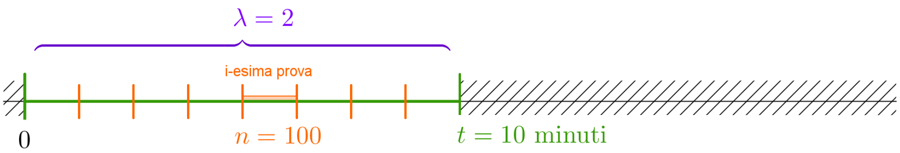
2 Il modello binomiale

2.1 Il centralino - attività

Prima di considerare il caso generale ti proponiamo di affrontare un problema specifico che è già stato introdotto nel video "Modellizzazione di eventi "rari"".

Ad un centralino tra le 9 e le 12 arriva, in media, una telefonata ogni 5 minuti.
Qual è la probabilità che in 10 minuti arrivino *esattamente* 3 telefonate?

Suggerimento
Proviamo a risolvere mediante una opportuna **distribuzione binomiale**.
Allo scopo suddividiamo l'intervallo $[0, t]$ in n intervallini uguali e supponiamo che su ciascuno di essi sia impossibile ricevere più di una chiamata. Scegliamo, ad esempio $n = 100$; dunque ciascun intervallino avrà un'ampiezza di 6 secondi.



A ciascun intervallino corrisponde una prova e il numero di telefonate in arrivo[3] si può descrivere tramite una distribuzione binomiale.

[3] Uno dei due esiti possibili delle prove si indica spesso, convenzionalmente, con il termine "successo"; l'altro esito con "insuccesso".

2.1.1 Risoluzione

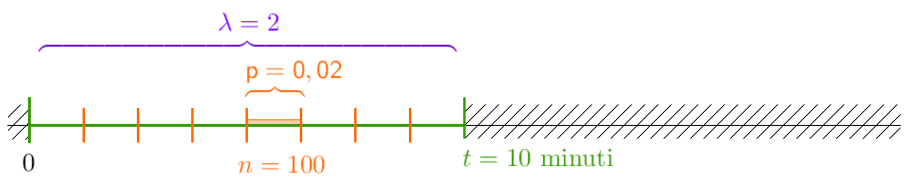
Secondo la costruzione proposta, la situazione si può interpretare in questo modo:

- una **sequenza** di $n = 100$ **prove**, una per ogni intervallino di ampiezza 6 secondi,
- ciascuna prova ha **due soli esiti** possibili: "*arriva una telefonata*", "*non arriva una telefonata*" nell'intervallino ad essa relativo.

Per modellizzare mediante la distribuzione binomiale resta da determinare la **probabilità** p che si realizzi l'evento "*arriva una telefonata nell'intervallino di 6 secondi*".
L'idea è di seguire un approccio frequentista, ossia interpretare la probabilità come frequenza relativa dell'evento in esame sull'insieme delle 100 prove. Cioè[4]:

$$p = \frac{\#\ \textit{realizzazioni evento}}{\#\ \textit{prove}} = \frac{2}{100} = 0{,}02.$$

Nel determinare il numero di realizzazioni dell'evento abbiamo utilizzato il fatto che nell'intervallo $[0, 10]$ vi sono in media $\lambda = 2$ telefonate, come discusso nel paragrafo 1.2.



Osservazione
Stiamo assumendo che p sia **costante** per ogni intervallino, ossia che il numero medio di telefonate sia lo stesso su ciascun intervallino di 6 secondi e non solo su ogni intervallo di 5 minuti come indicato nel testo.

Inoltre assumiamo che l'arrivo di una telefonata sia **indipendente** da quello delle altre.

È opportuno assumere queste due ipotesi affinché abbia senso modellizzare mediante la binomiale.

Abbiamo così tutti gli elementi per concludere che la probabilità richiesta, ossia la probabilità che in 10 minuti arrivino 3 telefonate è:

$$\binom{100}{3} \cdot 0{,}02^3 \cdot 0{,}98^{97} \simeq \mathbf{0{,}1823}.$$

Infatti in generale, secondo il modello binomiale, la probabilità di avere k successi su n prove ciascuna con probabilità p di successo[5] è:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

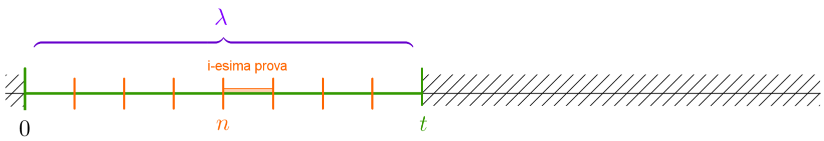
[4] In generale, dato un insieme E che ha un numero finito di elementi, con il simbolo $\#E$ si indica il numero di elementi di E. Analogamente, nel nostro contesto con il simbolo # indichiamo il "numero di".
[5] Abbiamo già precisato nella nota (2) cosa si intende per successo in una prova.

