

4 La distribuzione di Poisson

4.1 Facciamo il punto

Definizione

Consideriamo un numero reale $\lambda > 0$.

Sia X una variabile aleatoria che può assumere i valori $k = 0, 1, 2, \dots$

X ha **distribuzione di Poisson** se vale:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Interpretazione

Tale *distribuzione* modella, in opportune ipotesi (indicate nel paragrafo 3.1), situazioni caratterizzate da eventi “**rari**”.

La *variabile aleatoria* X **conta** il numero di realizzazioni dell’evento in un intervallo e il *parametro* λ rappresenta il **numero medio** di **realizzazioni** in tale intervallo.

Inoltre la distribuzione di Poisson **approssima** la distribuzione *binomiale*.

Osservazione

La distribuzione di Poisson approssima la binomiale²⁰ quando il numero n delle prove è “**grande**” e la probabilità p di realizzazione dell’evento nella prova è “**piccola**”²¹. Infatti, come abbiamo visto²², la distribuzione di Poisson si può ottenere considerando il limite delle binomiali di parametri n, p , per n che tende all’infinito nell’ipotesi $np = \text{costante}$.

Spesso si considera l’approssimazione accettabile per $np \leq 10$ e $n > 50$.

²⁰Nel senso che preciseremo nel paragrafo 4.2.

²¹Questa legge che permette di approssimare la distribuzione binomiale con la Poisson ha carattere empirico e prese il nome di “legge dei piccoli numeri”, quando nel 1898 Bortkiewicz la introdusse per studiare il numero di cavalieri dell’esercito prussiano morti per il calcio di un cavallo.

²²Vedi quanto indicato nel paragrafo 3.2.

4.1.1 Nota storica



La distribuzione che abbiamo ottenuto prende il nome di **distribuzione di Poisson** dal matematico e fisico francese Siméon-Denis Poisson (1781-1840, fig.) che nel 1837 pubblicò “*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*” trattato in cui, per la prima volta, venne introdotta esplicitamente la formula precedente in un contesto matematico. Solo più tardi, nei primi decenni del secolo successivo, ci si rese conto che il modello della distribuzione di Poisson modella efficacemente vari processi fisici come il decadimento radiattivo, l’effetto fotoelettrico e quello termionico.

4.2 Significato geometrico del parametro - attività con GeoGebra

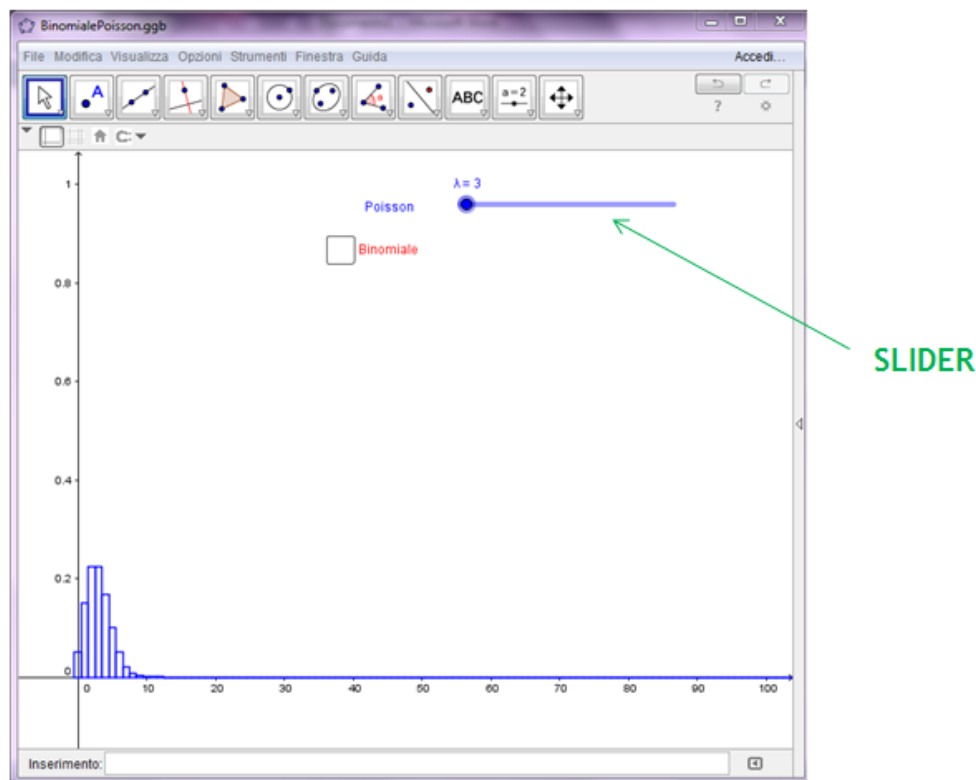
Utilizza il file GeoGebra *PoissonBinomiale.ggb* per tracciare i grafici della distribuzione di Poisson per alcuni valori. Considera valori di λ sia “piccoli” (quali, ad esempio, $\lambda = 0,1$) sia “grandi” (quali, ad esempio, $\lambda = 100$).

