di un grafo ad albero[31], sul quale denotiamo con *F* l'evento "*il motore è funzionante*" e con *B* l'evento "il *motore è bloccato*".



I cammini sul grafo che ci interessano sono di due tipi e sono scritti in rosso alla base dell'albero. Uno è costituito dai cammini che rappresentano la situazione in cui esattamente *3 motori* non funzionano:

FBBB, BFBB, BBFB, BBBF[32]

Invece l'altro tipo di cammino corrisponde alla situazione in cui tutti *4 i motori* non funzionano, cioè

BBBB

Non ci resta allora che calcolare le probabilità di ciascuno di questi 5 eventi.
Iniziamo da *BBBB*. Procedendo in modo analogo ai quesiti precedenti, otteniamo subito che

$$p(BBBB) = \left(\frac{1}{200}\right)^4$$

[30] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed. D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 54 n. 1.
[31] Il grafo ad albero è uno strumento molto espressivo, ma non è necessario ricorrere ad esso. Lo studente "esperto" può, ad esempio, produrre un **elenco** dei casi che si possono presentare oppure visualizzare anche solo mentalmente una parte di tale grafo.
[32] Per il significato di tale notazione rimandiamo agli esercizi precedenti, in particolare a quello relativo ai circuiti.

Consideriamo poi un cammino relativo al blocco di 3 motori, ad esempio *FBBB*.
Dato che

$$p(F) = 1 - \frac{1}{200}$$

vale

$$p(FBBB) = \left(1 - \frac{1}{200}\right) \cdot \frac{1}{200^3} = \frac{199}{200^4}$$

In modo analogo potremmo calcolare esplicitamente le probabilità dei restanti 3 eventi in cui si bloccano esattamente 3 motori. Ma non è necessario: infatti ciascuno di tali valori è uguale a $p(FBBB)$, visto che anch'esso deve essere il prodotto del fattore $p(F)$ e di 3 fattori $p(B)$, pur considerati in ordine diverso.
Concludiamo allora che la probabilità che l'aereo *non* arrivi a destinazione è

$$P(non\ arriva) = 4 \cdot p(FBBB) + p(BBBB) = 4 \cdot \frac{199}{200^4} + \frac{1}{200^4} = \frac{797}{200^4} =$$

$$= 4{,}98125 \cdot 10^{-7} \approx \mathbf{5 \cdot 10^{-7}}$$

Osservazioni

- Si può affrontare il problema in esame anche ricorrendo all'*evento complementare*, "*l'aereo arriva a destinazione*". Tale approccio comporta però una maggior complessità nel calcolo.
  Infatti, l'aereo arriva a destinazione se funzionano 2 oppure 3 oppure 4 motori e i modi in cui ciò si può verificare sono più numerosi rispetto a quelli considerati nella risoluzione diretta, proposta precedentemente.[33] In ogni caso, si ha:
  $P(arriva\ ) = 6 \cdot P(FFBB) + 4 \cdot P(FFFB) + P(FFFF) = 6 \cdot 2{,}48^{-5} + 4 \cdot 4{,}93 \cdot 10^{-3} + 9{,}8 \cdot 10^{-1}$
  $= 9{,}999995 \cdot 10^{-1}$
  La probabilità che l'aereo arrivi è *quasi* 1.

- Per il **significato delle notazioni** del tipo *FFF* e per i risultati sottesi all'uso del grafo ad **albero come modello di calcolo**, rimandiamo alle osservazioni scritte a commento di alcuni altri esercizi (in particolare, quello relativo ai circuiti elettrici).

[33] In particolare, la sola situazione con due motori bloccati e due funzionanti si può verificare in 6 modi: FBFB, FBBF, FFBB, BFFB,BFBF e BBFF.