APPENDICE

A1 Eventi non elementari

1. Problema amici - lavoro[22]

Tizio e Caio sono amici: Tizio è libero solo il lunedì, mercoledì, sabato e domenica. Caio è libero solo il martedì, mercoledì, venerdì e domenica.

- **Quando possono incontrarsi?**
- **Come rappresenteresti l'insieme dei giorni possibili?**

Indichiamo con U l'insieme dei giorni della settimana:

$$\mathrm{U} = \{\text{lunedì}, \text{martedì}, \text{mercoledì}, \text{giovedì}, \text{venerdì}, \text{sabato}, \text{domenica}\};$$

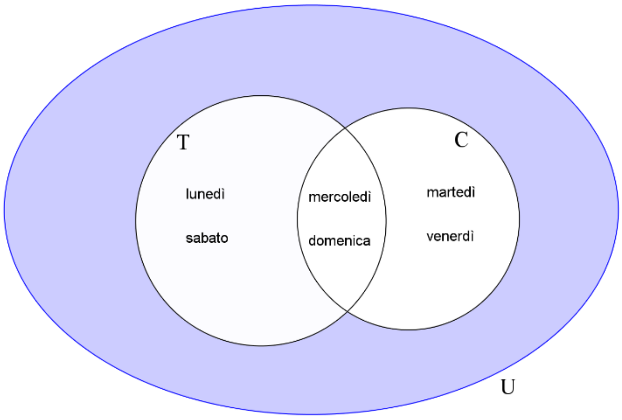
con C il sottoinsieme dei giorni della settimana in cui è libero Caio

$$\mathrm{C} = \{\text{lunedì}, \text{mercoledì}, \text{sabato}, \text{domenica}\};$$

con T il sottoinsieme dei giorni della settimana in cui è libero Tizio

$$\mathrm{T} = \{\text{martedì}, \text{mercoledì}, \text{venerdì}, \text{domenica}\}.$$

Possiamo così schematizzare la situazione mediante i diagrammi di Venn, utilizzando le notazioni ora introdotte.



Tizio e Caio possono trovarsi nei giorni della settimana in cui sono *entrambi* liberi. Tali giorni sono rappresentati nello schema grafico dal sottoinsieme comune all'insieme C e all'insieme T.
E tale sottoinsieme si può scrivere nella forma

$$C \cap T = \{\text{mercoledì}, \text{domenica}\}$$

<u>**Osservazione**</u>

Al di là delle richieste del quesito, è interessante **rappresentare graficamente** e descrivere mediante il linguaggio degli insiemi:

- l'insieme dei giorni in cui Tizio è libero, ma Caio è occupato
- l'insieme dei giorni in cui Tizio e Caio sono entrambi occupati

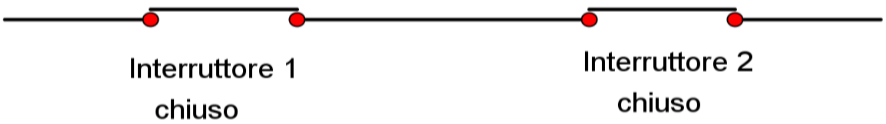
Altrettanto significativa è la questione, per alcuni aspetti inversa, di descrivere l'insieme

$$(T \cap C) \cup T^c$$

nel **linguaggio naturale** e di **rappresentarlo** graficamente.

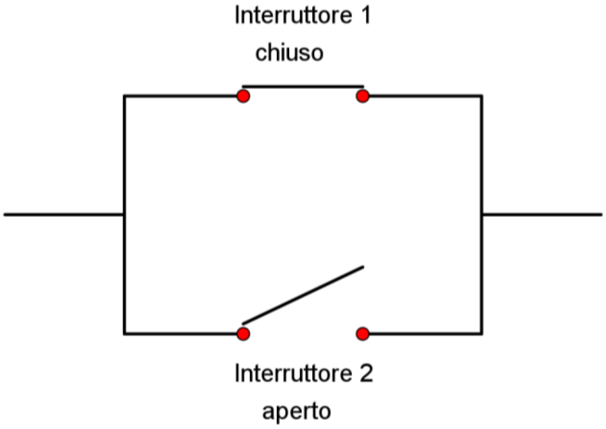
[22] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 27 n. 1.

2. **Problema degli interruttori**[23]
   a) **si collegano due interruttori così (cioè "in serie").**



In quali casi passa la corrente? Fare il grafo.

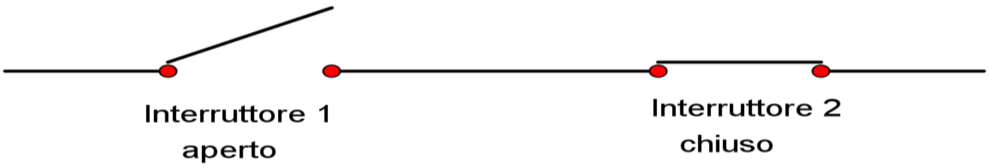
   b) **si collegano due interruttori così (cioè "in parallelo").**



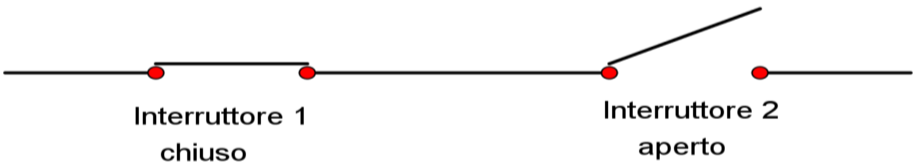
In quali casi passa la corrente? Fare il grafo. Supponendo che vi sia probabilità 1/2 per ciascun interruttore di essere chiuso (o aperto senza alcuna dipendenza fra i due interruttori) quale è la probabilità che passi corrente?

Nel **collegamento in serie** gli interruttori sono disposti uno di seguito all'altro, con un solo estremo in comune.
Esaminiamo i casi che si possono presentare, cominciando da quello in cui entrambi gli interruttori sono chiusi. Indichiamo tale situazione con la notazione C_1C_2.
In questo caso, come suggerisce la figura, la corrente può passare.

Se invece il primo interruttore è aperto (indichiamo tale situazione con la notazione A_1C_2) la corrente non passa



Simmetricamente, anche nel caso C_1A_2 in cui è aperto solo il secondo interruttore, non può passare la corrente.



Dovrebbe essere chiaro che la corrente non passa nemmeno nel caso A_1A_2 in cui sono aperti entrambi gli interruttori.

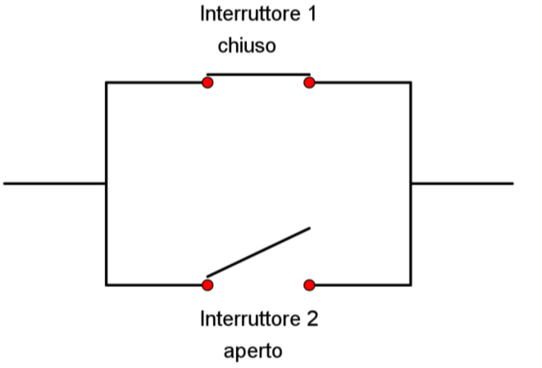
[23] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 2.

