3 Un nuovo modello

3.1 Il modello

a) Aspetti didattici

Il modello binomiale che abbiamo introdotto per affrontare il problema di conteggio in esame, presenta delle criticità. Di queste intendiamo discutere con gli studenti, coerentemente con quanto prospettano *Linee generali e competenze* in [IndNaz2].
"*Lo studente saprà dominare attivamente:*
(...) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci)
(...) la costruzione e l'analisi di semplici ***modelli matematici***".
Preciseremo nella prossima sezione cosa si intende per modello matematico.
Per ora, sulla base dell'analisi condotta nel paragrafo precedente, puntiamo a costruire un nuovo modello più efficiente di quello binomiale.

Dal punto di vista didattico, preferiamo presentare il procedimento al limite che conduce al nuovo modello in un paragrafo a parte, in modo da non perdere di vista lo sviluppo complessivo del percorso.

Dunque arriviamo presto alle conclusioni, ma invece di fornire direttamente l'espressione analitica della distribuzione

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

preferiamo seguire un **approccio per passi**. Esso si fonda sulle due uguaglianze:

- $P(X = 0) = e^{-\lambda}$
- $P(X = k) = \frac{\lambda}{k} \cdot P(X = k - 1) \qquad \text{per } k = 1, 2, 3, ...$

In sostanza l'idea è di ottenere ogni valore di probabilità della distribuzione a partire dal primo, ($P(X = 0)$) moltiplicando ad ogni passo il valore di probabilità precedente per il fattore λ/k: $P(X = 1)$ si ottiene moltiplicando per $\lambda/1$, $P(X = 2)$ moltiplicando per $\lambda/2$, ...
Così facendo lo studente ha un modo per **ricostruire** la formula anche a **lungo termine**[2]. Non riteniamo certo che possa ricordare la formula (1) fino all'Esame di Stato, tra tutti i contenuti delle diverse discipline.
Del resto lo schema proposto presenta un ulteriore motivo di interesse: è analogo agli schemi che caratterizzano in modo semplice ed espressivo, importanti modelli di crescita. Infatti nella crescita lineare ogni termine successivo al primo si ottiene dal precedente sommando una (stessa) costante e nella crescita esponenziale ogni termine successivo al primo si ottiene dal precedente moltiplicando una (stessa) costante[3].

[2] Ricordiamo che la ricostruzione delle formule a lungo termine è uno dei criteri che abbiamo stabilito per il nostro percorso.
[3] Spesso queste situazioni sono indicate rispettivamente come progressione aritmetica e geometrica.

Inoltre, anche in questa sezione, prestiamo particolare attenzione alle **ipotesi** che è opportuno assumere affinché abbia senso modellizzare la situazione mediante la nuova distribuzione. In particolare, introduciamo l'espressione processo "casuale" e uniforme che sintetizza le prime due ipotesi sottese al modello e ci accompagneranno nella descrizione di molti fenomeni del percorso.

Osservazione
Nell'esempio del centralino, consideriamo come singola prova del modello binomiale l'arrivo di una telefonata nell'intervallino di tempo. Ma si poteva considerare come prova elementare anche l'azione (telefonare o meno) della generica persona che vive nel territorio di pertinenza del centralino. Allora, relativamente a questo ultimo modello binomiale, la prima ipotesi riportata nel testo per lo studente si può così riformulare: "*ogni persona ha la stessa probabilità di telefonare al centralino nei 10 minuti considerati*".

> *Modalità di utilizzo dei materiali*
> Anche in questa sezione i materiali si possono utilizzare nel modo descritto nel paragrafo precedente, cioè come dispensa a supporto della lezione.

b) Approfondimenti teorici - modello matematico, distribuzione di Poisson

Modello matematico

Visto che, in questo lavoro, facciamo largo uso del concetto di **modello matematico** ne precisiamo alcuni aspetti caratteristici.
Per iniziare seguiamo G. Israel che in [Isr, p.76] indica come una delle più chiare e semplici caratterizzazioni di tale oggetto matematico, quella proposta da von Neumann.

"*Per modello s'intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un siffatto costrutto matematico è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni - cioè descriva correttamente i fenomeni in un'area ragionevolmente ampia. Inoltre esso deve soddisfare certi criteri estetici - cioè, in relazione con la quantità di descrizione che fornisce, deve essere piuttosto semplice.(...) Le scienze non cercano di spiegare, a malapena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto modelli.*"

Più avanti, a p.116 dello stesso testo, Israel riprende tale caratterizzazione precisando:

"*[Oggi] la scienza non pretende più di spiegare, di scoprire l'essenza intima dei fenomeni. Essa non è ricerca della verità, non vuole essere specchio dei fenomeni. Ma si limita a fornire immagini matematiche - i modelli - che vanno valutate soltanto sulla base di criteri di efficacia, ovvero rispetto al fatto che funzionino più o meno bene, e quindi permettano di prevedere certi effetti o almeno farsi certe idee qualitative e sia pure parziali dei fatti. Non importa quanto vere, purché utili.*"

