Indice

Il punto di vista del docente

Alla luce dei criteri didattici e dei contenuti relativi alla probabilità per la classe quinta discussi nel capitolo precedente, illustriamo ora, nel dettaglio, il segmento di percorso relativo alla **distribuzione di Poisson**. Per ragioni di chiarezza espositiva, collochiamo in due capitoli distinti i materiali realizzati per lo studente (capitolo 3) e le indicazioni rivolte al docente (capitolo 2). Lo stretto legame tra i due punti di vista è assicurato dalla corrispondenza... biunivoca tra i paragrafi dei due capitoli: il materiale che costituisce il paragrafo 3.a è commentato per il docente nel paragrafo 2.a.

In questo capitolo discutiamo prima gli aspetti generali del percorso sulla distribuzione di Poisson, poi esaminiamo più nel dettaglio le scelte didattiche sottese ai materiali. Proponiamo anche degli approfondimenti, che forniscono il contesto teorico in cui si collocano i contenuti che, nei nostri materiali, sono stati semplificati per lo studente.
Naturalmente quanto proposto va utilizzato in modo **flessibile**. Spetta cioè al docente scegliere quali materiali presentare e in che modo farlo, in base alla propria sensibilità e alla situazione della classe.

Una sintesi: contenuti, materiali, modalità didattiche

La declinazione del percorso è schematizzata nella tabella che segue.

	Contenuti e attività	Tipo di materiali	Modalità didattiche
1.	**Situazioni motivanti, la questione**	video + dispense	lavoro individuale
2.	**Il modello binomiale** il centralino: dal video	foglio di lavoro: **quesito**	lavoro individuale
	il caso generale	dispense	lezione partecipata
3.	**Un nuovo modello** il modello	dispense	lezione partecipata
	dalla binomiale alla Poisson: dimostrazione	foglio di lavoro: **percorso guidato** procedimento e quesiti	lavoro individuale
4.	**La distribuzione di Poisson** facciamo il punto: definizione e interpretazione	dispense	lezione partecipata
	significato geom. del parametro, convergenza della binomiale: esperimenti numerici	file GeoGebra + foglio di lavoro: **traccia attività** indicazioni, quesiti e conclusioni	lavoro individuale
5.	**Non solo calcoli** errori di stampa: esercizio guida	foglio di lavoro: **esercizio**	lezione partecipata
	altri quesiti: esame di Stato, nascite, aspetti algebrici	foglio di lavoro: **esercizi**	lavoro individuale
6.	**Applicazioni** bombe su Londra	video	lavoro individuale
	altre: decadimento radioattivo, SuperEnalotto	foglio di lavoro: **lettura** testo e quesiti	lavoro individuale
	simulazione di eventi "rari"	video + file GeoGebra + foglio di lavoro: **traccia attività** indicazioni ggb, quesiti	lavoro individuale
7.	**Indici della distribuzione**	foglio di lavoro: **percorso guidato** testo e quesiti	lavoro individuale

La colonna **contenuti e attività** riporta gli argomenti e gli aspetti che affrontiamo nel percorso, secondo l'ordine di presentazione in classe che ci sembra didatticamente più efficace. Tuttavia tale schema va interpretato con **flessibilità**: come già precisato, il percorso deve essere adattato alle esigenze specifiche della classe.
I numeri a fianco indicano il numero di paragrafo del capitolo 2 e dunque del capitolo 3, in cui essi sono sviluppati nel dettaglio.

La seconda colonna precisa il **tipo di materiale** didattico realizzato a supporto delle attività relative al contenuto indicato a fianco. Esso è di varie tipologie, sia per supporto fisico (foglio di carta, file Geogebra, video) che per struttura e modalità di utilizzo.
Il *foglio di lavoro*, come vedremo, a sua volta si distingue in più sottocategorie. Tra queste, quella che indichiamo come *percorso guidato* che è organizzato in brevi spiegazioni alternate a domande: lo studente deve seguire il procedimento indicato e rispondere ai quesiti proposti, eventualmente, contando su opportuni suggerimenti; in ogni caso è importante che poi si confronti con la risoluzione fornita sul testo. Invece gli *esercizi* hanno una struttura meno articolata, costituita unicamente dal testo e dalla risoluzione completa. Più in generale, tutti i quesiti proposti nei materiali sono accompagnati dalla risoluzione dettagliata e giustificata, allo scopo di renderli fruibili per il lavoro autonomo dello studente.
Anche i *file GeoGebra* e i *video*, dei quali ci occuperemo in dettaglio nel capitolo 4, sono realizzati per supportare il lavoro individuale dei ragazzi.
Invece le *dispense* prevedono una più forte mediazione da parte del docente. Esse sono delle note scritte che costituiscono un riferimento per lo studio e offrono un'esposizione motivata dei contenuti e degli aspetti del percorso che si affrontano in classe.

Infine, la colonna a destra esplicita la **metodologia didattica di insegnamento-apprendimento** mediante la quale si suggerisce di utilizzare i materiali. Come già accennato, diversi tra essi sono destinati all'attività autonoma e individuale dello studente, magari a casa, visto che tutti riportano la risoluzione e spesso dei suggerimenti. Tale lavoro, però, risulta efficace solo se poi viene opportunamente ripreso e commentato in classe e se è opportunamente introdotto dal docente.
D'altra parte i materiali si prestano anche ad essere utilizzati in classe in una modalità improntata sulla lezione partecipata. Con ciò intendiamo una lezione condotta dal docente, ma che prevede il contributo *determinante* degli studenti nella sua costruzione ed è improntata sul dialogo e sulla comunicazione (non solo a parole) tra i partecipanti.

Prerequisiti

Il percorso riguardante la distribuzione di Poisson si colloca nel contesto più ampio della probabilità nella classe quinta della scuola secondaria, che abbiamo tratteggiato nel capitolo 1.
Sono dunque prerequisiti relativi alla probabilità alcuni degli elementi che in tale schema precedono la distribuzione di Poisson, nel senso indicato nel capitolo 1. Precisamente:

- variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità discrete: definizione a livello elementare e simbologia; valore atteso e varianza (solo per il paragrafo 3.7)
- la distribuzione binomiale: modellizzazione mediante tale distribuzione, espressione analitica.

Oltre a tali aspetti relativi alla probabilità non servono altri prerequisiti, ad eccezione dell'idea di limite di una successione e del suo calcolo (ma solo se si intende effettuare la dimostrazione della convergenza della binomiale alla Poisson - paragrafo 3.3.2); d'altronde è un argomento di cui gli studenti della classe quinta dovrebbero disporre.

Il percorso, come più volte affermato, intende sviluppare competenze prima che contenuti. Pertanto, affinché lo studente possa apprezzare le attività proposte, è opportuno che abbia già avuto modo di esercitare abilità quali l'interpretazione di testi, l'argomentazione, l'uso di più registri rappresentativi, ...

Osservazione

Preferiamo non fornire indicazioni sui tempi che è opportuno riservare alle varie attività, dato che essi dipendono dalla situazione della classe e, nella pratica didattica, sono fortemente condizionati dal periodo dell'anno scolastico in cui si affronta il percorso di probabilità. Comunque per avere un'idea a tale proposito rimandiamo al capitolo 5 in cui riporteremo i tempi, relativi alle varie attività, in cui si è articolata la sperimentazione.

1 Situazioni motivanti, la questione

L'intento iniziale è **motivare** gli studenti a partecipare attivamente al percorso. Pertanto proponiamo il video *Modellizzazione di eventi "rari"* mediante il quale presentiamo alcune situazioni problematiche ambientate in diversi contesti, anche legati alla vita quotidiana. L'idea è di costruire un modello che consenta di rappresentarle efficacemente e di effettuare previsioni su di esse; questa ricerca condurrà, nei paragrafi successivi, all'introduzione del modello di Poisson. Tale situazione di apprendimento viene indicata da B. D'Amore, in [DAm, p.285], come *situazione problema*.

Questo approccio è fondato sull'idea che la **formalizzazione** matematica non sia il punto di partenza, ma il **punto d'arrivo** di un percorso didattico. Per questo formuliamo la questione generale (il problema di conteggio) solo dopo aver esaminato alcune situazioni specifiche e presenteremo solo più avanti la definizione di distribuzione di Poisson. Tale criterio, che spesso non è seguito nei libri di testo, è suggerito addirittura nel Settecento, da M. de La Chapelle:

"*In generale, non si dovrebbe mai dare ai ragazzi una definizione, senza prima aver mostrato loro la cosa che viene definita. Il nome dovrebbe venire dopo l'idea, perché il nome è stato usato soltanto per evocare l'idea*" [Lang, p.254].

In quest'ottica preferiamo accompagnare le parole mediante opportuni **schemi grafici**, perché essi offrono una rappresentazione immediata del problema. D'altra parte ciò consente di sviluppare la competenza di osservare le questioni da **più punti di vista** e passare rapidamente da uno all'altro.