Prova a descrivere come varia il grafico della distribuzione al crescere del parametro λ .

4.2.1 Come utilizzare il file *PoissonBinomiale.ggb*

Il file è provvisto di uno slider (la barra indicata in figura) mediante il quale si può variare il valore del parametro λ .

Per il valore di λ assunto dallo slider viene (in automatico) visualizzato il grafico della distribuzione di Poisson di parametro λ .



4.2.2 Risoluzione e conclusioni

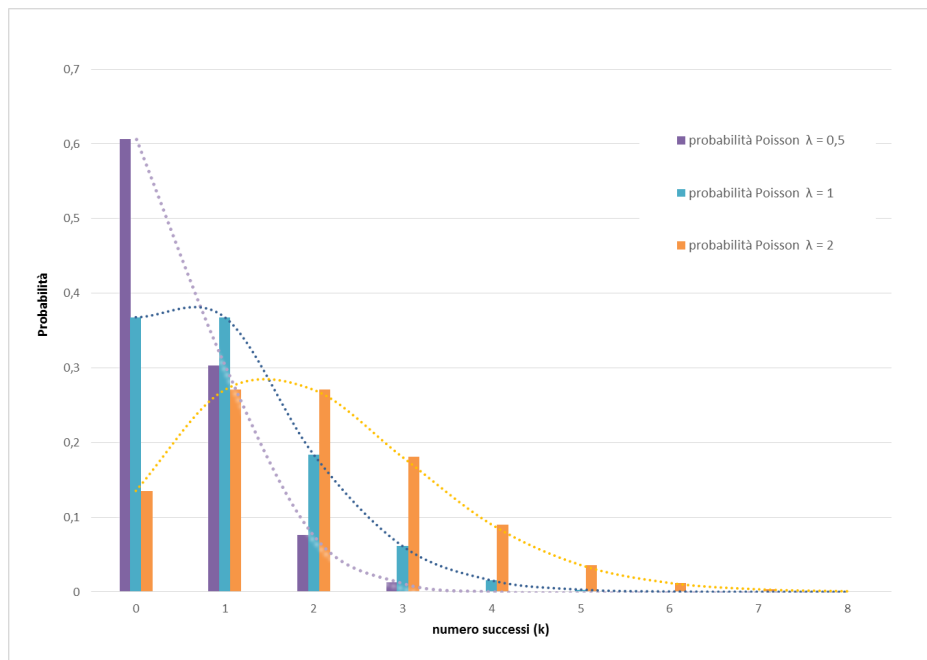
Al crescere di λ :

- il “punto di massimo^a” della distribuzione cresce;
- l’“apertura” del grafico cresce e il valore massimo diminuisce.

^aOssia per ogni λ fissato, il numero naturale k per cui è massimo il valore di probabilità $P(X = k)$, dove X è la variabile aleatoria di Poisson di parametro λ .

Forniremo più avanti²³ una giustificazione intuitiva di tali fatti. Essa, come vedremo, si basa sul fatto che λ è sia il valore atteso sia la varianza della distribuzione di Poisson di parametro λ .