In definitiva nel collegamento in **serie** la corrente può passare solo se *entrambi gli interruttori sono chiusi,* ossia se

l'interruttore 1 è chiuso e l'interruttore 2 è chiuso

Invece il **collegamento in parallelo** è strutturalmente diverso, in quanto i due interruttori hanno entrambi gli estremi in comune.

Si comprende che la corrente passa in tre situazioni: nel caso C_1C_2 in cui i due interruttori sono chiusi, ma anche nei due casi in cui è chiuso solo un interruttore, cioè C_1A_2 o A_1C_2. Quest'ultima situazione è rappresentata nella figura seguente



La corrente non passa nel caso A_1A_2 in cui sono aperti tutti due gli interruttori.

Così nel collegamento **in parallelo** la corrente passa se *almeno* uno degli interruttori è chiuso, ossia se

l'interruttore 1 è chiuso o l'interruttore 2 è chiuso

Osservazione

L'esercizio proposto è particolarmente istruttivo perché permette di cogliere a fondo il significato dei connettivi *e* ed *o* del linguaggio naturale. Infatti è espressiva **l'analogia fra i connettivi e ed o** e i collegamenti, rispettivamente in serie e in parallelo. Notiamo che il connettivo *o* usato in senso disgiuntivo corrisponde all'operatore logico *XOR*.

Possiamo ora calcolare la probabilità che passi corrente nel **circuito in serie.**

Le possibili configurazioni degli interruttori sono *4*:

$$A_1A_2,\ A_1C_1,\ C_1A_1,\ C_1C_2$$

ed esse sono equiprobabili.

Per quanto osservato nel punto a) *l'unico caso* in cui passa corrente è C_1C_2.

Pertanto la probabilità richiesta è

$$p(passa\ corrente) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Cosa accade invece nel **collegamento in parallelo**?

Le possibili disposizioni degli interruttori sono ancora *4*, come nel collegamento in serie.

Però si ha passaggio di corrente quando *almeno* uno dei due interruttori è chiuso. E ciò avviene in 3 casi:

$$A_1C_1,\ C_1A_1,\ C_1C_2$$

Pertanto la probabilità richiesta è

$$p(passa\ corrente) = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Osservazione

In alternativa, si può considerare la probabilità dell'**evento complementare** "non passa corrente", cioè A_1A_2

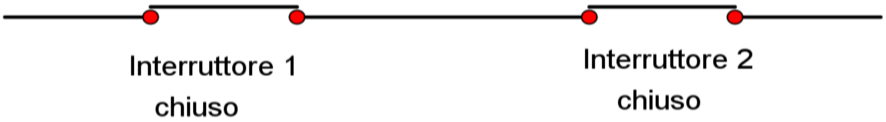
Seguendo questo approccio si ottiene:

$$p(passa\ corrente) = 1 - p(A_1A_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

A2 Legge della moltiplicazione

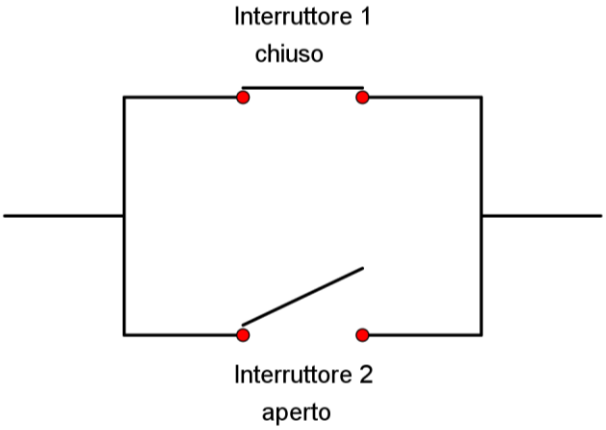
1. Problema degli interruttori[24]

a) si collegano due interruttori così (cioè "in serie").



In quali casi passa la corrente? Fare il grafo.

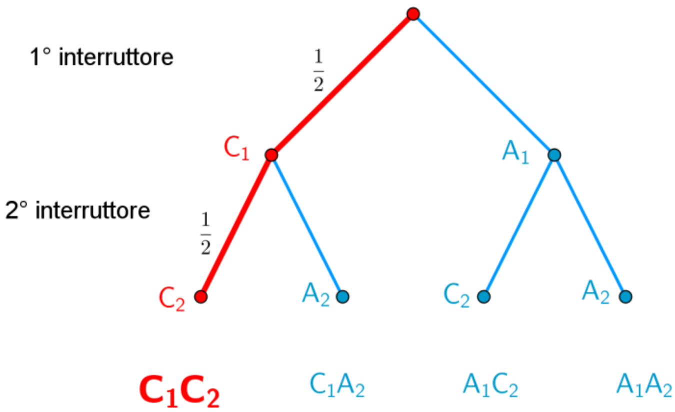
b) si collegano due interruttori così (cioè "in parallelo").



In quali casi passa la corrente? Fare il grafo. Supponendo che vi sia probabilità 1/2 per ciascun interruttore di essere chiuso (o aperto senza alcuna dipendenza fra i due interruttori) quale è la probabilità che passi corrente?

Abbiamo già mostrato come si può risolvere il problema nella Sezione A1. Ora esaminiamo come si possa affrontare la questione anche mediante opportuni grafi.

Ogni interruttore è chiuso o aperto *a caso*. Questo comporta che la probabilità che esso sia chiuso è ½ e quella che sia aperto è ancora ½.
La situazione relativa al **collegamento in serie** si può rappresentare efficacemente con un grafo ad albero, come il seguente



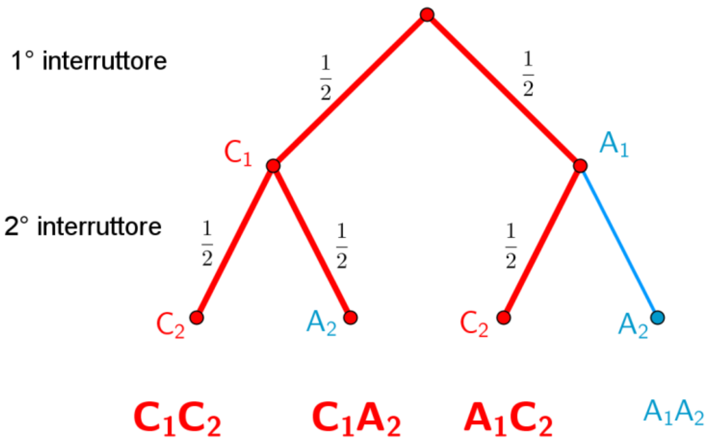
Sul grafo è evidenziato in rosso l'*unico* cammino per il quale si ha passaggio di corrente.
Dato che i 4 cammini sono equiprobabili[25], la probabilità richiesta è $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

[24] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 2.