Modalità di utilizzo dei materiali
Dei video discuteremo in dettaglio nel capitolo 4. Per ora osserviamo che essi sono stati ideati per essere esaminati autonomamente dallo studente, magari a casa. Guardare più volte il video, mettere in pausa e poi riprendere permette a ciascun ragazzo di procedere assecondando il **proprio ritmo di apprendimento**. Si tratta dunque di uno strumento che consente di realizzare una didattica **individualizzata**.
Il video termina con la presentazione di un problema specifico: un problema di conteggio relativo al centralino telefonico. Su di esso si basa l'attività del paragrafo successivo.

2 Il modello binomiale

2.1 Il centralino - attività

In questa sezione ci occupiamo di risolvere il problema di conteggio posto nel paragrafo precedente. Ma, prima di affrontarlo nel caso generale, è meglio prendere gradualmente confidenza con il problema ed esaminare il **quesito specifico** proposto al termine del video *Modellizzazione di eventi "rari"*.

Inoltre inizialmente proviamo a modellizzare la situazione mediante una distribuzione che gli studenti già conoscono: la distribuzione binomiale, che preciseremo, per il docente, nel paragrafo successivo al punto b) approfondimenti teorici. Puntiamo così a "**radicare con continuità**" i nuovi saperi su quelli pregressi. Altrimenti il rischio è che gli studenti riescano ad utilizzare gli strumenti matematici introdotti, ma siano in grado di farlo solo localmente e per un periodo limitato di tempo; e poi, a lungo termine è come non li avessero mai visti. Di questo avviso è A. Sfard [Sfa, p.294] secondo la quale "*sembra che la via più sicura per arrivare a nuove esplorazioni sia quella di presentarle come (possibili) miglioramenti di atti familiari*".

Modalità di utilizzo dei materiali
Gli studenti sono invitati a provare a risolvere autonomamente il problema. In caso di difficoltà, trovano un aiuto nel suggerimento proposto ed eventualmente anche nella soluzione scritta; in ogni caso, è fondamentale che si confrontino con la risoluzione proposta e poi discutano in classe l'attività svolta individualmente. Utilizzeremo anche in seguito questa modalità di lavoro che possiamo sintetizzare con lo schema "quesito-suggerimento-risoluzione".

Osservazione
Nel materiale, l'indicazione principale è di utilizzare il modello binomiale; invece, la scelta di considerare una sequenza di $n = 100$ prove, è solo una tra le altre possibili. Ciò che importa è che n sia sufficientemente grande per poter assumere che in un intervallino di tempo arrivi al più una sola telefonata.

2.2 Il caso generale

a) Aspetti didattici

A questo punto gli studenti dovrebbero riuscire ad apprezzare una prima modellizzazione del problema nel caso generale: essa ripercorre i passi già seguiti nell'esempio e in particolare il ricorso al modello binomiale.

Pertanto uno dei passi da compiere è stabilire il valore da attribuire ai due parametri che caratterizzano la distribuzione. Fissato il generico numero n di prove, per determinare la probabilità p di successo nella singola prova, scegliamo di seguire un approccio frequentista. Ossia poniamo

$$p = \frac{\#\ \textit{realizzazioni evento}}{\#\ \textit{prove}}.$$

La vera scelta, in realtà, risiede nel seguire un approccio intuitivo e non una via formale che, come vedremo, si basa sul significato del valore atteso, ma che è didatticamente meno efficace. Possiamo indicare questo procedimento come una "**reinvenzione guidata**", per usare il termine introdotto da Freudenthal [Fre, p.72]: con la guida del docente gli studenti ricostruiscono gli oggetti e i concetti matematici[1] sottesi, quasi come li stessero inventando essi stessi.

In questo contesto prestiamo attenzione alla **modellizzazione**, in linea con gli obiettivi specifici di apprendimento previsti dalle Indicazioni Nazionali per la classe quinta del secondo ciclo d'istruzione:

"*In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi*".

Per questo investiamo del tempo per **valutare** l'espressione analitica a cui giungiamo, in termini di efficienza e espressività.

Inoltre discutiamo le **ipotesi** da assumere affinché abbia senso utilizzare il modello in esame. Come vedremo, in ultima analisi, ciò comporta **prendere decisioni**. Tale aspetto non è sempre esplicitato nei libri di testo che, anzi, sembrano spesso suggerire l'idea che ci sia un modo unico, assoluto, di schematizzare una situazione.
L'attività di riflessione sulle decisioni che si devono prendere quando si fa matematica a scuola è resa ancora più urgente dagli studi condotti da R. Zan [Zan07, p.127-129] secondo i quali gli studenti percepiscono la matematica come una disciplina nella quale non si debbano prendere decisioni.

Modalità di utilizzo dei materiali
Il materiale di questo paragrafo è progettato e realizzato come supporto alla lezione in classe, che prefiguriamo di tipo partecipato. Pertanto non sono indicati per un lavoro unicamente individuale e autonomo. Ciò si può indicare sinteticamente con il termine dispensa.

b) Approfondimenti teorici - la distribuzione binomiale

Nei materiali per lo studente utilizziamo più volte la distribuzione binomiale. La presentiamo agli studenti come una distribuzione di probabilità che nasce da una sequenza di prove svolte nelle stesse condizioni e tra loro indipendenti.
Più formalmente essa si può costruire per passi come di seguito. Riteniamo che allo studente vada presentata una opportuna declinazione di tale schema, che ne espliciti la sostanza senza risultare però troppo tecnica e suggeriamo di riferirsi a [Bon, par.3.1].

Cominciamo col definire la *variabile aleatoria di Bernoulli*. Essa è l'oggetto matematico che rappresenta la singola prova della sequenza.

[1] Ricordiamo che la costruzione di significati è uno dei criteri che abbiamo stabilito per il nostro percorso.

Definizione 2.1. *Si dice variabile aleatoria di **Bernoulli** di parametro $p \in [0,1]$ la variabile aleatoria che assume valore 0 oppure 1 e ha distribuzione discreta definita da:*

$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p$$

Convenzionalmente si indica con il termine "successo" l'evento che si realizza con probabilità p e con "insuccesso" l'evento complementare.
Tale variabile aleatoria si denota spesso con $X \sim Be(p)$.

Molte situazioni si possono modellizzare mediante una sequenza di variabili aleatorie di Bernoulli; tale sequenza rappresenta formalmente lo schema di prove ripetute a cui accennavamo all'inizio del paragrafo. Precisamente si definisce nel modo seguente.

Definizione 2.2. *Si definisce "**schema di Bernoulli**", o "schema successo-insuccesso", una sequenza $X_1, X_2, ..., X_n$ di variabili aleatorie di Bernoulli (ossia $X_i \sim Be(p)$ per $i = 1, 2, ..., n$) indipendenti e aventi lo stesso parametro p.*

In questo contesto la questione centrale è determinare la probabilità di avere $k = 0, 1, 2, ...$ successi sulle n prove dello schema. Il problema si esprime rigorosamente mediante una opportuna variabile aleatoria e una distribuzione di probabilità.

Definizione 2.3. *Sia S_n la variabile aleatoria che conta il numero di successi in uno "schema di Bernoulli" costituito da n prove ciascuna con probabilità di successo p. Tale variabile si dice variabile aleatoria **binomiale** e si denota spesso con $S_n \sim B(n,p)$.*
*La distribuzione di probabilità di S_n si dice **distribuzione binomiale** di parametri n e p e si osserva essere la funzione p definita da $p(x) = P(S_n = x)$ per $x = 0, 1, 2, ..., n$.*

Osserviamo che S_n si può esprimere nella forma

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

dove $X_i \sim Be(p)$ per $i = 0, 1, 2, ..., n$ e le variabili aleatorie X_i sono indipendenti tra loro.

Proposizione 2.4. *La distribuzione binomiale di parametri n e p ed è data da:*

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, ...$$

Dimostrazione. Per $k = 0, 1, 2, ...$ vogliamo esprimere la probabilità $P(S_n = k)$ in termini dei parametri della distribuzione .
Ovvero vogliamo calcolare la probabilità di ottenere esattamente k "successi" sulle n prove totali (quindi le restanti $n - k$ prove sono "insuccessi").
Iniziamo osservando che ogni sequenza di k "successi" su n prove si può ottenere in $\binom{n}{k}$ modi, dove il simbolo $\binom{n}{k}$ denota il coefficiente binomiale "n su k" e vale $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Infatti ogni sequenza del tipo richiesto si può interpretare come un sottoinsieme di k elementi, contenuto in un insieme di n elementi, precisamente tale sottoinsieme è costituito dalle posizioni dei k successi nella sequenza delle n posizioni che identificano le prove dello schema di Bernoulli.

Proseguiamo osservando che le variabili aleatorie X_i sono indipendenti tra loro e la probabilità di "successo" per ciascuna X_i è p mentre quella di "insuccesso" è $(1-p)$. Pertanto, per la legge del prodotto, si conclude che vale:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, ...$$

□

Le variabili aleatorie si possono descrivere sinteticamente mediante opportuni indici; tra questi vi sono il valore atteso e la varianza. Ne faremo uso nel percorso didattico che proponiamo, pertanto ne ricordiamo prima le definizioni per una generica variabile aleatoria discreta, ossia una variabile aleatoria che assume un insieme finito o numerabile di valori.