Per ora ci possiamo accontentare di osservare i due fatti nella figura seguente²⁴. In essa sono rappresentati i grafici delle distribuzioni di Poisson per alcuni valori di λ .



²³Nel paragrafo 7.

²⁴Nel grafico il tratteggio è stato aggiunto solo per dare l'idea dell'andamento della distribuzione di Poisson che è, comunque, una distribuzione discreta.

4.3 Convergenza della binomiale - attività con GeoGebra

Utilizza il file GeoGebra *PoissonBinomiale.ggb* per confrontare la distribuzione di Poisson di parametro λ con la binomiale di parametri n e $p = \lambda/n$. Allo scopo rispondi ai seguenti quesiti.

1. Considera prima il caso $\lambda = 2$.

Trova il più piccolo n per il quale ogni scarto^a tra il valore di probabilità ottenuto con il modello binomiale e il corrispondente ottenuto con il modello di Poisson risulta minore di 0,01.

2. Fissa poi alcuni valori del parametro λ . Ad esempio $\lambda = 2$; $\lambda = 10$; $\lambda = 0,1$; $\lambda = 100$.

- a) Per ciascuno di tali valori, traccia i grafici della distribuzione binomiale per alcuni valori del parametro n (p resta determinato dalla condizione $p = \lambda/n$) e confrontali con il grafico della distribuzione binomiale di parametro λ . Per quali valori di n l'approssimazione della binomiale con la Poisson ti sembra “buona”?
- b) Per quale dei valori di λ considerati hai indicato valori maggiori per n nel punto a)?

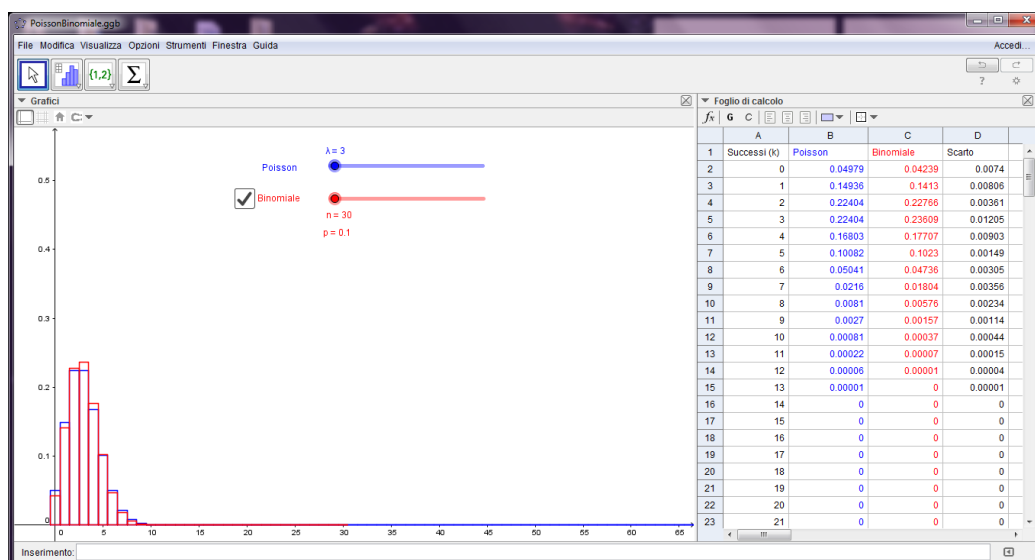
Attenzione: mantieni la stessa scala per tutti e quattro i casi.

^aLo scarto è il valore assoluto della differenza tra i corrispondenti valori di probabilità ottenuti mediante la distribuzione binomiale e la distribuzione di Poisson.

4.3.1 Come utilizzare il file *PoissonBinomiale.ggb*

Oltre allo slider relativo al parametro λ , il file ha anche uno slider relativo al parametro n della binomiale.

Puoi confrontare i grafici delle due distribuzioni (identificati mediante il colore dei rispettivi slider), ma puoi osservare anche gli scarti tra esse (nel foglio di calcolo²⁵).