Possiamo anche seguire un approccio di validità più generale, riportando accanto a ciascuno dei rami del cammino "favorevole" i valori di probabilità dei corrispondenti eventi costituenti C_1 , C_2.
Disponiamo così di tutti gli elementi per *leggere* direttamente *dal grafo* la probabilità dell'evento C_1 *e* C_2: essa è il prodotto delle probabilità relative a ciascun ramo del cammino in considerazione; ossia ancora

$$p(passa\ corrente) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Invece il **collegamento in parallelo** si può così rappresentare



I tre cammini sul grafo per i quali si ha passaggio di corrente sono quelli evidenziati in rosso.
Pertanto la probabilità richiesta sarà $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Analogamente a quanto visto per il collegamento in serie, la probabilità che passi corrente si può anche calcolare come somma delle probabilità dei 3 cammini "favorevoli"

$$p(passa\ corrente) = p(C_1C_2) + p(C_1A_2) + p(A_1C_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Osservazioni

- Per calcolare la probabilità nel collegamento in parallelo si può, in alternativa, considerare la probabilità dell'**evento complementare** "non passa corrente", ossia l'evento A_1A_2.
  Si ha così:

$$p(passa\ corrente) = 1 - p(A_1A_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- Abbiamo denotato con C_1C_2 l'evento: "sono chiusi gli interruttori 1 e 2".
  Potevamo invece indicare, in modo più preciso, con C_1 l'evento "*è chiuso l'interruttore 1*", con C_2 l'evento "*è chiuso l'interruttore 2*" e **denotare** l'evento in esame con C_1 **e** C_2.
  O, ancora più precisamente, considerare gli **insiemi** C_1, C_2 che corrispondono rispettivamente agli eventi C_1 , C_2. E denotare l'evento in esame con $C_1 \cap C_2$.
  La scelta tra le due notazioni dipende dalla situazione didattica e dalla sensibilità del docente. Ma, qualsiasi sia la notazione utilizzata, lo studente deve essere consapevole del fatto che essa si riferisce all'evento: "è chiuso l'interruttore 1 **ed** è chiuso l'interruttore 2" e disponga del significato del connettivo "e", anche operativamente.
  Naturalmente analoghe considerazioni valgono a proposito delle altre notazioni: A_1C_2 …

[25] Attenzione: l'ipotesi di equiprobabilità non si può estendere a qualsiasi situazione. Ad esempio, vedremo che non si può applicare nel problema delle lampadine fulminate che proponiamo di seguito.

- Abbiamo **letto** direttamente **sul grafo ad albero** il procedimento di calcolo delle probabilità richieste, ad esempio di $p(C_1C_2)$. Lo abbiamo cioè utilizzato, non solo per rappresentare la situazione ma anche come **modello** di calcolo.
  Però, anche in tale contesto, lo studente deve essere consapevole che in sostanza non si è fatto altro che applicare la ben nota legge della moltiplicazione
$$p(C_1C_2) = p(C_1) \cdot p(C_2)$$

2. Problema dei cacciatori[26]

Due cacciatori bravi (che non sbagliano mai il bersaglio!) vanno a caccia assieme. Passano due fagiani e ciascuno spara ad un fagiano, a caso. Quale è la probabilità che un fagiano si salvi? (Lo sparo di ciascun cacciatore è un esperimento con due risultati...)

Ovviamente un fagiano potrà salvarsi solo se l'altro fagiano sarà colpito con due colpi...

Anche in questo caso si può schematizzare la situazione con una tabella a doppia entrata.

Cacciatore 1 (colonne) / **Cacciatore 2** (righe)

	Fagiano 1	**Fagiano 2**
Fagiano 1		
Fagiano 2		

Cerchiamo di comprendere il significato di tale rappresentazione. Consideriamo, ad esempio, la cella evidenziata in grigio, che si trova sulla prima riga e seconda colonna: essa rappresenta l'evento "il cacciatore 1 ha sparato al fagiano 2 e il cacciatore 2 ha sparato al fagiano 1".
A questo punto, servendoci di tale schematizzazione, possiamo classificare i possibili esiti:

Cacciatore 1 (colonne) / **Cacciatore 2** (righe)

	Fagiano 1	**Fagiano 2**
Fagiano 1	*Colpito solo fagiano 1*	*Colpiti entrambi*
Fagiano 2	*Colpiti entrambi*	*Colpito solo fagiano 2*

Pertanto la probabilità *p* che uno qualsiasi dei due fagiani si salvi è
$$p = \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

<u>**Osservazione**</u>
Senza ricorrere alla tabella, si può pensare di esprimere l'evento
A: "*I due cacciatori colpiscono lo stesso fagiano*",
in termini degli eventi
C: "*Il cacciatore 1 colpisce un fagiano (uno qualsiasi tra i due)*"
D: "*Il cacciatore 2 colpisce lo stesso fagiano che colpisce il cacciatore 1*".

[26] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 37 n. 5.

Precisamente, utilizzando queste notazioni, si può dire che

$$A = C \ e \ D.$$

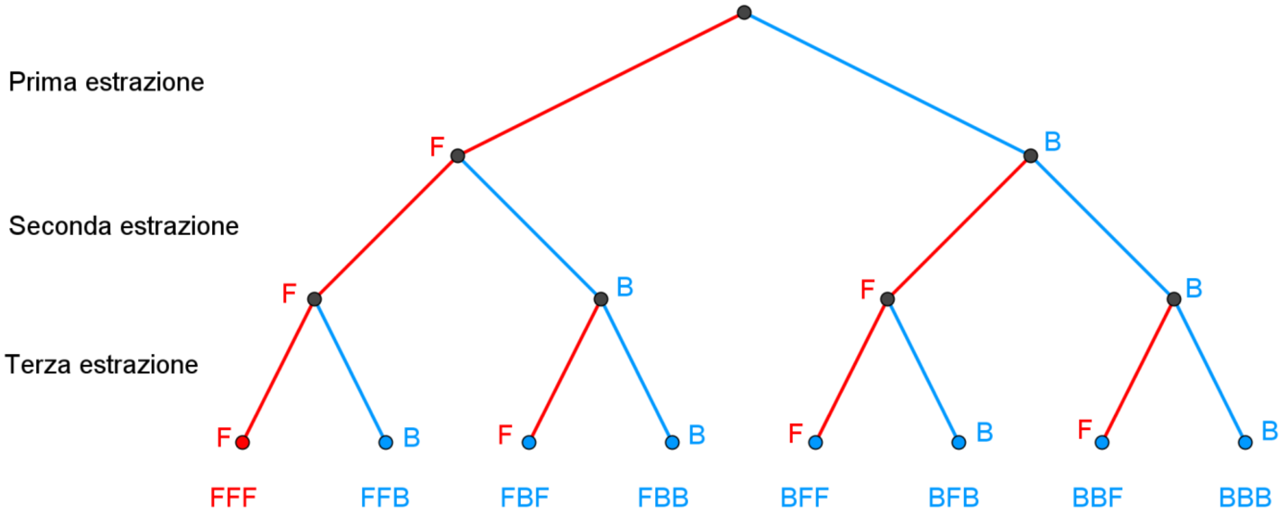
E si conclude ancora che

$$p(A) = p(C \ e \ D) = p(C) \cdot p(D) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. Problema delle lampadine[27]

Una scatola contiene 3 lampadine elettriche fulminate e sette buone. Se ne prendono 3 a caso. Quale è la probabilità che una lampadina almeno sia buona? Disegnare il grafo e calcolare le probabilità dei vari risultati.

