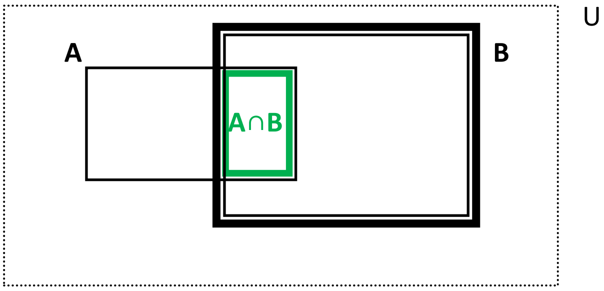
Facciamo il punto: la probabilità condizionata

Dati due eventi A e B tali che $p(B) \neq 0$, diciamo **probabilità condizionata** di A dato B, la probabilità che si verifichi l'evento A, valutata sapendo che **l'evento B si è verificato**[1].
La indichiamo con la notazione $p_B(A)$.

La situazione si può schematizzare nel modo seguente, dove U è un insieme in cui si considerano contenuti A, B.



Precisamente, in base alla nostra interpretazione di probabilità condizionata, si deve considerare che si è verificato l'evento B. Perciò:

l'insieme dei nuovi **"casi possibili" = B**
l'insieme dei **"casi favorevoli"[2] = A ∩ B**

Inoltre vale

$$\boldsymbol{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}} \qquad (*)$$

dove le probabilità *p* sono valutate rispetto all'insieme U.

Una giustificazione dell'uguaglianza (*)

- Per iniziare, ricordiamo che l'insieme dei nuovi "casi possibili" è B e l'insieme dei "casi favorevoli" ad A è $A \cap B$**.** Pertanto

$$p_B(A) = \frac{misura(\boldsymbol{A \cap B})}{misura(\boldsymbol{B})}$$

  Tali misure[3] sono effettuate entrambe rispetto all'insieme U.

- Ora, nell'interpretazione geometrica della probabilità, la **probabilità di un insieme** E **è una misura** *di E* rispetto all'insieme in cui lo si considera contenuto.
  Quindi possiamo sostituire alle misure, le probabilità degli insiemi. Ossia

$$misura\ (\boldsymbol{A \cap B}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{A \cap B})$$
$$misura\ (\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B})$$

  E con ciò abbiamo giustificato l'uguaglianza(*).

[1] In altri termini, disponiamo dell'informazione che l'evento B è accaduto e decidiamo di tenerne conto nella valutazione della probabilità dell'evento A.
[2] Cioè quelli in cui può realizzarsi l'evento A.
[3] Nelle righe seguenti suggeriamo per mezzo di esempi cosa s'intende per *misura* di un insieme.