Inoltre, a proposito dell'esistenza di più modelli per la descrizione della realtà, a p.73 l'autore specifica:

"*Potremmo dire che non esiste una via diretta, una sorta di autostrada, che porta dalla realtà alla "sua" descrizione matematica, in modo univoco. E questo per tante ragioni. In primo luogo perché la realtà è costituita da un intrico talmente complesso e* *inestricabile di fenomeni,da impedire una descrizione relativamente semplice e schematica qual è quella matematica.*"

Infine osserviamo che la modellistica matematica moderna, la cui posizione è ben illustrata dalla caratterizzazione di von Neumann, si differenzia nettamente da quella classica di Newton. Infatti [Isr, p.118]:

"*Per Newton, il criterio direttivo non è l'utilità ma la verità, la scoperta delle cause, la spiegazione della cause, addirittura per giungere alla Causa Prima.*
(...) Il celebre aforisma newtoniano "Hypotheses non fingo" potrebbe essere quindi correttamente parafrasato al seguente modo: "io non costruisco modelli"... non ricorro a immagini o costruzioni concettuali arbitrarie, bensì ricerco la verità intima dei fatti."

Distribuzione di Poisson

Abbiamo detto che, secondo il nuovo modello, l'espressione esplicita della probabilità è data dalla formula (1). Resta da dimostrare che questa è una "buona definizione"[4], ossia che tale funzione effettivamente rappresenta una distribuzione di probabilità.

Proposizione 3.1. *La funzione definita in (1) è effettivamente una distribuzione di probabilità. Inoltre se la variabile aleatoria X ha distribuzione di Poisson di parametro λ, allora spesso si indica con $X \sim Po(\lambda)$.*

Dimostrazione. È evidente che per ogni k vale $P(X = k) > 0$, pertanto affinché la (1) sia l'espressione di una distribuzione di probabilità basta dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Per farlo conviene partire dallo sviluppo in serie della funzione esponenziale, ovvero:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Scrivendo tale uguaglianza per $x = \lambda$ si ha:

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ora, moltiplicando entrambi i termini per $e^{-\lambda}$, si conclude. Infatti si ha:

$$e^\lambda \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

ossia, proprio come si voleva,

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k).$$

□

[4] Nel senso matematico di definizione ben posta.

3.2 Dalla binomiale alla Poisson - attività

a) Aspetti didattici

Abbiamo strutturato la dimostrazione della convergenza della binomiale alla Poisson mediante un **percorso guidato**, ossia un procedimento organizzato in passi successivi, in ciascuno dei quali si pone una domanda. L'intento globale sotteso all'attività è di mettere lo studente nella condizione di **usare ciò che sa, per apprendere** cose nuove.

Più nel dettaglio, affinché l'approccio sia realmente costruttivo, e dunque formativo, le richieste sono formulate come manipolazioni **in vista di un obiettivo**. Ad esempio, chiediamo di esprimere $P(X = 0)$ *in termini* [5] del parametro della distribuzione.
L'attività, inoltre, consente di sviluppare un'altra competenza/abilità fondamentale: l'**interpretazione** di un testo matematico. E ciò avviene sia a livello locale, per rispondere alle singole domande, sia a livello globale, per seguire lo schema del procedimento.

Oltre a ciò questo materiale evidenzia una scelta sottesa all'intero percorso: introdurre la **formalizzazione** per **gradi**, utilizzando notazioni e termini nuovi solo quando ciò sia opportuno per comunicare in modo univoco ed espressivo. In altre parole vogliamo che la formalizzazione sia un'esigenza *dello studente*, che la percepisce come propria e non come un'imposizione del docente. Ad esempio, indichiamo ora con S_n la variabile aleatoria binomiale di parametro n: nei paragrafi precedenti era sufficiente denotarla con S, dato che n era fissato all'inizio del procedimento risolutivo. Analogamente introduciamo esplicitamente la funzione distribuzione di probabilità g che presenta l'indiscutibile vantaggio di rappresentare in modo sintetico i valori di probabilità, senza dover ricorrere in modo pesante a lunghe frasi nel linguaggio naturale.

Modalità di utilizzo dei materiali
La dimostrazione può essere delicata per le classi più deboli. In tal caso può costituire un interessante approfondimento per alcuni studenti.
Comunque le singole domande sono organizzate secondo lo schema che abbiamo già indicato come *quesito-suggerimento-risoluzione*. Qui però è fondamentale che lo studente non passi ad affrontare la domanda successiva se prima non si è confrontato con la risoluzione proposta. Infine osserviamo che le domande, singolarmente, senza il riferimento alla loro interpretazione probabilistica, possono essere affrontate anche nella classe quarta dato che si basano su questioni riguardanti il calcolo di limiti e i coefficienti binomiali.

b) Approfondimenti teorici - Altri approcci alla convergenza

La costruzione della legge di Poisson che abbiamo proposto è seguita da alcuni testi, quali [GriSne, p.187] e [Fel, p.153].
In letteratura la convergenza della binomiale alla Poisson viene mostrata anche mediante approcci diversi.