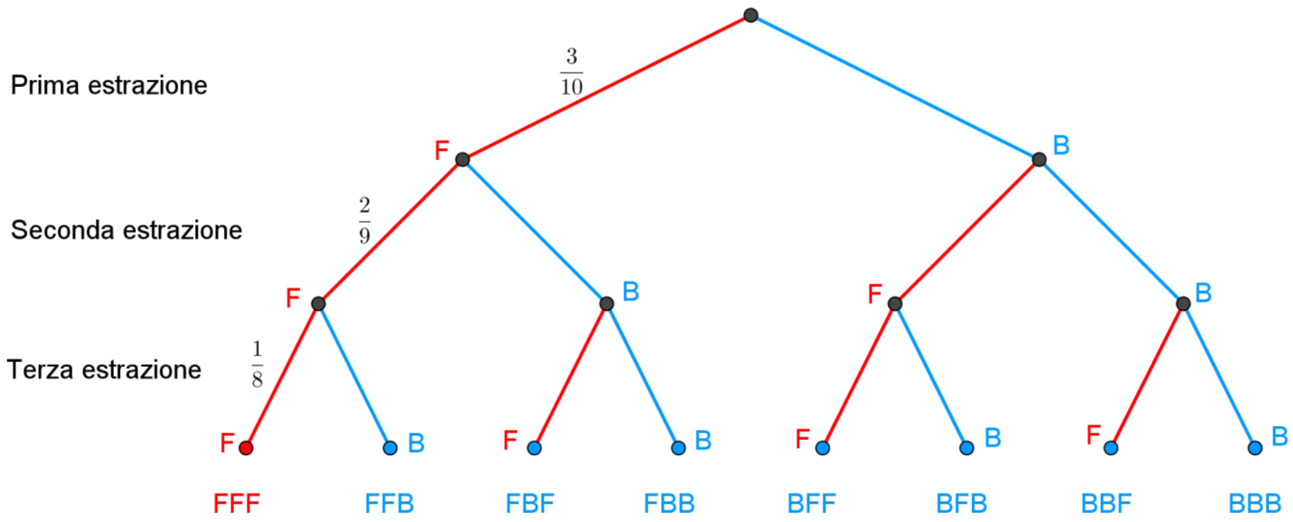
Iniziamo schematizzando la situazione mediante un diagramma ad albero a 3 "livelli", ciascuno dei quali rappresenta un'estrazione. Denotiamo con *F* l'evento "*la lampadina estratta è fulminata*" e con *B* l'evento "*la lampadina estratta è buona*".



Come chiariremo nelle osservazioni, per risolvere il problema conviene considerare l'evento *complementare* dell'evento "*viene estratta almeno una lampadina buona*". Si tratta dell'evento: "*tutte le lampadine estratte sono fulminate*", che possiamo anche denotare schematicamente con *FFF,* analogamente a quanto visto nell'esercizio dei circuiti. Sul grafo è rappresentato dal cammino più a sinistra.

Per calcolare la probabilità di tale evento, riportiamo accanto a ciascuno dei rami che formano il cammino *FFF*, le probabilità delle relative estrazioni. Allo scopo dobbiamo tener presente che **dopo ogni estrazione la composizione** della scatola **risulta modificata**, dato che le lampadine *non* vengono reinserite al suo interno[28]. Di conseguenza anche il numero dei "casi favorevoli", come del resto quello dei "casi possibili", varia in seguito ad ogni estrazione.

[27] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 44 n. 3. Calcoleremo la probabilità dell'evento "Almeno una lampadina è buona". Le probabilità degli altri esiti si possono ricavare in modo analogo.
[28] In altre parole, gli esiti delle varie estrazioni sono eventi dipendenti.



Così analogamente agli esercizi precedenti[29], possiamo *leggere dal grafo* che la probabilità dell'evento *FFF* è

$$p(FFF) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

e quindi la probabilità richiesta è

$$p(almeno\ una\ buona) = 1 - p(FFF) = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120} = \mathbf{0,992}$$

Osservazioni

- Per rispondere al quesito si può anche optare per un *approccio diretto*. Cioè si può pensare di calcolare direttamente la probabilità dell'evento indicato nel testo, cioè l'evento: "*viene estratta almeno una lampadina buona*". Ma, esso si realizza in ben 7 differenti modalità:
  FFB, FBF, FBB, BFF, BFB, BBF, BBB
  Per questo il procedimento si rivela più complesso di quello che abbiamo precedentemente proposto e che prevede il ricorso all'evento complementare.

- Le 8 possibili tipologie di estrazione (le 7 ora elencate oltre al caso *FFF*) **non sono equiprobabili**.
  Senza calcolare esplicitamente le probabilità dei vari casi, ci si può rendere conto di ciò riflettendo sul fatto che estrarre una lampadina fulminata è meno probabile che estrarne una buona, visto che quelle difettose sono di meno. E quindi, ad esempio, l'evento *FFB* avrà probabilità minore dell'evento BBB.

- Per il **significato delle notazioni** del tipo *FFF* e per i risultati sottesi all'uso del grafo ad **albero come modello di calcolo**, rimandiamo alle osservazioni scritte a commento di altri esercizi (in particolare, quello relativo ai *circuiti elettrici*).

- Come osservato relativamente ad altri esercizi, l'uso dei grafi ad albero è didatticamente significativo: può aiutare a comprendere più a fondo la situazione, ma *non è necessario* per rispondere al quesito.
  Ad esempio, lo studente può iniziare a investigare sul problema producendo un **elenco** dei vari casi possibili (ma, ricordiamo, non equiprobabili!): *FFF, FFB*, … e da qui rendersi conto che è più conveniente passare all'evento contrario *FFF*.

[29] A tale proposito si veda, in particolare, l'esercizio dei circuiti elettrici, collegamento in serie.

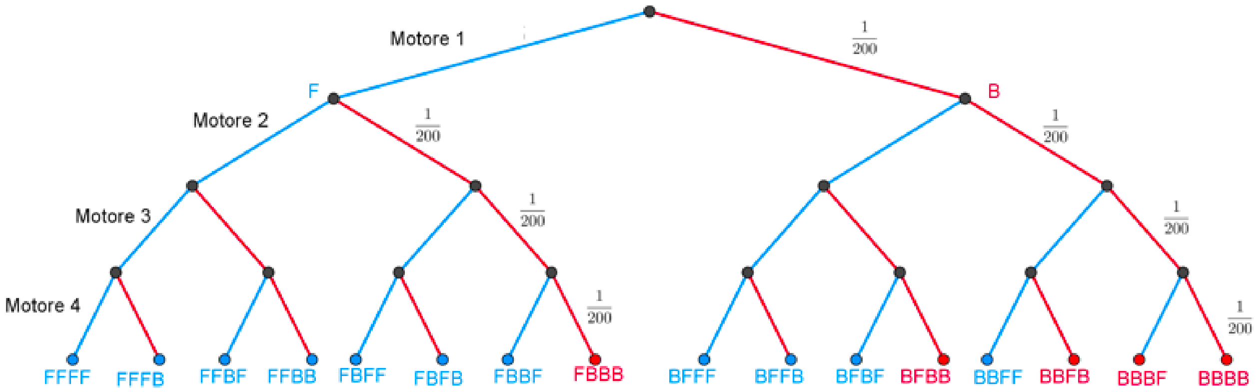
4. Problema del quadrigetto[30]
Un quadrigetto compie la traversata dell'Atlantico. La probabilità che un motore si blocchi si può valutare 1/200; perché l'aereo arrivi a destinazione basta che due motori funzionino regolarmente. Quale è la probabilità che l'aereo non arrivi a destinazione?
(Indicare l'espressione esatta della probabilità e poi darne una valutazione approssimata con un po' di buon senso).