Definizione 2.5. *Sia X una variabile aleatoria discreta e sia $p(x)$ la sua distribuzione discreta di probabilità (ossia p è la funzione definita da $p(x) = P(X = x)$ per ogni valore x che può assumere la variabile X).*
*Si dice **valore atteso** (o media) di X il numero*

$$E[X] = \sum_x x \cdot p(x)$$

dove la somma è estesa a tutti i valori di X.
Se la variabile aleatoria è numerabile, tale somma è una serie e si richiede che essa sia assolutamente convergente, ossia che

$$\sum_x |x| p(x) < +\infty$$

Definizione 2.6. *Indicato con μ il valore atteso della variabile aleatoria discreta X, si dice **varianza** di X il numero*

$$V[X] = E[(X-\mu)^2]$$

Osservazioni

- per definizione di valore atteso si ha

$$V[X] = \sum_x (x-\mu)^2 p(x)$$

- inoltre, si può dimostrare che vale la seguente uguaglianza, utile nel calcolo

$$V[X] = E[X^2] - \mu^2.$$

Proposizione 2.7. *Sia $S_n \sim B(n,p)$, allora il valore atteso di S_n è np e la sua varianza è $np(1-p)$.*

Dimostrazione. Poiché S_n si può esprimere nella forma $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, dove $X_i \sim Be(p)$ per $i = 1, 2, ..., n$ iniziamo col determinare il valore atteso e la varianza delle variabili "elementari" X_i.

- $E[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

- $V[X_i] = E[{X_i}^2] - (E[X_i])^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p(1-p)$

A questo punto per ricondursi agli indici della variabile aleatoria S_n, basta ricorrere alla linearità del valore atteso e della varianza. E precisamente alle due proprietà che seguono: se X, Y sono due variabili aleatorie e $a \in \mathbb{R}$ vale

$$E[aX + Y] = E[aX] + E[Y] = aE[X] + E[Y]$$

Inoltre se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti che ammettono valore atteso, allora si ha:

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y]$$

In realtà tali uguaglianze, formulate nel caso di due variabili aleatorie, si estendono alla somma di n variabili aleatorie.
Così:

- $E[S_n] = E[X_1 + X_2 + ... + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_n] = np$
- e osservando che le X_i sono indipendenti si ha

$$V[S_n] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = np(1-p).$$

□

Osservazione
Alla luce di queste considerazioni formali possiamo dedurre in modo rigoroso il valore di p ricavato nel paragrafo 3.2.2 utilizzando un approccio frequentista.
Sia S_n la variabile aleatoria binomiale in esame, allora vale $E[S_n] = np$ per la proposizione 2.2.7. D'altra parte, per il significato di λ come numero medio di successi nell'intervallo $[0, t]$, vale

$$\lambda = E[S_n] = np$$

pertanto si conclude che deve essere

$$p = \frac{\lambda}{n}.$$

3 Un nuovo modello

3.1 Il modello

a) Aspetti didattici

Il modello binomiale che abbiamo introdotto per affrontare il problema di conteggio in esame, presenta delle criticità. Di queste intendiamo discutere con gli studenti, coerentemente con quanto prospettano *Linee generali e competenze* in [IndNaz2].
"*Lo studente saprà dominare attivamente:*
(...) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci)
(...) la costruzione e l'analisi di semplici ***modelli matematici***".
Preciseremo nella prossima sezione cosa si intende per modello matematico.
Per ora, sulla base dell'analisi condotta nel paragrafo precedente, puntiamo a costruire un nuovo modello più efficiente di quello binomiale.

Dal punto di vista didattico, preferiamo presentare il procedimento al limite che conduce al nuovo modello in un paragrafo a parte, in modo da non perdere di vista lo sviluppo complessivo del percorso.

Dunque arriviamo presto alle conclusioni, ma invece di fornire direttamente l'espressione analitica della distribuzione

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

preferiamo seguire un **approccio per passi**. Esso si fonda sulle due uguaglianze:

- $P(X = 0) = e^{-\lambda}$
- $P(X = k) = \dfrac{\lambda}{k} \cdot P(X = k - 1) \qquad \text{per } k = 1, 2, 3, \ldots$

In sostanza l'idea è di ottenere ogni valore di probabilità della distribuzione a partire dal primo, ($P(X = 0)$) moltiplicando ad ogni passo il valore di probabilità precedente per il fattore λ/k: $P(X = 1)$ si ottiene moltiplicando per $\lambda/1$, $P(X = 2)$ moltiplicando per $\lambda/2$, ...
Così facendo lo studente ha un modo per **ricostruire** la formula anche a **lungo termine**[2]. Non riteniamo certo che possa ricordare la formula (1) fino all'Esame di Stato, tra tutti i contenuti delle diverse discipline.
Del resto lo schema proposto presenta un ulteriore motivo di interesse: è analogo agli schemi che caratterizzano in modo semplice ed espressivo, importanti modelli di crescita. Infatti nella crescita lineare ogni termine successivo al primo si ottiene dal precedente sommando una (stessa) costante e nella crescita esponenziale ogni termine successivo al primo si ottiene dal precedente moltiplicando una (stessa) costante[3].

[2] Ricordiamo che la ricostruzione delle formule a lungo termine è uno dei criteri che abbiamo stabilito per il nostro percorso.

[3] Spesso queste situazioni sono indicate rispettivamente come progressione aritmetica e geometrica.

Inoltre, anche in questa sezione, prestiamo particolare attenzione alle **ipotesi** che è opportuno assumere affinché abbia senso modellizzare la situazione mediante la nuova distribuzione. In particolare, introduciamo l'espressione processo "casuale" e uniforme che sintetizza le prime due ipotesi sottese al modello e ci accompagneranno nella descrizione di molti fenomeni del percorso.

Osservazione
Nell'esempio del centralino, consideriamo come singola prova del modello binomiale l'arrivo di una telefonata nell'intervallino di tempo. Ma si poteva considerare come prova elementare anche l'azione (telefonare o meno) della generica persona che vive nel territorio di pertinenza del centralino. Allora, relativamente a questo ultimo modello binomiale, la prima ipotesi riportata nel testo per lo studente si può così riformulare: "*ogni persona ha la stessa probabilità di telefonare al centralino nei 10 minuti considerati*".

Modalità di utilizzo dei materiali
Anche in questa sezione i materiali si possono utilizzare nel modo descritto nel paragrafo precedente, cioè come dispensa a supporto della lezione.

b) Approfondimenti teorici - modello matematico, distribuzione di Poisson

Modello matematico

Visto che, in questo lavoro, facciamo largo uso del concetto di **modello matematico** ne precisiamo alcuni aspetti caratteristici.
Per iniziare seguiamo G. Israel che in [Isr, p.76] indica come una delle più chiare e semplici caratterizzazioni di tale oggetto matematico, quella proposta da von Neumann.

"*Per modello s'intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un siffatto costrutto matematico è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni - cioè descriva correttamente i fenomeni in un'area ragionevolmente ampia. Inoltre esso deve soddisfare certi criteri estetici - cioè, in relazione con la quantità di descrizione che fornisce, deve essere piuttosto semplice.(...) Le scienze non cercano di spiegare, a malapena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto modelli.*"

Più avanti, a p.116 dello stesso testo, Israel riprende tale caratterizzazione precisando:

"*[Oggi] la scienza non pretende più di spiegare, di scoprire l'essenza intima dei fenomeni. Essa non è ricerca della verità, non vuole essere specchio dei fenomeni. Ma si limita a fornire immagini matematiche - i modelli - che vanno valutate soltanto sulla base di criteri di efficacia, ovvero rispetto al fatto che funzionino più o meno bene, e quindi permettano di prevedere certi effetti o almeno farsi certe idee qualitative e sia pure parziali dei fatti. Non importa quanto vere, purché utili.*"

Inoltre, a proposito dell'esistenza di più modelli per la descrizione della realtà, a p.73 l'autore specifica:

"*Potremmo dire che non esiste una via diretta, una sorta di autostrada, che porta dalla realtà alla "sua" descrizione matematica, in modo univoco. E questo per tante ragioni. In primo luogo perché la realtà è costituita da un intrico talmente complesso e* *inestricabile di fenomeni,da impedire una descrizione relativamente semplice e schematica qual è quella matematica.*"

Infine osserviamo che la modellistica matematica moderna, la cui posizione è ben illustrata dalla caratterizzazione di von Neumann, si differenzia nettamente da quella classica di Newton. Infatti [Isr, p.118]:

"*Per Newton, il criterio direttivo non è l'utilità ma la verità, la scoperta delle cause, la spiegazione della cause, addirittura per giungere alla Causa Prima.*
(...) Il celebre aforisma newtoniano "Hypotheses non fingo" potrebbe essere quindi correttamente parafrasato al seguente modo: "io non costruisco modelli"... non ricorro a immagini o costruzioni concettuali arbitrarie, bensì ricerco la verità intima dei fatti."

Distribuzione di Poisson
Abbiamo detto che, secondo il nuovo modello, l'espressione esplicita della probabilità è data dalla formula (1). Resta da dimostrare che questa è una "buona definizione"[4], ossia che tale funzione effettivamente rappresenta una distribuzione di probabilità.

