4 La distribuzione di Poisson

4.1 Facciamo il punto

Definizione

Consideriamo un numero reale $\lambda > 0$.
Sia X una variabile aleatoria che può assumere i valori $k = 0, 1, 2, ...$
X ha **distribuzione di Poisson** se vale:

$$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

Interpretazione

Tale *distribuzione* modellizza, in opportune ipotesi (indicate nel paragrafo 3.1), situazioni caratterizzate da eventi "**rari**".

La *variabile aleatoria* X **conta** il numero di realizzazioni dell'evento in un intervallo e il *parametro* λ rappresenta il **numero medio** di **realizzazioni** in tale intervallo.

Inoltre la distribuzione di Poisson **approssima** la distribuzione *binomiale*.

Osservazione

La distribuzione di Poisson approssima la binomiale[20] quando il numero $\boldsymbol{n}$ delle prove è **"grande"** e la probabilità $\boldsymbol{p}$ di realizzazione dell'evento nella prova è **"piccola"**[21].
Infatti, come abbiamo visto[22], la distribuzione di Poisson si può ottenere considerando il limite delle binomiali di parametri n, p, per n che tende all'infinito nell'ipotesi $np =$ costante.

Spesso si considera l'approssimazione accettabile per $np \leq 10$ e $n > 50$.

[20] Nel senso che preciseremo nel paragrafo 4.2.

[21] Questa legge che permette di approssimare la distribuzione binomiale con la Poisson ha carattere empirico e prese il nome di "legge dei piccoli numeri", quando nel 1898 Bortkiewicz la introdusse per studiare il numero di cavalieri dell'esercito prussiano morti per il calcio di un cavallo.

[22] Vedi quanto indicato nel paragrafo 3.2.

4.1.1 Nota storica

La distribuzione che abbiamo ottenuto prende il nome di **distribuzione di Poisson** dal matematico e fisico francese Siméon-Denis Poisson (1781-1840, fig.) che nel 1837 pubblicò "*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*" trattato in cui, per la prima volta, venne introdotta esplicitamente la formula precedente in un contesto matematico. Solo più tardi, nei primi decenni del secolo successivo, ci si rese conto che il modello della distribuzione di Poisson modellizza efficacemente vari processi fisici come il decadimento radiattivo, l'effetto fotoelettrico e quello termoionico.