Si assuma che il funzionamento di ogni motore sia indipendente da quello degli altri.

Esaminiamo cosa significa l'ipotesi "*perché l'aereo arrivi a destinazione basta che due motori funzionino*". Vuol dire che per *non* arrivare a destinazione devono bloccarsi **almeno** 3 motori. Ossia devono bloccarsi 3 dei quattro motori oppure tutti e 4 i motori. In particolare, allora, la probabilità richiesta **non** è

$P(BBB) = \left(\frac{1}{200}\right)^3 = 0{,}005^3.$

Pertanto è necessario esaminare più alternative. E questo si può fare in modo espressivo con l'ausilio di un grafo ad albero[31], sul quale denotiamo con *F* l'evento "*il motore è funzionante*" e con *B* l'evento "il *motore è bloccato*".



I cammini sul grafo che ci interessano sono di due tipi e sono scritti in rosso alla base dell'albero. Uno è costituito dai cammini che rappresentano la situazione in cui esattamente *3 motori* non funzionano:

FBBB, BFBB, BBFB, BBBF[32]

Invece l'altro tipo di cammino corrisponde alla situazione in cui tutti *4 i motori* non funzionano, cioè

BBBB

Non ci resta allora che calcolare le probabilità di ciascuno di questi 5 eventi.
Iniziamo da *BBBB*. Procedendo in modo analogo ai quesiti precedenti, otteniamo subito che

$$p(BBBB) = \left(\frac{1}{200}\right)^4$$

[30] Problema tratto da Giovanni Prodi, "Matematica come scoperta", ed. D'Anna, vol. 1, seconda edizione, pag. 54 n. 1.
[31] Il grafo ad albero è uno strumento molto espressivo, ma non è necessario ricorrere ad esso. Lo studente "esperto" può, ad esempio, produrre un **elenco** dei casi che si possono presentare oppure visualizzare anche solo mentalmente una parte di tale grafo.
[32] Per il significato di tale notazione rimandiamo agli esercizi precedenti, in particolare a quello relativo ai circuiti.

Consideriamo poi un cammino relativo al blocco di 3 motori, ad esempio *FBBB*.
Dato che

$$p(F) = 1 - \frac{1}{200}$$

vale

$$p(FBBB) = \left(1 - \frac{1}{200}\right) \cdot \frac{1}{200^3} = \frac{199}{200^4}$$

In modo analogo potremmo calcolare esplicitamente le probabilità dei restanti 3 eventi in cui si bloccano esattamente 3 motori. Ma non è necessario: infatti ciascuno di tali valori è uguale a $p(FBBB)$, visto che anch'esso deve essere il prodotto del fattore $p(F)$ e di 3 fattori $p(B)$, pur considerati in ordine diverso.
Concludiamo allora che la probabilità che l'aereo *non* arrivi a destinazione è

$$P(non\ arriva) = 4 \cdot p(FBBB) + p(BBBB) = 4 \cdot \frac{199}{200^4} + \frac{1}{200^4} = \frac{797}{200^4} =$$

$$= 4{,}98125 \cdot 10^{-7} \approx \mathbf{5 \cdot 10^{-7}}$$

<u>Osservazioni</u>

- Si può affrontare il problema in esame anche ricorrendo all'*evento complementare*, "*l'aereo arriva a destinazione*". Tale approccio comporta però una maggior complessità nel calcolo.
  Infatti, l'aereo arriva a destinazione se funzionano 2 oppure 3 oppure 4 motori e i modi in cui ciò si può verificare sono più numerosi rispetto a quelli considerati nella risoluzione diretta, proposta precedentemente.[33] In ogni caso, si ha:
  $P(arriva\ ) = 6 \cdot P(FFBB) + 4 \cdot P(FFFB) + P(FFFF) = 6 \cdot 2{,}48^{-5} + 4 \cdot 4{,}93 \cdot 10^{-3} + 9{,}8 \cdot 10^{-1}$
  $= 9{,}999995 \cdot 10^{-1}$
  La probabilità che l'aereo arrivi è *quasi* 1.

- Per il **significato delle notazioni** del tipo *FFF* e per i risultati sottesi all'uso del grafo ad **albero come modello di calcolo**, rimandiamo alle osservazioni scritte a commento di alcuni altri esercizi (in particolare, quello relativo ai circuiti elettrici).

[33] In particolare, la sola situazione con due motori bloccati e due funzionanti si può verificare in 6 modi: FBFB, FBBF, FFBB, BFFB,BFBF e BBFF.

A3 Attività. Compensazione nel lancio di una moneta

L'idea

Stabiliamo il numero totale di lanci per ogni prova, ad esempio 10 ed effettuiamo più prove, ciascuna costituita da 10 lanci.
Siamo interessati alle prove i cui **primi 9 lanci** hanno tutti esito ***"Testa"*** (*). Se al **decimo lancio** di una prova di tale tipo si ottiene "*Croce*" diciamo che nella prova c'è stata **compensazione**.

L'implementazione

Per velocizzare l'esecuzione delle prove ci serviamo del file Excel MoneteRitardatarieConsecutive.xlsm sul quale abbiamo implementato una procedura VBA.

- Fissiamo il numero di lanci nella cella C2.
- Con il bottone ***Lancia*** iniziamo le prove: il software simula i lanci e ferma il procedimento quando **i primi 9 lanci** di una prova sono nelle condizioni (*).
  Il numero di prove effettuato prima di ottenere tale prova è indicato nella cella C7.
- A questo punto, con il bottone ***Lancia l'ultimo***, effettuiamo **l'ultimo lancio** della prova in esame[34].
  Nella cella C5 si **segnala se nella prova c'è stata compensazione.**

Possiamo così iniziare una nuova serie di prove, utilizzando il bottone *Lancia*.

L'uso didattico

Il docente illustra l'attività ed indica come possono utilizzare il file *MoneteRitardatarieConsecutive.xlsm.*
Gli studenti possono lavorare *direttamente* sul file predisposto dall'insegnante.
Eseguono varie prove e **registrano** il numero di volte in cui vi è stata o non vi è stata compensazione. Dopo aver *provato* a rispondere alle questioni che seguono, discutono le conclusioni con i compagni e con il docente.