Proposizione 3.1. *La funzione definita in (1) è effettivamente una distribuzione di probabilità. Inoltre se la variabile aleatoria X ha distribuzione di Poisson di parametro λ, allora spesso si indica con $X \sim Po(\lambda)$.*

Dimostrazione. È evidente che per ogni k vale $P(X = k) > 0$, pertanto affinché la (1) sia l'espressione di una distribuzione di probabilità basta dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Per farlo conviene partire dallo sviluppo in serie della funzione esponenziale, ovvero:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Scrivendo tale uguaglianza per $x = \lambda$ si ha:

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ora, moltiplicando entrambi i termini per $e^{-\lambda}$, si conclude. Infatti si ha:

$$e^\lambda \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

ossia, proprio come si voleva,

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k).$$

□

[4] Nel senso matematico di definizione ben posta.

3.2 Dalla binomiale alla Poisson - attività

a) Aspetti didattici

Abbiamo strutturato la dimostrazione della convergenza della binomiale alla Poisson mediante un **percorso guidato**, ossia un procedimento organizzato in passi successivi, in ciascuno dei quali si pone una domanda. L'intento globale sotteso all'attività è di mettere lo studente nella condizione di **usare ciò che sa, per apprendere** cose nuove.

Più nel dettaglio, affinché l'approccio sia realmente costruttivo, e dunque formativo, le richieste sono formulate come manipolazioni **in vista di un obiettivo**. Ad esempio, chiediamo di esprimere $P(X = 0)$ *in termini* [5] del parametro della distribuzione.
L'attività, inoltre, consente di sviluppare un'altra competenza/abilità fondamentale: l'**interpretazione** di un testo matematico. E ciò avviene sia a livello locale, per rispondere alle singole domande, sia a livello globale, per seguire lo schema del procedimento.

Oltre a ciò questo materiale evidenzia una scelta sottesa all'intero percorso: introdurre la **formalizzazione** per **gradi**, utilizzando notazioni e termini nuovi solo quando ciò sia opportuno per comunicare in modo univoco ed espressivo. In altre parole vogliamo che la formalizzazione sia un'esigenza *dello studente*, che la percepisce come propria e non come un'imposizione del docente. Ad esempio, indichiamo ora con S_n la variabile aleatoria binomiale di parametro n: nei paragrafi precedenti era sufficiente denotarla con S, dato che n era fissato all'inizio del procedimento risolutivo. Analogamente introduciamo esplicitamente la funzione distribuzione di probabilità g che presenta l'indiscutibile vantaggio di rappresentare in modo sintetico i valori di probabilità, senza dover ricorrere in modo pesante a lunghe frasi nel linguaggio naturale.

Modalità di utilizzo dei materiali
La dimostrazione può essere delicata per le classi più deboli. In tal caso può costituire un interessante approfondimento per alcuni studenti.
Comunque le singole domande sono organizzate secondo lo schema che abbiamo già indicato come *quesito-suggerimento-risoluzione*. Qui però è fondamentale che lo studente non passi ad affrontare la domanda successiva se prima non si è confrontato con la risoluzione proposta. Infine osserviamo che le domande, singolarmente, senza il riferimento alla loro interpretazione probabilistica, possono essere affrontate anche nella classe quarta dato che si basano su questioni riguardanti il calcolo di limiti e i coefficienti binomiali.

b) Approfondimenti teorici - Altri approcci alla convergenza

La costruzione della legge di Poisson che abbiamo proposto è seguita da alcuni testi, quali [GriSne, p.187] e [Fel, p.153].
In letteratura la convergenza della binomiale alla Poisson viene mostrata anche mediante approcci diversi.

[5] Più in generale, in tale tipo di attività e non nella sola semplificazione, risiede uno degli aspetti a cui dovrebbe essere improntato lo studio dell'algebra nella scuola secondaria.

Approcci non ricorsivi
Ad esempio nei testi [Bal, p.39], [Ros, p.250] e [Pro, p.234], si ottiene direttamente la formula (1) come limite della distribuzione binomiale, anche nel caso $k \geq 1$. Un altro approccio si trova nel libro di Piazza [Pia, p.98]: l'autore sfrutta l'assunzione $k << n$ per effettuare alcune approssimazioni e tramite queste ricavare, poi, la formula (1). I passi sono essenzialmente due:

- $\dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \simeq n^k$
- $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \simeq \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n}$

La convergenza in legge
Nei materiali per lo studente mostriamo che il limite delle distribuzioni discrete binomiali di parametro n (numero di prove) per $n \to \infty$ nell'ipotesi $\lambda = np$ costante tende alla distribuzione di Poisson di parametro λ.
Precisamente detta X la variabile aleatoria di Poisson di parametro λ si ha, per $k = 0, 1, 2, 3, ...$

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = P(X = k) \tag{2}$$

nell'ipotesi $\lambda = np$ costante; ossia la distribuzione definita in (1).

Possiamo esprimere tale risultato anche in termini di una particolare convergenza di successioni di variabili aleatorie. Vediamo in che senso, per farlo introduciamo prima alcuni termini ed enunciamo un risultato di validità generale sulla convergenza di variabili aleatorie.

Definizione 3.2. *Sia $F_n(x)$ la funzione di ripartizione della generica variabile aleatoria X_n della successione $\{X_n\}$ e sia $F(x)$ la funzione di ripartizione di X. Allora si dice che la successione $\{X_n\}$* ***converge in legge*** *(o in distribuzione) a X se in ogni punto di continuità x di $F(x)$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Tale convergenza si indica spesso con la notazione $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Ricordiamo che se X è una variabile aleatoria discreta o continua, la funzione di ripartizione di X è la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definita da

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Chiariti i termini possiamo dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 3.3. *Se X_n è una successione di variabili aleatorie a valori interi positivi allora*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

se e solo se $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ per $k = 0, 1, 2, ...$

Dimostrazione. $X, X_1, X_2, X_3, ...$ sono a valori interi positivi, perciò i punti di continuità della funzione F di ripartizione della variabile aleatoria X sono tutti i numeri reali tranne al più gli interi positivi; quindi, poiché i punti della forma $k+\frac{1}{2}$ sono di continuità per F per ogni intero $k \geq 0$, se $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si ha:

$$P(X_n = k) = F_n\left(k+\frac{1}{2}\right) - F_n\left(k-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} F\left(k+\frac{1}{2}\right) - F\left(k-\frac{1}{2}\right) = P(X=k)$$

Viceversa se $P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X=k)$ per ogni $k = 0,1,2,3,...$
allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X=k) = P(X \leq x) = F(x)$$

dove con il simbolo $\lfloor x \rfloor$ si indica la parte intera di x. □

Abbiamo così tutti gli elementi che servono per formulare il risultato di convergenza nel caso particolare che stiamo esaminando.

Proposizione 3.4. *Sia $S_n \sim B(n, \lambda/n)$ allora la successione $\{S_n\}$ converge in legge alla variabile aleatoria $X \sim Po(\lambda)$, ossia:*

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Dimostrazione. È conseguenza diretta della proposizione 3.3 e di (2). □

La regola di de l'Hôpital sui naturali

Nel secondo passo della dimostrazione di convergenza che proponiamo nei materiali per gli studenti utilizziamo il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \tag{3}$$

In realtà l'enunciato del teorema fa riferimento a funzioni definite su un intervallo reale, mentre noi consideriamo il limite di una successione.
Però, possiamo osservare che il procedimento adottato è lecito come si può dedurre dai seguenti enunciati, la cui dimostrazione esula dai nostri scopi[6].

Teorema 3.5 (di de L'Hôpital)**.** *Siano f, g due funzioni, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ tali che:*

i) $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$ *oppure* $+\infty, -\infty$

ii) *f, g derivabili in (a,b) e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$*

iii) $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ *($L \in \mathbb{R}$ oppure $L = +\infty, -\infty$).*

Allora

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Le stesse conclusioni valgono se $x \to b_-$.

[6]Per gli interessati la dimostrazione degli enunciati si può trovare, per esempio, nel testo [PagSal], rispettivamente a pagina 305 (e segg.) e a pagina 187.

Proposizione 3.6. *Sia f una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Allora si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e solo se, per ogni successione $\{a_n\}$ a valori in $X - \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

4 La distribuzione di Poisson

4.1 Facciamo il punto

a) Aspetti didattici

In questo paragrafo sintetizziamo i contenuti fin qui discussi nel percorso e li presentiamo in una forma adeguata per lo studente della classe quinta di un Liceo Scientifico.
Vogliamo che i ragazzi dispongano di essi, anche a lungo termine, d'altronde l'insieme delle attività è stato progettato anche a tal fine. E in particolare vorremmo che, dopo averli interiorizzati, siano in grado di esporli consapevolmente in una forma analoga a quella proposta. Il ruolo di tali contenuti è evidenziato anche graficamente mediante un riquadro rosso che li racchiude.

