7 Indici della distribuzione - attività

a) Aspetti didattici

Decidiamo di ricavare gli indici della distribuzione di Poisson mediante un percorso guidato. Introduciamo brevemente la questione illustrando l'obiettivo dell'attività e il modo in cui intendiamo procedere. Analizziamo nel dettaglio il procedimento per determinare il valore atteso. Poi svolgiamo esplicitamente, come **esempio**, il calcolo del valore atteso, mentre la determinazione della varianza viene lasciata allo studente.

Come l'attività "Dalla binomiale alla Poisson", anche questa sviluppa l'abilità di **interpretare** un testo matematico e quella di **utilizzare** ciò che lo studente già sa allo scopo di imparare cose nuove.
Più trasversalmente offriamo allo studente la possibilità di prendere **consapevolezza** delle proprie conoscenze e competenze mediante un'attività di tipo **metacognitivo**.
L'importanza e il ruolo di tale riflessione nella didattica e nella formazione è discusso autorevolmente da R. Zan, ad esempio, in [Zan10, p.6], dove si legge:

"*La ricerca sulla risoluzione di problemi (di qualsiasi tipo) ha messo in luce che il bravo solutore di problemi è caratterizzato da un'abilità di carattere trasversale rispetto alle conoscenze necessarie per risolvere un problema specifico: l'abilità nel gestire tali conoscenze. Questa abilità, detta metacognitiva, si articola in due momenti distinti anche se correlati:*
- la consapevolezza delle proprie risorse
- l'attivazione di strategie per ottimizzare tali risorse (i cosiddetti processi di controllo)".

Infine, osserviamo che l'interpretazione probabilistica di λ come valore atteso e varianza permette di giustificare l'interpretazione geometrica dello stesso parametro che avevamo analizzato nell'attività discussa nel paragrafo 2.4.2.
Con ciò abbiamo seguito ancora l'indicazione dell'UMI-CIIM [UMI-CIIM] di investigare il ruolo dei parametri delle distribuzioni.

> *Modalità di utilizzo dei materiali*
> L'attività è ideata per consentire il lavoro autonomo e individuale dello studente, ma per le classi più deboli può essere conveniente considerarla un approfondimento per alcuni studenti.

b) Approfondimenti teorici - indici della distribuzione di Poisson

Per lo studente, preferiamo non svolgere la dimostrazione formale del fatto che il valore atteso e la varianza sono pari a λ, perché essa richiede l'utilizzo del concetto di serie, non familiare per la maggior parte degli studenti e anche perché è già didatticamente significativa la giustificazione fornita sfruttando l'approssimazione con la binomiale.
Per il docente è comunque interessante la proposizione che segue.

Proposizione 7.1. *Sia X la variabile aleatoria che ha distribuzione di Poisson di parametro λ.*
Allora il valore atteso di X e la varianza di X sono uguali a λ, ossia:

$$E[X] = V[X] = \lambda$$

Dimostrazione. Dalla definizione di valore atteso e dall'espressione analitica della distribuzione di Poisson, si ha:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} \tag{4}$$

Ora si consideri la serie in parentesi: essa ricorda lo sviluppo in serie della funzione esponenziale; pertanto puntiamo a ricondurla ad essa. Iniziamo allora con lo scrivere lo sviluppo della funzione esponenziale e^x in serie di potenze, per $x = \lambda$.

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Proseguiamo osservando che si può omettere il termine della serie relativo a $k = 0$, dato che da contributo nullo. Pertanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) \cdot \lambda = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \cdot \lambda = e^{\lambda} \cdot \lambda$$

Da cui sostituendo in (4) si conclude:

$$E[X] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} = \lambda$$

Per quanto riguarda la varianza iniziamo da $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot e^{-\lambda}$$

Proseguiamo esprimendo k^2 nella forma $k(k-1) + k$; e seguiamo un procedimento analogo a quello utilizzato per determinare il valore atteso:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + k] \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = \\ &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \right) \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} + \lambda = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} + \lambda = e^{\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} + \lambda = \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Pertanto concludiamo che:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

□

Abbiamo così determinato $E[X]$ e $V[X]$ dove X è la variabile aleatoria di Poisson di parametro λ.

Agli studenti, però, proponiamo un approccio più diretto: l'idea sottesa è che, nell'ipotesi $\lambda = np$ costante, se

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$$ [14]

allora

$$E(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(X) \tag{5}$$

e analogamente per $V[X]$.
Vogliamo osservare che questo approccio è concettualmente lecito poiché *dalla sola convergenza puntuale delle distribuzioni binomiali alla distribuzione di Poisson, si può dedurre la convergenza dei valori attesi (varianze) al valore atteso (varianza) della Poisson.*
Dimostreremo questo fatto nell'appendice A utilizzando un risultato sulle serie che si ottiene applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue nello spazio di misura costituito dalla misura del conteggio.

[14] Con tale scrittura intendiamo che la distribuzione di S_n tende puntualmente alla distribuzione di X per $n \to \infty$ nell'ipotesi $\lambda = np$ costante. Come visto nelle proposizioni 3.3 e 3.4, ciò è equivalente a dire che la succesione delle variabili aleatorie binomiali S_n converge in legge alla variabile di Poisson X.