Traccia di lavoro

Utilizza il file *MoneteRitardatarieConsecutive.xlsm*. Effettua più prove costituite da 10 lanci ciascuna e registra il numero di volte in cui si ha "compensazione".[35]

- Ritieni che nelle **tue** prove globalmente ci sia "**compensazione**"? Giustifica.
- Se eseguissi un **numero maggiore di prove,** pensi che cambierebbero le tue conclusioni?
- Cosa permettono di affermare sull'esperimento i **risultati teorici** che conosci**?**

[34] Quella caratterizzata dalla condizione (*).
[35] Nel senso illustrato nella sezione *L'idea* di questa attività.

A4 Test gravidanza

Test clinici[36]

Alcuni test clinici, come per esempio quello di gravidanza, danno una risposta che può essere positiva o negativa: nell'esempio, test positivo significa che la donna è incinta, test negativo significa che la donna non è incinta.

Qualche volta il test dà risultati sbagliati; riportiamo una statistica di un laboratorio di analisi, relativamente a 3000 test di gravidanza effettuati:

- **fra i 1.000 test risultati negativi, 80 erano sbagliati (cioè la donna era incinta, mentre il test stabiliva che non lo era);**
- **fra i 2.000 test risultati positivi solo 5 erano sbagliati (cioè la donna non era incinta, mentre il test stabiliva che lo era).**

A partire da questi dati risolvere i seguenti quesiti:

a. calcolare la probabilità q che un test positivo indichi la gravidanza (cioè determinare *il valore predittivo del test positivo),*
b. calcolare la probabilità r che un test negativo escluda la gravidanza (cioè determinare *il valore predittivo del test negativo),*
c. calcolare la probabilità p che il test dia indicazioni esatte (cioè determinare *l'efficienza del test).*

Un primo approccio risolutivo

Per rispondere al quesito si può seguire una via puramente numerica.
Riteniamo però più significativo dal punto di vista didattico seguire anche altri due approcci che prevedono il ricorso ad opportune rappresentazioni grafiche. Li illustreremo esaminando la domanda c.

a) Il testo afferma che, dei 1000 test positivi (“casi possibili”), solo 5 test sono errati. Quindi sono 1995 gli esiti che indicano correttamente la gravidanza (“casi favorevoli”). La probabilità q richiesta è pertanto:

$$q = \frac{1995}{2000} \cong 0{,}998$$

b) Ragionando in modo analogo, si determina facilmente la probabilità r che un test negativo escluda la gravidanza:

$$r = \frac{920}{1000} = 0{,}920$$

[36] Tratto da Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 821 n. 214.

Modellizzazione mediante tabella a doppia entrata
Possiamo **suddividere** la popolazione in esame in quattro sottoinsiemi, a seconda dell'esito del test e della presenza o meno di gravidanza[37] e rappresentare in modo espressivo la situazione mediante una tabella come la seguente:

	negativi	**positivi**
no gravidanze	*Diagnosi corretta*	***Falso Positivo****:* *test positivo **e** no gravidanza*
gravidanze	***Falso Negativo****:* *test negativo **e** gravidanza*	*Diagnosi corretta*

Riportiamo sulla tabella i dati forniti nel testo e a partire da essi ricaviamo presto gli altri che servono per rispondere al quesito[38] (a destra).

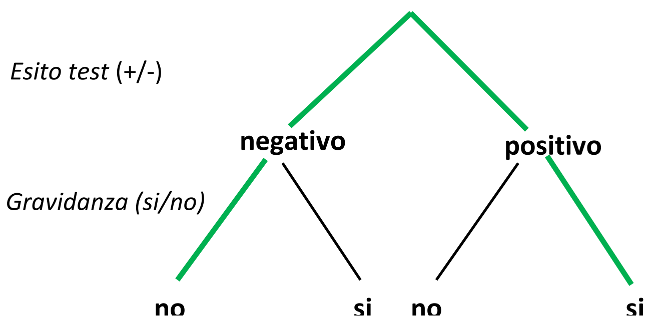
	negativi	***positivi***	
no gravidanze		5	
gravidanze	80		
Totale	**1000**	**2000**	**3000**

	negativi	***positivi***	
no gravidanze	920	5	
gravidanze	80	1995	
	1000	**2000**	**3000**

Il test fornisce indicazioni esatte per le donne che appartengono ai due sottoinsiemi evidenziati in verde. Pertanto i "**casi favorevoli**" sono $1995 + 920 = 2915$ su una popolazione di 3000 unità, i "**casi possibili**".
In definitiva la probabilità p che il test dia indicazioni esatte è

$$p = \frac{\mathbf{2915}}{\mathbf{3000}} \approx 0{,}972.$$

Modellizzazione mediante grafo ad albero
Per comprendere più in profondità la questione può essere utile schematizzare le situazioni che si possono presentare anche mediante un grafo ad albero:

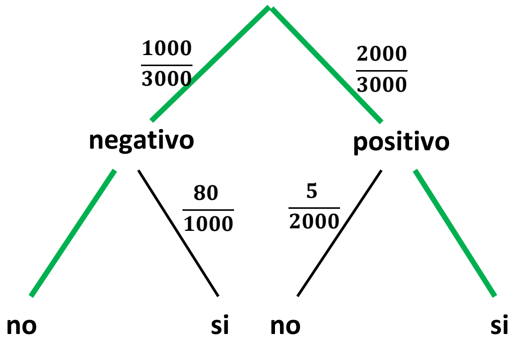


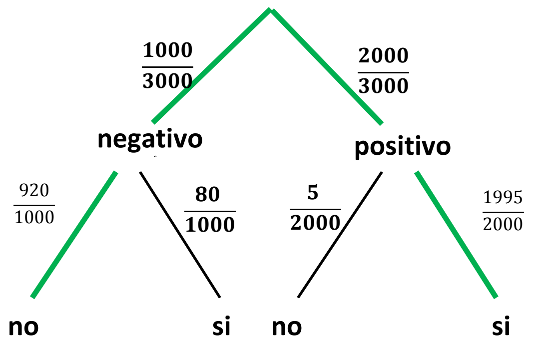
Sono evidenziati in verde i due cammini che rappresentano i casi in cui il test fornisce un esito esatto:

- *test negativo e "no" gravidanza*
- *test positivo e gravidanza*

[37] Più precisamente si è ottenuta una *partizione* della popolazione in esame.
[38] Il testo afferma che "su 1000 test negativi, 80 erano sbagliati". Questo implica che i restanti 920 test negativi erano esatti, cioè indicavano effettivamente assenza di gravidanza.

Per calcolare le probabilità di questi due eventi, cominciamo con l'indicare accanto ad ogni ramo il valore di probabilità dell'evento "elementare" corrispondente.
Sul grafo posto a sinistra riportiamo le probabilità che si desumono *direttamente* dai dati forniti. Deduciamo[39] poi le due probabilità che mancano e le aggiungiamo sul grafo a destra.