Osserviamo ancora una volta che la formalizzazione è un traguardo intermedio del percorso, non il punto il partenza.
D'altro canto tale approccio didattico alle questioni non è quello che è stato seguito spesso anche storicamente nello sviluppo della matematica?

b) Approfondimenti teorici - una legge empirica

Per il docente osserviamo che l'affermazione secondo cui l'approssimazione della binomiale alla Poisson è accettabile per $np \leq 10$ e $n > 50$, è di tipo empirico. D'altronde non abbiamo precisato cosa intendiamo per approssimazione *accettabile*. In letteratura si trovano anche condizioni diverse da quelle indicate (ma non troppo, ad esempio alcuni autori propongono la condizione $n > 100$ al posto della condizione $n > 50$); noi seguiamo [Cic, p.84].

4.2 Significato geometrico del parametro - attività con GeoGebra

È questa la prima di due attività laboratoriali che si prestano ad essere condotte efficacemente mediante il software GeoGebra (file *PoissonBinomiale.ggb*).

Intendiamo investigare sul significato geometrico del parametro λ che caratterizza la distribuzione di Poisson.
Ciò è in linea con quanto espressamente raccomandato nel Syllabus per l'Esame di Stato proposto dall'UMI-CIIM [UMI-CIIM]:

"*Variazione delle distribuzioni binomiale e di Poisson al variare dei loro parametri*",

come abbiamo già visto nel capitolo 1.
Comunque, al di là di tale interesse specifico, operare sul grafico, cioè sull'*intera* distribuzione, contribuisce a rafforzare negli studenti l'idea del carattere di unitarietà della distribuzione. Così si guidano gli studenti a svincolare l'attenzione dai singoli valori di probabilità per passare a considerare l'**oggetto matematico** distribuzione che li descrive sinteticamente.

Tali intenti si realizzano in modo più pieno quando sono perseguiti mediante **attività esplorative**.

Allo scopo è particolarmente adatto il software GeoGebra: esso dispone dello strumento slider che consente di osservare in modo dinamico e diretto come varia il grafico della distribuzione al variare del suo parametro. Invece altri software, quali Excel, pur utili in generale anche in ambito didattico, sono più rigidi e non permettono di effettuare manipolazioni altrettanto immediate ed efficaci.
In generale l'uso di **strumenti informatici** per prendere confidenza con alcuni concetti matematici, è espressamente richiesto nelle Linee generali di [IndNaz2]:

"*gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. (...) Lo studente diverrà familiare con gli strumenti informatici, al fine precipuo di rappresentare e manipolare oggetti matematici*".

D'altro canto lo stesso documento ricorda di esaminare anche i **limiti** di tali strumenti.

"*L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un modo automatico di risoluzione dei problemi* (...)".

Ad esempio, le prove effettuate, per quanto numerose, non costituiscono una dimostrazione. Piuttosto i risultati ottenuti si possono giustificare mediante gli indici della distribuzione di Poisson, ma ci occuperemo di questo nei paragrafi successivi.

L'attività permette, comunque, di sviluppare altre importanti competenze quali formulare **congetture**, **interpretare** grafici nonché passare da una **forma di rappresentazione** all'altra (dai grafici al linguaggio naturale).

> *Modalità di utilizzo dei materiali*
> Per focalizzare l'attenzione sui contenuti, conviene fornire agli studenti direttamente il file *PoissonBinomiale.ggb*, già predisposto.
> I ragazzi sono invitati a servirsene per condurre l'attività di esplorazione in modo autonomo e individuale, confrontando le risposte con quelle fornite nel foglio di lavoro. Proprio tale riferimento scritto, consente di proporre l'attività come compito da svolgere a casa.

4.3 Convergenza della binomiale - attività con GeoGebra

Anche questa attività è basata sull'utilizzo del file GeoGebra *PoissonBinomiale.ggb*.
L'intento, in questo caso, è diverso: è investigare sulla convergenza della distribuzione binomiale alla Poisson, ma la modalità di lavoro è ancora di tipo operativo-sperimentale.

L'attività è più articolata, pertanto il file prevede un uso più ricco. In primo luogo viene rappresentato anche il grafico delle distribuzioni binomiali, oltre a quello della distribuzione di Poisson. Il tutto è regolato da uno slider che controlla il parametro n, ossia il numero di prove[7]. In secondo luogo il file è dotato di una finestra "Foglio di calcolo" che mostra i valori assunti dalle due distribuzioni e lo scarto fra essi. Dunque l'analisi precedente viene integrata, introducendo l'ulteriore **punto di vista numerico** e si concretizza nella richiesta di interpretare dati numerici, non solo figure.

[7] Il parametro p, invece, resta univocamente determinato, una volta fissato n, dalla relazione $\lambda = np$.

Prima di procedere, è opportuno discutere alcuni aspetti dei quesiti proposti.
Il primo quesito volutamente si differenzia dal successivo e da quelli proposti nella precedente attività, dato che è di tipo **quantitativo**. Non vogliamo, infatti, ingenerare la convinzione errata che non si possa effettuare un'analisi precisa di tale convergenza.
La seconda richiesta, invece, non ammette risposta univoca visto che non viene precisato cosa si intende per "buona approssimazione". Pertanto i valori proposti come risposta vanno intesi come valori *indicativi*; per determinarli abbiamo adottato il criterio seguente: ogni scarto tra i corrispondenti valori di probabilità nei due modelli deve essere minore di 0,01.
I valori più piccoli del parametro n per cui è verificata tale condizione sono:
- per $\lambda = 2$, vale per $n = 29$
- per $\lambda = 10$, vale per $n = 71$
- per $\lambda =$0,1 , vale per $n = 1$
- per $\lambda = 100$, vale per $n = 278$

Modalità di utilizzo dei materiali
È esattamente analoga all'attività precedente.

5 Non solo calcoli

Gli esercizi[8] che proponiamo a questo punto, non richiedono semplicemente di effettuare dei calcoli, ma sono uno strumento per verificare e autovalutare la comprensione nonché per **consolidarla**. Pertanto rappresentano la base dei vari aspetti che fin qui hanno caratterizzato il percorso, sulla quale poggiare la risoluzione di questioni più articolate e ricche.

1. **Errori di stampa**

   Si tratta di un esercizio-guida, che costituisce, assieme all'esempio del centralino, un riferimento per la risoluzione dei problemi successivi.

   Per evitare che l'attenzione sia rivolta esclusivamente agli aspetti di calcolo non si richiede di fornire un singolo valore di probabilità, bensì di costruire di un **modello** che descriva adeguatamente la situazione.
   In quest'ottica nella risoluzione prestiamo ancora una volta attenzione all'analisi delle **ipotesi** da assumere affinché abbia senso schematizzare il problema tramite la distribuzione binomiale o di Poisson. Inoltre, confrontiamo i due modelli esaminando gli scarti tra i corrispondenti valori di probabilità: essi sono "vicini", come d'altronde potevamo aspettarci dato che il numero di prove è "grande" e la probabilità di realizzazione dell'evento *errore di stampa* è "piccola". Ancora una volta rileviamo che per costruire il modello si devono prendere delle **decisioni**. Ad esempio, assumiamo che la probabilità di compiere un errore di stampa sia la stessa per ogni parola; tuttavia tale ipotesi, per quanto ragionevole, resta una *nostra scelta*, tra le altre possibili: non è una verità assoluta.

2. **Dall'Esame di Stato del Liceo Scientifico**

   Si tratta di due quesiti assegnati nella prova suppletiva e nella seconda simulazione ministeriale della prova scritta di matematica dell'Esame di Stato dell'anno scolastico 2014/15.

   Sono sostanzialmente analoghi, ma la loro formulazione diversa: nel primo si richiede esplicitamente di utilizzare sia il modello binomiale che quello di Poisson; nel secondo, invece, non si precisa a quale distribuzione fare ricorso, ma nel contempo non si dettaglia nemmeno la situazione. Pertanto, il quesito non ammette una risposta univoca. Probabilmente non era questa l'intenzione degli estensori della prova: la risoluzione "ufficiale" comparsa sul sito del ministero[9], propende, senza ulteriori commenti, per il modello di Poisson.
   Invece, sarebbe più significativo richiedere allo studente di esplicitare le ipotesi da assumere affinché abbia senso schematizzare la situazione mediante il modello da lui proposto. Altrimenti la richiesta si riduce banalmente ad un'applicazione acritica di una formula, in evidente contraddizione con le Indicazioni Nazionali, che ribadiscono a più riprese la centralità della modellizzazione nella pratica didattica.

[8] Cercheremo, per quanto possibile, di distinguere tra esercizio e problema nel senso ben indicato da B. D'Amore in [DAm, p.284]: "*Si ha un **esercizio** quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se non ancora in corso di consolidamento. (...) Si ha invece un **problema** quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore. (...) Non è il testo in sé a costituire un esercizio o un problema, ma un complesso legato a situazioni didattiche, capacità individuali e mille altri fattori, tra i quali l'intenzione didattica del proponente ed il livello scolastico.*"

[9] Essa si può trovare all'indirizzo http://questionariolsosa.miur.carloanti.it/pdf/2014-2015/matematica2-soluzioni.pdf.

