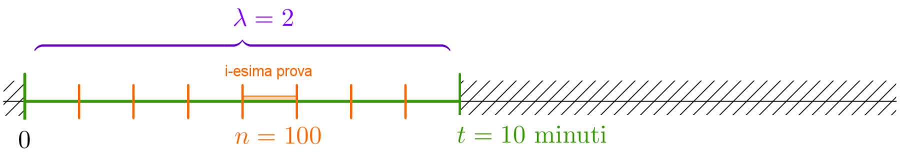
2 Il modello binomiale

2.1 Il centralino - attività

Prima di considerare il caso generale ti proponiamo di affrontare un problema specifico che è già stato introdotto nel video "Modellizzazione di eventi "rari"".

Ad un centralino tra le 9 e le 12 arriva, in media, una telefonata ogni 5 minuti.
Qual è la probabilità che in 10 minuti arrivino *esattamente* 3 telefonate?

Suggerimento
Proviamo a risolvere mediante una opportuna **distribuzione binomiale**.
Allo scopo suddividiamo l'intervallo $[0, t]$ in n intervallini uguali e supponiamo che su ciascuno di essi sia impossibile ricevere più di una chiamata. Scegliamo, ad esempio $n = 100$; dunque ciascun intervallino avrà un'ampiezza di 6 secondi.



A ciascun intervallino corrisponde una prova e il numero di telefonate in arrivo[3] si può descrivere tramite una distribuzione binomiale.

[3] Uno dei due esiti possibili delle prove si indica spesso, convenzionalmente, con il termine "successo"; l'altro esito con "insuccesso".

2.1.1 Risoluzione

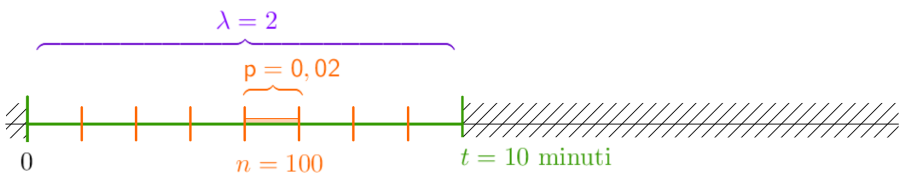
Secondo la costruzione proposta, la situazione si può interpretare in questo modo:

- una **sequenza** di $n = 100$ **prove**, una per ogni intervallino di ampiezza 6 secondi,
- ciascuna prova ha **due soli esiti** possibili: "*arriva una telefonata*", "*non arriva una telefonata*" nell'intervallino ad essa relativo.

Per modellizzare mediante la distribuzione binomiale resta da determinare la **probabilità** p che si realizzi l'evento "*arriva una telefonata nell'intervallino di 6 secondi*".
L'idea è di seguire un approccio frequentista, ossia interpretare la probabilità come frequenza relativa dell'evento in esame sull'insieme delle 100 prove. Cioè[4]:

$$p = \frac{\#\ \textit{realizzazioni evento}}{\#\ \textit{prove}} = \frac{2}{100} = 0{,}02.$$

Nel determinare il numero di realizzazioni dell'evento abbiamo utilizzato il fatto che nell'intervallo $[0, 10]$ vi sono in media $\lambda = 2$ telefonate, come discusso nel paragrafo 1.2.



Osservazione
Stiamo assumendo che p sia **costante** per ogni intervallino, ossia che il numero medio di telefonate sia lo stesso su ciascun intervallino di 6 secondi e non solo su ogni intervallo di 5 minuti come indicato nel testo.

Inoltre assumiamo che l'arrivo di una telefonata sia **indipendente** da quello delle altre.

È opportuno assumere queste due ipotesi affinché abbia senso modellizzare mediante la binomiale.

Abbiamo così tutti gli elementi per concludere che la probabilità richiesta, ossia la probabilità che in 10 minuti arrivino 3 telefonate è:

$$\binom{100}{3} \cdot 0{,}02^3 \cdot 0{,}98^{97} \simeq \mathbf{0{,}1823}.$$

Infatti in generale, secondo il modello binomiale, la probabilità di avere k successi su n prove ciascuna con probabilità p di successo[5] è:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

[4] In generale, dato un insieme E che ha un numero finito di elementi, con il simbolo $\#E$ si indica il numero di elementi di E. Analogamente, nel nostro contesto con il simbolo # indichiamo il "numero di".
[5] Abbiamo già precisato nella nota (2) cosa si intende per successo in una prova.