La probabilità dell'evento *"test negativo* **e** *no gravidanza"* si può ottenere in modo espressivo **moltiplicando** i valori di probabilità indicati lungo il cammino corrispondente:

$$p(\text{"}test\ negativo\ e\ no\ gravidanza\text{"}) = \frac{1000}{3000} \cdot \frac{920}{1000} = \frac{920}{3000}$$

Analogamente

$$p(\text{"}test\ positivo\ e\ gravidanza\text{"}) = \frac{2000}{3000} \cdot \frac{1995}{2000} = \frac{1995}{3000}$$

Il test dà un'*indicazione esatta* quando accade uno **oppure** l'altro dei due eventi rappresentati in verde. Pertanto la sua probabilità è la **somma** delle probabilità di questi due eventi:

$$p(\text{"}test\ esatto\text{"}) = \frac{920}{3000} + \frac{1995}{3000} = \frac{\mathbf{2915}}{\mathbf{3000}} \approx 0{,}972.$$

Osservazioni

- Ciascuna delle quattro celle della tabella (che rappresentano i quattro sottoinsiemi in cui è suddivisa la popolazione) **corrisponde** ad uno dei quattro possibili cammini sul grafo ad albero. Ad esempio alla cella in alto a sinistra nella tabella corrisponde il cammino più a sinistra sul grafo ad albero ("negativo e no gravidanza").

- Per i risultati sottesi all'uso del grafo ad **albero come modello di calcolo** rimandiamo alle osservazioni scritte a commento di altri esercizi (in particolare quello relativo ai *circuiti elettrici*).

- La somma delle probabilità dei rami relativi ad uno stesso nodo vale 1.
  E ancora 1 vale la somma delle probabilità di tutti i quattro cammini sull'albero:

$$\frac{1995}{3000} + \frac{5}{3000} + \frac{80}{3000} + \frac{920}{3000} = 1$$

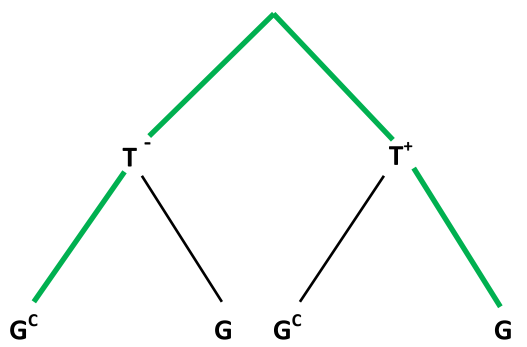
  Questi due fatti possono essere utilizzati per controllare i risultati.

- Possiamo esprimere il procedimento in modo coinciso, utilizzando le seguenti **notazioni** per indicare gli eventi che intervengono:

  $\boldsymbol{T^+}$ = *"la donna è risultata positiva al test"*, $\boldsymbol{T^-}$ = *"la donna è risultata negativa al test"*
  $\boldsymbol{G}$ = *"la donna ha una gravidanza"*, $\boldsymbol{G^c}$ = *"la donna non ha una gravidanza"*

[39] Il testo afferma che "su 1.000 test negativi, 80 erano sbagliati". Questo implica che i restanti 920 test negativi erano esatti, cioè indicavano assenza di gravidanza. Pertanto la probabilità che non vi sia gravidanza, sapendo che il test ha avuto esito negativo, è $\frac{920}{1.000}$. In modo analogo si calcola la probabilità di gravidanza sapendo che l'esito del test è positivo.

Ecco allora come diventa il grafo ad albero:



Ed ecco come si può esprimere in **forma compatta** l'evento "*test esatto*":

$$(T^- \text{ e } G^c) \text{ o } (T^+ \text{ e } G)$$

Gli errori dei test diagnostici

Il peso che può avere un errore nell'esito del test dipende dalla tipologia del test. Esaminiamo alcuni esempi al riguardo.

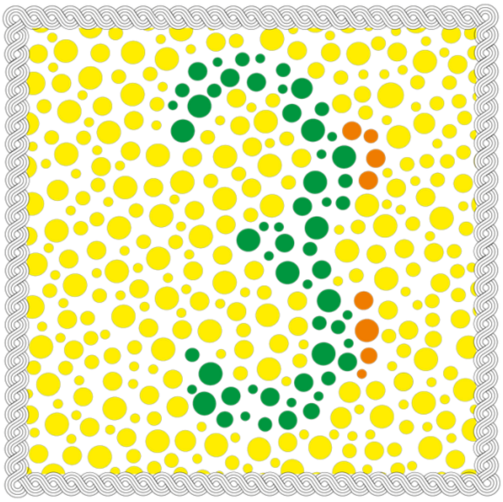
- Per un test di gravidanza (effettuato magari con un kit di farmacia) un **Falso Positivo**, può creare un po' d'ansia, ma può venir corretto da una successiva visita medica. Invece un **Falso Negativo** è potenzialmente più grave dato che la madre, in tal caso, non avrebbe motivo di prendere le precauzioni che normalmente si seguono in caso di gravidanza.

- Per un test relativo all'HIV un **Falso Positivo** può risultare molto grave, al punto che si sono verificati casi di suicidio di persone in realtà sane. Un **Falso Negativo** può avere conseguenze ancora più gravi dato che si rassicura il paziente sul suo stato di salute mentre in realtà risulta malato.

- È importante ridurre il numero dei **Falso Positivo** anche negli esperimenti in cui si testa l'efficacia di un farmaco. Altrimenti l'analisi potrebbe sancire erroneamente la bontà di un medicinale che in realtà non ha alcun valore terapeutico.

- Il giudizio di un tribunale è soggetto a valutazioni probabilistiche: è difficile avere la certezza assoluta della colpevolezza o dell'innocenza di un persona. Ma, se da una parte è importante evitare la condanna di un innocente (**Falso Positivo**), dall'altra è altrettanto importante non assolvere un colpevole (**Falso Negativo**).
  Ora, se si promuovono misure troppo garantiste per evitare la condanna di innocenti, si rischia di ottenere anche l'assoluzione di qualche colpevole. Il sistema giudiziario italiano ha introdotto un terzo grado di giudizio proprio per tutelare meglio gli innocenti; l'effetto è però anche quello di allungare vistosamente la durata del processo, con il rischio di rilasciare possibili colpevoli per decorrenza dei termini.

A5 Probabilità e genetica: il daltonismo[40]



Per capire che cos'è il daltonismo, si può osservare la figura: la maggior parte delle persone riesce a distinguere, dal fondo, un numero di colore diverso, perché nell'occhio sono ugualmente sviluppate le terminazioni nervose sensibili ai vari colori. Invece, un daltonico non riesce a distinguere il numero dal fondo, perché nel suo occhio sono inattive alcune terminazioni nervose.
Studi abbastanza recenti hanno portato a concludere che la caratteristica "attività delle terminazioni nervose sensibili ad un dato colore" **è ereditaria e si trova sul cromosoma X**. Si hanno perciò situazioni differenti per i maschi e per le femmine.
Infatti un **maschio** ha la coppia di cromosomi XY ed è **daltonico** se sull'unico cromosoma X manca la caratteristica relativa alla percezione dei colori; questa situazione cromosomica si può indicare con $\mathbf{X^*Y}$.
Invece, per una femmina che ha la coppia di cromosomi XX, è sufficiente avere la caratteristica su un solo cromosoma X per percepire normalmente i colori.

Quindi una **donna è daltonica** solo se ha i cromosomi $\mathbf{X^*X^*}$. Nella situazione X^*X non è daltonica, ma portatrice sana del daltonismo.