3. **Nascite all'ospedale "Alto Vicentino"**

   Il problema che abbiamo ideato ci sembra particolarmente significativo perché si basa su **dati reali** riguardanti le nascite giornaliere, nel corso del 2015, all'ospedale "Alto Vicentino" di Santorso (VI). Questi ci sono stati forniti, a scopi didattici, dall'Ulss 4 del Veneto.

   L'intento non è tanto quello di mostrare la potenza del modello di Poisson nell'effettuare previsioni, ma quello di presentare la richiesta in un contesto che non sia "artificiale", costruito ad hoc per il problema e dunque slegato della realtà.
   La necessità didattica di proporre questioni di tale tipo è ben descritta in [Fre, p.97] che riporta una ricerca svolta dal gruppo "Elémentaire dell'IREM (Institut de la Recherche sur l'Einseignement Mathématique) di Grenoble su alcuni alunni di 7-8 anni.

   "*Il gruppo ha formulato la domanda: su una nave ci sono 26 pecore e 10 capre. Qual è l'età del capitano? Su 97 scolari CE 1-2 (Cycle élémentaire 1-2), di 7-8 anni, 76 riuscirono a trovare*[10] *l'età del capitano sulla base dei dati forniti dal problema.*"

   Ad esempio, sommando il numero di pecore e quello delle capre...

   Le origini del problema vanno ricercate, secondo l'autore, nella frattura tra mondo reale e contesto di molte questioni di matematica che si affrontano a scuola: gli esercizi che si trattano in classe hanno quasi sempre soluzione, essa è univocamente determinata dai dati e questi sono solo quelli strettamente necessari a fornire la risposta. Così molti studenti sono indotti a pensare che le questioni che si affrontano a scuola siano altra cosa rispetto a quelle reali.
   Come ovviare a tale frattura? Secondo Freudenthal si devono "*creare, rinforzare e mantenere i legami con la realtà*" attraverso **contesti ricchi**, ovvero "*domini di realtà proposti agli studenti per essere matematizzati*" [Fre, p.103].
   L'attività sulle nascite che qui proponiamo si colloca proprio in questa direzione, prospettando un contesto ricco, nel senso appena delineato.

   Oltre a ciò, essa risulta ancora più efficace se si basa su dati relativi all'ospedale della zona da cui provengono gli studenti, che possono essere *coinvolti direttamente* nella ricerca dei dati.
   In ciò siamo confortati da quanto scrive B. D'Amore in [DAm, p.293]. Innanzitutto egli chiama una questione come quella proposta nel paragrafo 3.5.3 *problema reale con dati mancanti ma rintracciabili (p.r.)*. E poi precisa: *"Alla base di sollecitazioni di tipo p.r. è bene che compaiano attività che in qualche modo la classe è motivata a compiere. (...) Ciascun componente della classe collabora secondo le proprie possibilità (...) ed alla fine il risultato è positivo, si giunge cioè alla risoluzione del problema."*

4. **Aspetti algebrici**

   Questo è un esercizio diverso dai precedenti: richiede di **manipolare** l'espressione analitica della distribuzione di Poisson **in vista dell'obiettivo** di ricavare la relazione ricorsiva che abbiamo utilizzato fin dal paragrafo 3.3.1.

[10] n.d.r. Con ciò si intende più precisamente che gli scolari hanno fornito un numero che nelle loro intenzioni doveva rappresentare l'età del capitano. Naturalmente sappiamo, invece che i dati non sono sufficienti per determinare tale valore.

Si tratta, in sostanza, della richiesta **inversa** rispetto a quella proposta in precedenza allo scopo di mostrare come utilizzare operativamente la relazione ricorsiva che caratterizza la distribuzione di Poisson. Riteniamo che tale approccio, ossia l'esaminare una relazione da più punti di vista, sia interessante anche in altri contesti e permetta una comprensione più **profonda** delle relazioni ottenute.

Altre interessanti situazioni da cui prendere spunto per costruire quesiti sulla distribuzione di Poisson si trovano nel testo [Wol]. Ad esempio a pagina 141 è proposto il contesto della distribuzione di malattie rare in una determinata regione.

Modalità di utilizzo dei materiali
L'esercizio guida, relativo agli errori di stampa, conviene sia discusso con gli studenti mediante una lezione partecipata.
Gli altri esercizi, invece, possono essere assegnati per il lavoro autonomo anche a casa, visto che sono completamente risolti.
Con ciò non intendiamo però sostenere che i quesiti proposti esauriscono le attività di consolidamento che ogni docente, a seconda delle esigenze didattiche e della classe, assegna agli studenti.

6 Applicazioni

A questo punto del percorso gli studenti dovrebbero aver acquisito familiarità con la distribuzione di Poisson, pertanto possono apprezzare le più impegnative e ricche attività che seguono. Esse prevedono il ricorso a tale modello probabilistico per fare affermazioni significative sulla situazione in esame o per effettuare previsioni.
Tali attività, come vedremo, sono legate a situazioni *reali*, ma a questo proposito osserviamo che, come sostiene B. D'Amore in [DAm, p.286], "*si è anche sviluppato un grande dibattito internazionale sul significato dell'aggettivo reale, quando si afferma che le situazioni problematiche devono trarre spunto dalla vita reale. (...) Su queste supposte necessità molti hanno espresso dubbi.*"

Le indichiamo con il termine *applicazioni*, lo stesso utilizzato nel Syllabus dell'UMI-CIIM [UMI-CIIM]. Con questo, però, non vogliamo sostenere che è opportuno separare la "teoria" dalla "pratica", quasi siano due campi distinti. Anzi, come abbiamo mostrato nelle altre sezioni del percorso, questi due aspetti dovrebbero intrecciarsi opportunamente (ad esempio mediante attività laboratoriali guidate) così da favorire la costruzione di senso da parte degli studenti.

6.1 Bombe su Londra - video

Questa è la prima situazione, tra quelle che discutiamo nel capitolo, che si presta ad essere affrontata mediante un video. Analizzeremo, nello specifico, il video *Bombe su Londra* nel capitolo 4; per ora osserviamo che esso riguarda una **situazione storica**[11] della Seconda Guerra Mondiale: il bombardamento tedesco della città di Londra, effettuato con le potenti bombe V-1.
Il materiale è suddiviso in due parti: nella prima descriviamo la situazione, mentre nella seconda mostriamo come il modello di Poisson abbia permesso di affermare se il bombardamento potesse essere mirato o meno.

Per rimarcare il carattere storico della questione, facciamo ricorso anche a **foto d'epoca** e mostriamo un lavoro degli anni immediatamente successivi: l'**articolo** [Cla], scritto dall'attuario *R.D.Clarke* nel 1946.
In quest'ottica, la domanda sulla "uniformità" del bombardamento non è un'astratta questione matematica, ma il problema che *effettivamente* si ponevano gli inglesi all'epoca, preoccupati che i tedeschi avessero sviluppato una tecnologia così avanzata da riuscire a colpire bersagli con una precisione mai vista in precedenza.
Tale approccio è pienamente coerente con la richiesta di **interdisciplinarità** promossa nelle Indicazioni Nazionali [IndNaz2]:

"*Istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia*".

Tuttavia l'interesse del video non si esaurisce certo nell'attenzione agli aspetti storici. Infatti in esso mostriamo anche come esercitare l'importante competenza dell'**argomentare**. Precisamente seguiamo il seguente schema logico: assumiamo come ipotesi che il bombardamento sia uniforme (ovvero non mirato), quindi costruiamo un opportuno modello di Poisson che descrive il bombardamento. Se, come vedremo, lo scostamento tra le previsioni fornite dal modello e i dati osservati risulta piccolo, si

[11] Per approfondire può essere utile il video https://www.youtube.com/watch?v=MCdlBc___3kg.

conclude che il modello è coerente con la situazione e quindi l'ipotesi del bombardamento uniforme **non** va **rifiutata**. Ossia, che l'ipotesi del bombardamento uniforme è *plausibile*.

Modalità di utilizzo dei materiali
Il video *Bombe su Londra* può essere assegnato come lavoro autonomo, magari a casa, ma va poi discusso in classe.
Esso costituisce un significativo riferimento anche per le altre attività che proponiamo in questa sezione; pertanto ne consigliamo la visione prima di affrontarle.
Questo materiale si può utilmente integrare con l'attività *Simulazione di eventi "rari"* basata sul file GeoGebra *Simulazione.ggb*, che simula il bombardamento di Londra. Esso consente allo studente di trasformarsi da spettatore a sperimentatore in prima persona. Così le due attività si completano a vicenda e risultano, nell'insieme, didatticamente efficaci.

6.2 Un esperimento storico: il decadimento radioattivo - attività

L'attività è strutturata secondo lo schema *lettura-quesiti-risoluzione*. Ossia prevede un testo iniziale che illustra sinteticamente il fenomeno della radioattività; ad esso seguono dei quesiti che hanno l'intento di guidare lo studente a fare delle affermazioni sul fenomeno e, in particolare, a investigare se le emissioni avvengono in modo "casuale" e uniforme (ossia regolare e indipendente).

