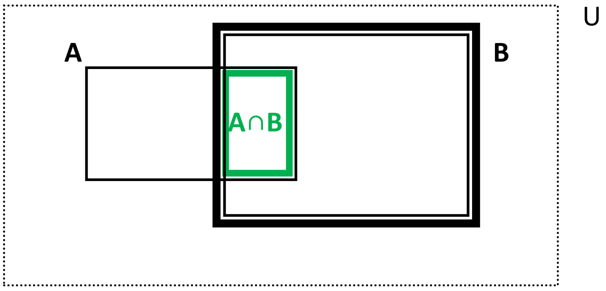
6.3 Facciamo il punto

A questo punto del Percorso, gli studenti dovrebbero ormai aver preso confidenza con la probabilità che dipende da altre; pertanto si trovano nella condizione di apprezzare una precisazione formale dei contenuti ad essa relativi.
La proponiamo di seguito ad un livello di rigore che riteniamo adeguato alla sensibilità e alla maturità culturale dello studente di scuola secondaria. Riserveremo invece al docente l'analisi critica dei concetti così introdotti e la discussione sulla loro collocazione nell'ambito della teoria assiomatica. Ma di questo ci occuperemo nella sezione successiva.

Dati due eventi A e B tali che $p(B) \neq 0$, diciamo **probabilità condizionata** di A dato B, la probabilità che si verifichi l'evento A, valutata sapendo che **l'evento B si è verificato**[8].
La indichiamo con la notazione $p_B(A)$.[9]

La situazione si può schematizzare nel modo seguente, dove U è un insieme in cui si considerano contenuti A, B.



Precisamente, in base alla nostra interpretazione di probabilità condizionata, si deve considerare che si è verificato l'evento B. Perciò:

l'insieme dei nuovi **"casi possibili" = B**
l'insieme dei **"casi favorevoli"**[10] **= A ∩ B**

Inoltre vale

$$\boldsymbol{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}} \qquad (*)$$

dove le probabilità *p* sono valutate rispetto all'insieme U.

Una giustificazione dell'uguaglianza (*)

- Per iniziare, ricordiamo che l'insieme dei nuovi "casi possibili" è B e l'insieme dei "casi favorevoli" ad A è $A \cap B$. Pertanto

$$p_B(A) = \frac{misura(\boldsymbol{A \cap B})}{misura(\boldsymbol{B})}$$

Tali misure[11] sono effettuate entrambe rispetto all'insieme U.

[8] In altri termini, disponiamo dell'informazione che l'evento B è accaduto e decidiamo di tenerne conto nella valutazione della probabilità dell'evento A.
[9] È in uso anche la notazione $p(A\,|B)$, ma questa ci sembra meno espressiva e meno chiara per uno studente di scuola secondaria. Infatti l'ordine di scrittura, prima A e dopo B, può venir erroneamente interpretato come un ordine di condizionamento, ossia che l'evento A condizioni l'evento B.
Inoltre la scrittura $p(A\,|B)$ potrebbe indurre lo studente a pensare che A | B sia un evento; ma, come avremo modo di chiarire nella prossima sezione, tale scrittura non indica alcun evento.
[10] Cioè quelli in cui può realizzarsi l'evento A.
[11] Nelle righe seguenti suggeriamo per mezzo di esempi cosa s'intende per *misura* di un insieme.

- Ora, nell'interpretazione geometrica della probabilità, la **probabilità di un insieme** E **è una misura** *di E* rispetto all'insieme in cui lo si considera contenuto.
  Quindi possiamo sostituire alle misure, le probabilità degli insiemi. Ossia

  $$misura\ (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$$
  $$misura\ (\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B})$$

  E con ciò abbiamo giustificato l'uguaglianza[12] (*).

Osservazione

Se nella formula (*) si esplicita il termine $\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, si ottiene la relazione che esprime la legge della moltiplicazione, già ampiamente discussa nel capitolo 5. In effetti la legge della moltiplicazione, che avevamo giustificato intuitivamente mediante l'analogia dell'acqua, è formalmente una conseguenza diretta della definizione di probabilità condizionata.

Per meglio comprendere il ruolo e il significato della formula (*), vale la pena approfondirne alcuni aspetti mediante attività che si possono collocare in più momenti del Percorso di probabilità (si veda l'appendice A1 in fondo al capitolo).

[12] A rigore, tale giustificazione vale quando si considera una distribuzione di probabilità uniforme, quale ad esempio si ha nel caso finito secondo l'approccio classico alla probabilità.