APPENDICE

A1 Attività che preparano o consolidano l'uguaglianza $\mathbf{p_B(A)} = \frac{\mathbf{p(A \cap B)}}{\mathbf{p(B)}}$ (*)

Vediamo alcune attività che permettono di comprendere meglio il significato della formula in esame. Esse possono essere affrontate in vari momenti del percorso che precedono l'introduzione della probabilità condizionata, oppure come consolidamento.

Probabilità come misura

- Consideriamo, ad esempio, il problema discusso in dettaglio nel capitolo 2:

  determinare il punteggio più probabile nel lancio di due dadi[34]

  Come ampiamente discusso, possiamo modellizzare la situazione mediante una tabella a doppia entrata.
  In tale contesto, abbiamo ottenuto la probabilità richiesta come rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento "il punteggio è 7" e il numero dei casi che si possono presentare: $\frac{6}{36}$ ossia $\frac{1}{6}$. In sostanza, abbiamo contato i quadratini verdi e i quadratini bianchi.

dado blu

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
"+"	1	2	3	4	5	6

dado nero

  Ora osserviamo che la **probabilità** richiesta si può interpretare anche in un modo diverso e che risulterà utile anche in altri contesti: la probabilità è l'**area dell'insieme che rappresenta l'evento** "esce il 7", rispetto al quadrato in cui è contenuto[35].

- Un altro esempio, anch'esso discusso nel capitolo 2:

  determinare la probabilità che il punteggio sia pari

  Come già discusso, possiamo modellizzare la situazione mediante la tabella "contratta" che rappresentiamo a lato, in cui sono raggruppati tra loro i primi tre numeri pari e i primi tre numeri dispari.
  Analogamente all'esempio precedente, la **probabilità** richiesta è uguale all'**area dell'insieme verde**, rispetto al quadrato in cui tale insieme è contenuto. Pertanto, per valutarla non serve contare le celle verdi e bianche, ma basta osservare che le celle verdi occupano esattamente la metà dell'intero quadrato che rappresenta la tabella. Dunque essa vale ½.

dado blu

d		
p		
"+"	p	d

dado nero

---

[34] Somma dei due numeri usciti su ciascun dado.

[35] Ossia la probabilità è l'area dell'insieme verde, misurata assumendo come **unità di misura** il quadrato che rappresenta l'intera tabella.

In definitiva, in entrambi gli esempi esaminati, la probabilità richiesta è la **misura**[36] di un insieme, rispetto ad un insieme opportuno che lo contiene; più precisamente, rispetto a quello in cui si decide siano contenuti gli eventi in esame.

- Vediamo ancora un ultimo esempio. In diverse situazioni si richiede di

  *valutare la **probabilità** come rapporto tra il **numero di elementi** di un insieme e quello dell'insieme che lo contiene.*

  In tali contesti, perché non cogliere l'occasione di notare che il numero di elementi di un insieme finito è una **misura** di tale insieme? Così come è una misura il numero di elementi dell'insieme rispetto al numero di elementi di un opportuno insieme che lo contiene, ossia è una misura il rapporto tra questi due numeri.
  Quello che a noi interessa è che, ancora una volta, possiamo interpretare la probabilità come misura di un insieme.

L'uguaglianza (*)

a) *Esaminiamo prima la situazione in cui A e B, insieme non vuoto, sono costituiti da un numero finito di elementi[37]. E supponiamo che l'insieme U abbia n elementi (i casi possibili iniziali), dove n è un numero naturale diverso da 0.*

   Per il significato attribuito a $\mathrm{p_B(A)}$ come la probabilità che si verifichi l'evento A qualora si sappia che si è verificato B, si ha che l'insieme dei nuovi "casi possibili" **=** B e l'insieme dei "casi favorevoli" = A∩B. Pertanto, valutando tale probabilità mediante l'approccio classico, vale[38]

$$\boldsymbol{p_B(A)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

   Ora, dividendo numeratore e denominatore per *n*, possiamo dedurre che

$$\boldsymbol{p_B(A)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{n}}{\frac{\#B}{n}} = \frac{\boldsymbol{p(A \cap B)}}{\boldsymbol{p(B)}}$$

   È importante che lo studente intenda tale procedimento non come una pura manipolazione algebrica. Ma, interpretando la probabilità come misura di un insieme, riesca a leggere il passaggio intermedio come un cambio della misura con cui si valutano gli eventi $A \cap B$ e B.

b) *L'uguaglianza in esame (*) continua comunque a valere anche se A e B non hanno un numero finito di elementi[39].* Basta ragionare in modo esattamente analogo al punto a), considerando non più il *numero* di elementi di ogni insieme, ma un'opportuna **misura dell'insieme**[40].

[36] Facciamo qui riferimento all'idea **intuitiva** che lo studente può avere di misura di un insieme. Eventualmente possiamo precisarla un po', rileggendo le situazioni note costituite dalla lunghezza dei segmenti e dall'area di figure piane: la lunghezza di un segmento o l'area di una figura piana sono numeri (positivi) che si associano a tali insiemi; tale corrispondenza deve verificare opportune condizioni, la cui precisazione non rientra però negli intenti di queste note.
[37] Esempi specifici di questo tipo possono essere proposti allo studente *in più occasioni* nel percorso prima di affrontare la probabilità condizionata oppure dopo aver visto la formula (*).
[38] Dato un insieme E che ha un numero finito di elementi, indichiamo con il simbolo #E il numero di elementi dell'insieme E.
[39] Come, ad esempio, nel caso in cui rappresentano i punti di un cerchio o di un cubo.
[40] Ad esempio **una** misura del cerchio di raggio r è la sua area πr^2. Una misura di un cubo di lato l nello spazio è il suo volume l^3.