Anche in questa attività, come nel video *Bombe su Londra*, scegliamo di **contestualizzare storicamente** la situazione. Per farlo citiamo esplicitamente il testo [RutChaEll, p.171] che riporta la descrizione dell'**esperimento** storico di Rutherford e Geiger del 1910 e, in particolare, i dati sulle emissioni radioattive rilevate.
Ancora una volta la questione di fondo sottesa ai quesiti non è un'astratta richiesta di tipo matematico, ma la domanda che si ponevano all'epoca i fisici. E per di più il ricorso al modello di Poisson è stato suggerito effettivamente dal matematico Bateman.

Nei quesiti chiediamo essenzialmente un confronto di tipo qualitativo, alcuni testi universitari (ad esempio Cerasoli e Tomassetti, in [CerTom, p.55 e segg.]) propongono invece anche un confronto più rigoroso, condotto mediante il test χ^2.

L'attività promuove lo sviluppo di competenze fondamentali, quali l'**interpretare** un **testo** e dei **dati numerici**, l'**argomentare** le proprie affermazioni anche mediante il confronto con situazioni analoghe[12] e il **comunicare** i risultati della propria analisi nel linguaggio naturale.

Modalità di utilizzo dei materiali
Il foglio di lavoro è ideato per consentire l'attività autonoma dello studente che ha la possibilità di confrontare le proprie risposte con la risoluzione proposta.
Consigliamo di affrontare la questione solo dopo aver analizzato il video *Bombe su Londra*, visto anche che ad esso ci si riferisce esplicitamente nei quesiti.

[12] Un interessante parallelismo tra il bombardamento su Londra e il "bombardamento radioattivo" si trova in [DMar].

6.3 Prevedere il numero di vincitori al SuperEnalotto - attività

L'attività è strutturata in modo del tutto analogo alla precedente, anch'essa secondo lo schema *lettura-quesiti-risoluzione*, ma è collocata in un contesto molto diverso: uno dei giochi d'azzardo più diffusi.
Scegliamo di proporre un'attività riguardante il SuperEnalotto, per varie ragioni.

Perché i giochi? Le motivazioni sono diverse. In primo luogo essi costituiscono, già di per sé, dei modelli: rappresentano una realtà semplificata, in cui le **regole** possono essere considerate come le ipotesi del modello.
Questa è anche una delle ragioni per cui, **storicamente**, la probabilità come disciplina matematica, nasce proprio nel contesto dei giochi d'azzardo. Famosa è stata la disputa tra B. Pascal e P. de Fermat riguardante il gioco ideato dal Chevalier de Méré[13].
In secondo luogo l'argomento stimola l'interesse dei ragazzi, ma ha anche una forte **rilevanza sociale**. L'articolo [LeSci], riporta gli esiti dello studio ESPAD®Italia 2014:

"*La percentuale di studenti di 15-19 anni che giocano d'azzardo è passata dal* 47% *del 2009-2011 al* 39% *del 2014 e si è anche ridotta la quota di studenti-giocatori con un profilo definito a rischio o problematico*".

Questo, secondo gli autori, grazie anche allo studio dei giochi in ambito matematico e a progetti come "Fate il nostro gioco: campagna di informazione sulla matematica del gioco d'azzardo", che nasce da una mostra itinerante basata proprio sui giochi d'azzardo e "Bet On Math: prevenire l'abuso del gioco d'azzardo con la matematica" del Politecnico di Milano.
Il problema, comunque, è complesso e va affrontato trasversalmente, non solo in matematica e non certo con un solo gioco.

L'intento dell'attività è valutare la "bontà" del modello di Poisson per effettuare previsioni nelle varie categorie in cui si articola il gioco. In effetti vedremo che nella categoria "4" il modello non permette di prevedere il numero di vincitori. Detto questo, intendiamo collocare anche questa indagine in un "**contesto ricco**".
Per questo i **dati** cui facciamo riferimento sono ricavati dal sito della Sisal (www.sisal.it/superenalotto), l'ente che gestisce il gioco per conto del ministero e per lo stesso motivo consideriamo dei dati relativamente recenti: quelli dei concorsi del mese di febbraio 2016.

La categoria "4" merita qualche considerazione aggiuntiva. Innanzitutto perché le domande che proponiamo al riguardo sono sia di tipo qualitativo (*il modello ti sembra coerente con le osservazioni?*), che **quantitativo** (*per quanti valori di k la probabilità che vi siano k vincitori è maggiore di 0,01?*). Vogliamo, in questo modo, fondare l'analisi del modello anche su stime numeriche e non solo sull'osservazione, essenzialmente qualitativa, che lo scarto tra valori previsti e valori osservati è "piccolo".
In questa categoria, il modello fornisce molti valori di probabilità maggiori di 0,01. Essi sono troppo dispersi per effettuare una previsione. Per questo è interessante, anche, proporre di passare dall'analisi del numero di vincitori a quella di classi di vincitori. Per esempio qual è la probabilità di avere dai 250 ai 500 nella categoria "4"?

[13] Per approfondire la questione riguardante lo sviluppo storico della probabilità può essere interessante fare riferimento a [Bar].

Modalità di utilizzo dei materiali
L'attività può essere svolta in maniera analoga alla precedente.

6.4 Simulazione di eventi "rari" - attività con GeoGebra

L'attività con GeoGebra, basata sul file *Simulazione.ggb*, è ideata per simulare il bombardamento analizzato nel video *Bombe su Londra.* La modalità di utilizzo del file è spiegata in modo espressivo nel video *Simulazione bombardamento*, ma è anche sintetizzata per iscritto in un foglio di lavoro che illustra, in forma di lettura, il contesto storico e i dati osservati durante la Seconda Guerra Mondiale.
L'indagine che lo studente deve compiere è guidata da alcuni quesiti.

In questo contesto lo **strumento informatico** si rivela particolarmente utile perché permette di effettuare molti bombardamenti simulati in tempi ragionevolmente brevi e questo consente di trarre conclusioni significative.
Inoltre il file GeoGebra è ricco perché permette di rappresentare i dati in varie forme: la finestra che contiene la griglia mostra le esplosioni, il foglio di calcolo riporta i dati derivanti dalla simulazione e quelli calcolati mediante il modello di Poisson; la finestra Grafici 2, inoltre, visualizza l'istogramma che li confronta. Gli studenti, quindi, sviluppano mediante l'attività la competenza di **interpretare** dati numerici e l'abilità di passare rapidamente dal punto di vista numerico a quello grafico e viceversa.

Modalità di utilizzo dei materiali
Il file *Simulazione.ggb* e il video di istruzioni *Simulazione bombardamento* sono ideati per permettere allo studente di svolgere in modo autonomo l'attività, magari a casa.
Suggeriamo di considerare la simulazione solo dopo aver analizzato il video *Bombe su Londra.* Comunque la lettura introduttiva rende l'attività indipendente dal video.

7 Indici della distribuzione - attività

a) Aspetti didattici

Decidiamo di ricavare gli indici della distribuzione di Poisson mediante un percorso guidato. Introduciamo brevemente la questione illustrando l'obiettivo dell'attività e il modo in cui intendiamo procedere. Analizziamo nel dettaglio il procedimento per determinare il valore atteso. Poi svolgiamo esplicitamente, come **esempio**, il calcolo del valore atteso, mentre la determinazione della varianza viene lasciata allo studente.

Come l'attività "Dalla binomiale alla Poisson", anche questa sviluppa l'abilità di **interpretare** un testo matematico e quella di **utilizzare** ciò che lo studente già sa allo scopo di imparare cose nuove.
Più trasversalmente offriamo allo studente la possibilità di prendere **consapevolezza** delle proprie conoscenze e competenze mediante un'attività di tipo **metacognitivo**.
L'importanza e il ruolo di tale riflessione nella didattica e nella formazione è discusso autorevolmente da R. Zan, ad esempio, in [Zan10, p.6], dove si legge:

"*La ricerca sulla risoluzione di problemi (di qualsiasi tipo) ha messo in luce che il bravo solutore di problemi è caratterizzato da un'abilità di carattere trasversale rispetto alle conoscenze necessarie per risolvere un problema specifico: l'abilità nel gestire tali conoscenze. Questa abilità, detta metacognitiva, si articola in due momenti distinti anche se correlati:*
- la consapevolezza delle proprie risorse
- l'attivazione di strategie per ottimizzare tali risorse (i cosiddetti processi di controllo)".

Infine, osserviamo che l'interpretazione probabilistica di λ come valore atteso e varianza permette di giustificare l'interpretazione geometrica dello stesso parametro che avevamo analizzato nell'attività discussa nel paragrafo 2.4.2.
Con ciò abbiamo seguito ancora l'indicazione dell'UMI-CIIM [UMI-CIIM] di investigare il ruolo dei parametri delle distribuzioni.

Modalità di utilizzo dei materiali
L'attività è ideata per consentire il lavoro autonomo e individuale dello studente, ma per le classi più deboli può essere conveniente considerarla un approfondimento per alcuni studenti.

b) Approfondimenti teorici - indici della distribuzione di Poisson

Per lo studente, preferiamo non svolgere la dimostrazione formale del fatto che il valore atteso e la varianza sono pari a λ, perché essa richiede l'utilizzo del concetto di serie, non familiare per la maggior parte degli studenti e anche perché è già didatticamente significativa la giustificazione fornita sfruttando l'approssimazione con la binomiale.
Per il docente è comunque interessante la proposizione che segue.