[5] Più in generale, in tale tipo di attività e non nella sola semplificazione, risiede uno degli aspetti a cui dovrebbe essere improntato lo studio dell'algebra nella scuola secondaria.

Approcci non ricorsivi
Ad esempio nei testi [Bal, p.39], [Ros, p.250] e [Pro, p.234], si ottiene direttamente la formula (1) come limite della distribuzione binomiale, anche nel caso $k \geq 1$. Un altro approccio si trova nel libro di Piazza [Pia, p.98]: l'autore sfrutta l'assunzione $k << n$ per effettuare alcune approssimazioni e tramite queste ricavare, poi, la formula (1). I passi sono essenzialmente due:

- $\dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \simeq n^k$
- $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \simeq \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n}$

La convergenza in legge
Nei materiali per lo studente mostriamo che il limite delle distribuzioni discrete binomiali di parametro n (numero di prove) per $n \to \infty$ nell'ipotesi $\lambda = np$ costante tende alla distribuzione di Poisson di parametro λ.
Precisamente detta X la variabile aleatoria di Poisson di parametro λ si ha, per $k = 0, 1, 2, 3, ...$

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = P(X = k) \tag{2}$$

nell'ipotesi $\lambda = np$ costante; ossia la distribuzione definita in (1).

Possiamo esprimere tale risultato anche in termini di una particolare convergenza di successioni di variabili aleatorie. Vediamo in che senso, per farlo introduciamo prima alcuni termini ed enunciamo un risultato di validità generale sulla convergenza di variabili aleatorie.

Definizione 3.2. *Sia $F_n(x)$ la funzione di ripartizione della generica variabile aleatoria X_n della successione $\{X_n\}$ e sia $F(x)$ la funzione di ripartizione di X. Allora si dice che la successione $\{X_n\}$* ***converge in legge*** *(o in distribuzione) a X se in ogni punto di continuità x di $F(x)$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Tale convergenza si indica spesso con la notazione $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Ricordiamo che se X è una variabile aleatoria discreta o continua, la funzione di ripartizione di X è la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definita da

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Chiariti i termini possiamo dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 3.3. *Se X_n è una successione di variabili aleatorie a valori interi positivi allora*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

se e solo se $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ *per* $k = 0, 1, 2, ...$

Dimostrazione. $X, X_1, X_2, X_3, ...$ sono a valori interi positivi, perciò i punti di continuità della funzione F di ripartizione della variabile aleatoria X sono tutti i numeri reali tranne al più gli interi positivi; quindi, poiché i punti della forma $k + \frac{1}{2}$ sono di continuità per F per ogni intero $k \geq 0$, se $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si ha:

$$P(X_n = k) = F_n\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_n\left(k - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F\left(k - \frac{1}{2}\right) = P(X = k)$$

Viceversa se $P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = k)$ per ogni $k = 0, 1, 2, 3, ...$
allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X = k) = P(X \leq x) = F(x)$$

dove con il simbolo $\lfloor x \rfloor$ si indica la parte intera di x. □

Abbiamo così tutti gli elementi che servono per formulare il risultato di convergenza nel caso particolare che stiamo esaminando.

Proposizione 3.4. *Sia $S_n \sim B(n, \lambda/n)$ allora la successione $\{S_n\}$ converge in legge alla variabile aleatoria $X \sim Po(\lambda)$, ossia:*

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Dimostrazione. È conseguenza diretta della proposizione 3.3 e di (2). □

La regola di de l'Hôpital sui naturali

Nel secondo passo della dimostrazione di convergenza che proponiamo nei materiali per gli studenti utilizziamo il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \tag{3}$$

In realtà l'enunciato del teorema fa riferimento a funzioni definite su un intervallo reale, mentre noi consideriamo il limite di una successione.
Però, possiamo osservare che il procedimento adottato è lecito come si può dedurre dai seguenti enunciati, la cui dimostrazione esula dai nostri scopi[6].

Teorema 3.5 (di de L'Hôpital)**.** *Siano f, g due funzioni, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ tali che:*

i) $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$ *oppure* $+\infty, -\infty$

ii) *f, g derivabili in (a, b) e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$*

iii) $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ *($L \in \mathbb{R}$ oppure $L = +\infty, -\infty$).*

Allora

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Le stesse conclusioni valgono se $x \to b_-$.

[6] Per gli interessati la dimostrazione degli enunciati si può trovare, per esempio, nel testo [PagSal], rispettivamente a pagina 305 (e segg.) e a pagina 187.

Proposizione 3.6. *Sia f una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Allora si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e solo se, per ogni successione $\{a_n\}$ a valori in $X - \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$