2.2 Il caso generale

Torniamo a considerare il problema generale di conteggio descritto nel paragrafo 1.2. Un possibile modello probabilistico per descrivere la situazione è quello binomiale, quindi proviamo a modellizzare la situazione mediante quest'ultima distribuzione, in modo analogo a quanto visto nell'esempio del centralino.

2.2.1 Costruzione del modello

L'idea
Suddividiamo l'intervallo $[0, t]$ in $\boldsymbol{n}$ **intervallini uguali** in modo che in ogni intervallino si abbia "al più" una sola realizzazione dell'evento.



La situazione si può interpretare nel modo seguente.

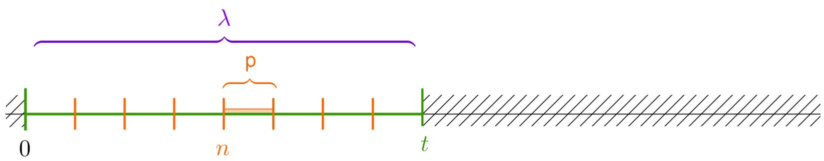
- Consideriamo una **sequenza**[6] di n **prove**.
- Ciascuna prova ha **due soli esiti** possibili: "*l'evento si realizza*", "*l'evento non si realizza*" nell'intervallino ad essa relativo[7].

  Siccome vogliamo al più un solo successo su ogni intervallino, consideriamo $\boldsymbol{n}$ **"grande"** rispetto al numero medio di successi nell'intervallo $[0, t]$.

- A questo punto dobbiamo determinare la **probabilità** p che l'evento si realizzi nell'intervallino. L'idea è di utilizzare un approccio frequentista, ossia considerare la frequenza relativa dell'evento in esame sull'insieme delle n prove.
  Abbiamo così:
$$p = \frac{\#\ realizzazioni\ evento}{\#\ prove} = \frac{\lambda}{n}$$

  Assumiamo che $\boldsymbol{p}$ sia **costante** per ogni prova. Osserviamo che ciò equivale ad ipotizzare che il numero medio di realizzazioni sia costante su tutti gli intervallini considerati.

- Inoltre le prove sono **indipendenti**, ovvero nessuna realizzazione è influenzata dalle altre.



Il modello ottenuto, quindi, è la **distribuzione binomiale** con parametri n e p definiti sopra.

[6] Tale sequenza si indica spesso come "schema di Bernoulli" o "schema successo-insuccesso".

[7] Anche in questo caso spesso l'esito che corrisponde alla realizzazione dell'evento si indica come "*successo*"; l'altro come "*insuccesso*". Nell'esempio del centralino, considerato in precedenza, l'evento è l'arrivo di una telefonata.

2.2.2 In sintesi

Abbiamo così risolto la questione di conteggio posta all'inizio, infatti abbiamo fornito un modello: la **distribuzione binomiale** che ha parametri n e p del tipo indicato (in particolare tali che $np = \lambda$).
Di tale modello è nota l'espressione analitica. Precisamente:

* sia S la **variabile aleatoria** che conta il numero di realizzazioni dell'evento nell'intervallo $[0, t]$;
* la **probabilità** che S assuma valore k è

$$\boldsymbol{P(S = k) = \binom{n}{k} \cdot p^n \cdot (1-p)^{n-k}}, \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, ...$$

Dove con il simbolo $\binom{n}{k}$ si denota il coefficiente binomiale n su k, la cui espressione esplicita è $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ [8].

2.2.3 Valutazione del modello

Il modello binomiale così costruito:

- **non** è **efficiente** dal punto di vista computazionale
  visto che la probabilità è espressa in termini dei coefficienti binomiali e il loro calcolo è articolato, infatti, il fattoriale è una funzione che cresce molto rapidamente:

$$10! \simeq 3.6 \cdot 10^6, \qquad 20! \simeq 2,4 \cdot 10^{18}, \qquad 70! > 10^{100}$$

- **non** è molto **espressivo**
  infatti, il parametro λ, che caratterizza la situazione, non compare esplicitamente.

Quindi è utile costruire un nuovo modello per rappresentare la situazione.

[8] Dato un numero naturale m, si indica con $m!$ il prodotto $m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, se $m \geq 1$; e 1 se $m = 0$.