Proposizione 7.1. *Sia X la variabile aleatoria che ha distribuzione di Poisson di parametro λ.*
Allora il valore atteso di X e la varianza di X sono uguali a λ, ossia:

$$E[X] = V[X] = \lambda$$

Dimostrazione. Dalla definizione di valore atteso e dall'espressione analitica della distribuzione di Poisson, si ha:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} \tag{4}$$

Ora si consideri la serie in parentesi: essa ricorda lo sviluppo in serie della funzione esponenziale; pertanto puntiamo a ricondurla ad essa. Iniziamo allora con lo scrivere lo sviluppo della funzione esponenziale e^x in serie di potenze, per $x = \lambda$.

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Proseguiamo osservando che si può omettere il termine della serie relativo a $k = 0$, dato che da contributo nullo. Pertanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) \cdot \lambda = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \cdot \lambda = e^{\lambda} \cdot \lambda$$

Da cui sostituendo in (4) si conclude:

$$E[X] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} = \lambda$$

Per quanto riguarda la varianza iniziamo da $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda}$$

Proseguiamo esprimendo k^2 nella forma $k(k-1) + k$; e seguiamo un procedimento analogo a quello utilizzato per determinare il valore atteso:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + k] \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = \\ &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \right) \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} + \lambda = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} + \lambda = e^{\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} + \lambda = \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Pertanto concludiamo che:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

□

Abbiamo così determinato $E[X]$ e $V[X]$ dove X è la variabile aleatoria di Poisson di parametro λ.

Agli studenti, però, proponiamo un approccio più diretto: l'idea sottesa è che, nell'ipotesi $\lambda = np$ costante, se

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X \text{ [14]}$$

allora

$$E(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(X) \tag{5}$$

e analogamente per $V[X]$.
Vogliamo osservare che questo approccio è concettualmente lecito poiché *dalla sola convergenza puntuale delle distribuzioni binomiali alla distribuzione di Poisson, si può dedurre la convergenza dei valori attesi (varianze) al valore atteso (varianza) della Poisson.*
Dimostreremo questo fatto nell'appendice A utilizzando un risultato sulle serie che si ottiene applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue nello spazio di misura costituito dalla misura del conteggio.

[14] Con tale scrittura intendiamo che la distribuzione di S_n tende puntualmente alla distribuzione di X per $n \to \infty$ nell'ipotesi $\lambda = np$ costante. Come visto nelle proposizioni 3.3 e 3.4, ciò è equivalente a dire che la succesione delle variabili aleatorie binomiali S_n converge in legge alla variabile di Poisson X.

Riferimenti bibliografici

Riferimenti relativi alla didattica

Siti

[CProb] *Corso di formazione in didattica della probabilità – DiCoMat Lab in collaborazione con IPRASE*
URL: http://www.iprase.tn.it/formazione/formazione-docenti-e-dirigenti/corsi/didattica-della-probabilita-per-la-secondaria-di-secondo-grado/

[DCMLab] *Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica, Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Trento*
URL: http://r.unitn.it/it/maths/dicomatlab
Canale YouTube del DiCoMat Lab
URL: https://www.youtube.com/channel/UCcUoK3gxJDNEcUhDrzUuHgw

[IndNaz1] *Indicazioni nazionali per il curricolo del primo ciclo di istruzione*, 2012.
URL: http://www.indicazioninazionali.it/J/

[IndNaz2] *Indicazioni nazionali per il secondo ciclo di istruzione*, 2010.
URL: http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html

[UMI-CIIM] UMI-CIIM, *Proposta di un Syllabus di matematica per i Licei Scientifici (nuovo ordinamento)*, 2014.
URL: http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

[Zan10] *L'errore in matematica: alcune riflessioni*, 2010.
URL: http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/lerrore-in-matematica-alcune-riflessioni/

Testi

[Anz] Anzellotti G. (2011). "*Valutazione e sviluppo delle competenze matematiche di base dall'obbligo scolastico all'ingresso dell'università*", RicercAzione, vol. 3, n. 1.

[AnzCapInn] Anzellotti G., Cappello L., Innocenti S. (2005). "*Matematica: obiettivi, itinerari, interpretazioni*", Nuova Secondaria, vol. 23, n. 1, pp. 91-97.

[Bar] Barra M. (2016). "*Parliamo di probabilità e del suo insegnamento*", Progetto Alice, vol. 17, n. 49, p. 5 e seguenti.

[ConCl] Consiglio di classe 5BSA (2016). "*Documento del Consiglio di Classe 5BSA*", Liceo Ginnasio Statale "B. G. Brocchi" di Bassano del Grappa (VI).

[DAm] D'Amore B. (1999). "*Elementi di didattica della matematica*", Pitagora.

[Fre] Freudenthal H. (1994). "*Ripensando l'educazione matematica*", Edizioni La Scuola.

[Lang] Lang S. (1991). "*La bellezza della matematica*", Bollati Boringhieri.

[ParEu] Parlamento Europeo (2006). "*Raccomandazione del parlamento europeo del 18 dicembre 2006*".

[Pel] Pellerey M. (2015). "*Le competenze cosa sono*", L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 38, n. 5.

[Sfa] Sfard A. (2009). "*Psicologia del pensiero matematico*", Edizioni Erickson.

[Zan07] Zan R. (2007). "*Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*", Edizioni Springer.

Libri di testo in adozione

[BerTriBar] Bergamini M., Trifone A., Barozzi G. (2011). "*Matematica.blu.2.0*", Volume 5, Zanichelli.

[BarManFra] Baroncini P., Manfredi R., Fragni I. (2012). "*Lineamenti.Math.blu*", Volume 5, Ghisetti e Corvi.

[MarPal] Maraschini W., Palma M. (2002). "*MultiForMat*", Probabilità e inferenza statistica, Paravia.

[Sas] Sasso L. (2016). "*La matematica a colori*", Edizione blu per il quinto anno, Petrini.

Riferimenti relativi al calcolo delle probabilità o affini

Siti

[DMar] De Martini G. (2007). "*Un problema di... bombardamento*", Progetto Lauree Scientifiche-Matematica.
URL: http://www.dma.unina.it/laureescientifiche/materiale/II%20anno/modelli%20II%20anno/ModMatSocLez14e22-03-07.pdf

[GriSne] Grinstead C.M., Snell J.L. (1997). "*Introduction to probability*", AMS.
URL: http://www.dartmouth.edu/ chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/pdf.html

[LeSci] Le Scienze (2015). "*CNR: Adolescenti d'azzardo: più prevenzione, meno giocatori*", Comunicato Stampa 13 marzo 2015.
URL: http://www.lescienze.it/lanci/2015/03/13/news/cnr_adolescenti_d_azzardo_piu_prevenzione_meno_giocatori-2525314/

Testi

[Bal] Baldi P. (2012). "*Introduzione alla probabilità*", McGraw-Hill, Seconda Edizione.

[Bon] Bonaccorsi S. (2004). "*Appunti di probabilità*", dispensa del corso "Calcolo delle probabilità".

[Bre] Brezis H. (1995). "*Ananlisi Funzionale*", Appendice sull'integrazione astratta di Sbordone C., Liguori Editore.

[CerTom] Cerasoli M., Tomassetti G. (1989). "*La matematica di oggi per domani, Elementi di statistica*", Zanichelli.

[Cla] Clarke R.D. (1946). "*An application of the poisson distribution*", Journal of the Institute of Actuaries, vol. 72, p. 48.

[Cic] Cicchitelli G. (1990). "*Probabilità e statistica*", Maggioli, Prima Edizione.

[DAgl] Dall'Aglio G. (1987). "*Calcolo delle probabilità*", Zanichelli, Prima Edizione.

[Fel] Feller W. (1968). "*An introduction to probability theory and its applications*", Volume 1, Wiley, Terza Edizione.

[Isr] Israel G. (2002). "*Modelli matematici, introduzione alla matematica applicata*", Franco Muzzio Editore.

[PagSal] Pagani C.D., Salsa S. (1990). "*Ananlisi Matematica 1*", Zanichelli, Prima Edizione.

[Pia] Piazza R. (2009). "*I capricci del caso*", Springer.

[Pro] Prodi G. (1992). "*Metodi matematici e statistici*", McGraw-Hill.

[Ros] Rossi C. (1999). "*La matematica dell'incertezza*", Zanichelli.

[RutChaEll] Rutherford E., Chadwick J., Ellis C.D., (2010). "*Radiations from Radioactive Substances*", Cambridge University Press, Seconda Edizione.

[Wol] Wolfson M.M. (2008). "*Everyday Probability and Statistics: Health, Elections, Gambling and War*", World Scientific Publishing Company.

Fonti per le immagini

Siti

[1] URL: https://pixabay.com/it/

[2] URL: https://commons.wikimedia.org/w/

[3] URL: https://it.wikipedia.org/w/

[4] URL: http://www.passionescienza.it/la-radioattivita/

[5] URL: http://www.sisal.it/superenalotto