Si ha dunque che:
- il daltonismo modifica la percezione dei colori;
- il daltonismo è un'anomalia ereditaria, trasmessa attraverso il cromosoma X.

Le possibili situazioni genetiche sono:

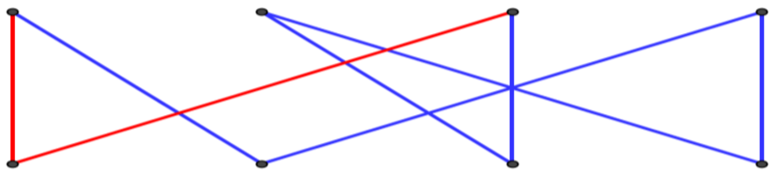
XY	maschio sano;
$\mathbf{X^*Y}$	maschio daltonico;
XX	femmina sana;
$\mathbf{X^*X}$	femmina sana, ma portatrice del daltonismo;
$\mathbf{X^*X^*}$	femmina daltonica.

[40] Dal libro di testo di Castelnuovo - Gori Giorgi – Valenti, Matematica oggi 2, ed. La Nuova Italia, 1992, pag. 472-473-474. La figura di riferimento è stata modificata.

Come si trasmette il daltonismo

Lo schema seguente aiuta a capire quali situazioni si possono presentare per i figli di una portatrice sana del daltonismo e di uomo non daltonico.

	Madre portatrice sana del daltonismo		Padre non daltonico	
Cellule	X^*X		XY	
Gameti	X^*	X	X	Y



Figli possibili	X^*X	X^*Y	XX	XY

Nello schema si è messo in evidenza il caso del figlio daltonico: *solo un figlio maschio può essere daltonico.*

Eventi dipendenti nella trasmissione del daltonismo

La precedente coppia di genitori potrebbe valutare la probabilità di avere un **figlio sano** in due situazioni diverse:

a. **prima di sapere il sesso del figlio**; in tal caso si hanno 4 casi possibili, fra cui 3 favorevoli, e perciò si trova:

$$s = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

b. **dopo aver saputo che il figlio è maschio**; così sono rimasti due soli casi possibili, di cui uno favorevole, e perciò la probabilità r di avere un figlio sano, *subordinata* al fatto che il figlio sia maschio è:

$$r = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

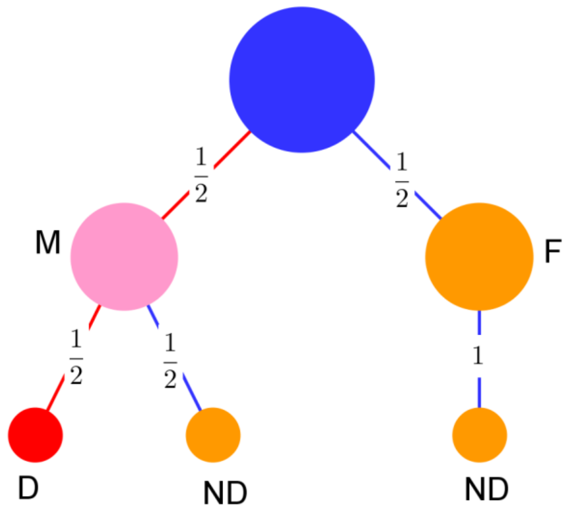
Si ritrova così che i due eventi «**avere un figlio maschio» e «avere un figlio non daltonico**» sono ***dipendenti**,* perché sapere che il figlio è maschio altera la probabilità che il figlio non sia daltonico.

Probabilità composta per esaminare la trasmissione del daltonismo

Per valutare la **probabilità** p che un figlio sia maschio *e* non daltonico ci si può basare sul **diagramma ad albero** della figura che segue. Si trova:

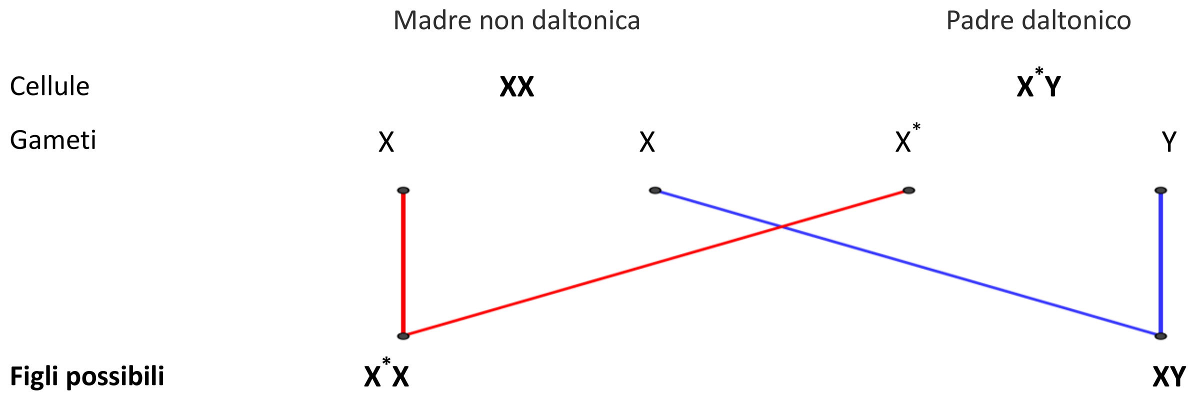
$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

perché $\frac{1}{2}$ è la probabilità che il figlio sia maschio e $\frac{1}{2}$ è la probabilità che il figlio maschio sia anche non daltonico.



Il daltonismo si trasmette «per via di donna»
Altre situazioni interessanti da esaminare sono quelle che si presentano per i figli di un daltonico con una donna sana, anche geneticamente.

Ecco lo schema che mostra le varie situazioni possibili.



In questo caso non si trovano più situazioni di incertezza:

- i figli maschi sono tutti **XY,** cioè certamente non daltonici;
- le figlie femmine sono tutte **X*X,** cioè portatrici sane del daltonismo.

Dunque, un uomo daltonico che si unisce con una donna non daltonica non trasmette la sua anomalia ai figli; ma il daltonismo può ricomparire nei nipoti maschi dell'uomo daltonico, trasmesso da una sua figlia. Per questo si dice che il daltonismo si trasmette «per via di donna».

Altre anomalie che si trasmettono «per via di donna»
Gli stessi ragionamenti seguiti per la trasmissione del daltonismo valgono anche nel caso di altre malattie trasmesse attraverso il cromosoma X. Ecco altri due esempi:

- *l'emofilia,* una malattia per cui è notevolmente ritardata la coagulazione del sangue;
- *il favismo,* che determina devastanti distruzioni dei globuli rossi del sangue, come reazione alle piante di fava (da cui il nome).

L'emofilia è stata, fino alla fine del secolo scorso, una malattia molto diffusa presso alcune famiglie reali (fra cui i Borboni di Spagna e i Romanov di Russia), in cui, per motivi dinastici, erano frequenti i matrimoni fra consanguinei.
Il favismo è ancora molto comune in Sardegna. Favismo e microcitemia si trovano su cromosomi differenti; tuttavia sono piuttosto frequenti, soprattutto in Sardegna, i maschi affetti sia dalla microcitemia che dal favismo.