Attenzione: per visualizzare il grafico della distribuzione binomiale, oltre a quello della distribuzione di Poisson, si deve cliccare sull'opzione "binomiale".

²⁵Il foglio di calcolo può essere attivato dal menù "visualizza".

4.3.2 Risoluzione

1. Nel caso $\lambda = 2$ il più piccolo n per cui è minore di 0,01 *ogni* scarto tra i corrispondenti valori di probabilità delle due distribuzioni, è $n = 29$.
2. La domanda è qualitativa, quindi il risultato non è univoco, dato che non abbiamo precisato cosa intendiamo per “buona” approssimazione.
Possiamo dire che si ottiene una “buona” approssimazione²⁶:
 - nel caso $\lambda = 2$ per valori di n intorno a 30;
 - nel caso $\lambda = 10$ per valori di n intorno a 75;
 - nel caso $\lambda = 0,1$ per valori di n intorno a 2;
 - nel caso $\lambda = 100$ per valori di n intorno a 300.
 Pertanto nei quattro casi considerati, più λ è grande e più n deve essere grande, se si vuole ottenere una “buona” approssimazione.

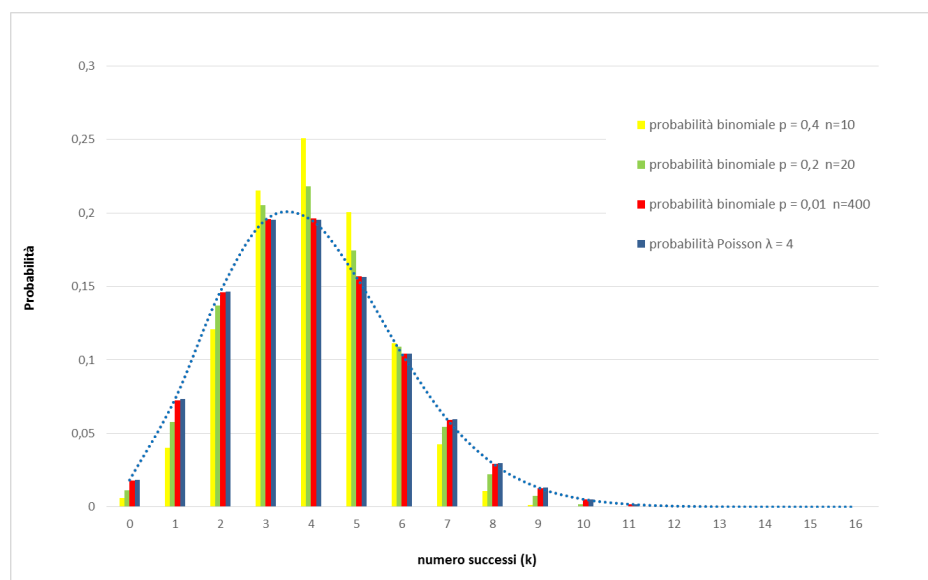
4.3.3 Conclusione

In generale:

la distribuzione di Poisson di parametro λ approssima la distribuzione binomiale per n “grande” nell’ipotesi $\lambda = np$. E dunque p “piccolo”.

Tale risultato²⁷ è conseguenza del fatto che la Poisson è il limite della distribuzione binomiale per n che tende all’infinito, nell’ipotesi $\lambda = np$ costante.

Con questa attività abbiamo precisato, in alcuni casi, tale approssimazione. Spesso si considera accettabile l’approssimazione per $n > 50$ e $np \leq 10$ ²⁸. In figura²⁹ vediamo che l’approssimazione con la binomiale è migliore per valori di n più grandi (nell’ipotesi $\lambda = np = 4$).



²⁶Per indicare i valori abbiamo seguito il seguente criterio: ogni scarto tra i corrispondenti valori di probabilità nei due modelli è minore di 0,01.

²⁷Già presentato nel paragrafo 4.

²⁸Vedi quanto esposto nel paragrafo 4.

²⁹Nel grafico il tratteggio è stato aggiunto solo per dare l’idea dell’andamento della distribuzione di Poisson che è, comunque, una distribuzione discreta.