

### 4.3 Convergenza della binomiale - attività con GeoGebra

Utilizza il file GeoGebra *PoissonBinomiale.ggb* per confrontare la distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$  con la binomiale di parametri  $n$  e  $p = \lambda/n$ . Allo scopo rispondi ai seguenti quesiti.

1. Considera prima il caso  $\lambda = 2$ .

Trova il più piccolo  $n$  per il quale ogni scarto<sup>a</sup> tra il valore di probabilità ottenuto con il modello binomiale e il corrispondente ottenuto con il modello di Poisson risulta minore di 0,01.

2. Fissa poi alcuni valori del parametro  $\lambda$ . Ad esempio  $\lambda = 2$ ;  $\lambda = 10$ ;  $\lambda = 0,1$ ;  $\lambda = 100$ .

- a) Per ciascuno di tali valori, traccia i grafici della distribuzione binomiale per alcuni valori del parametro  $n$  ( $p$  resta determinato dalla condizione  $p = \lambda/n$ ) e confrontali con il grafico della distribuzione binomiale di parametro  $\lambda$ . Per quali valori di  $n$  l'approssimazione della binomiale con la Poisson ti sembra “buona”?
- b) Per quale dei valori di  $\lambda$  considerati hai indicato valori maggiori per  $n$  nel punto a)?

Attenzione: mantieni la stessa scala per tutti e quattro i casi.

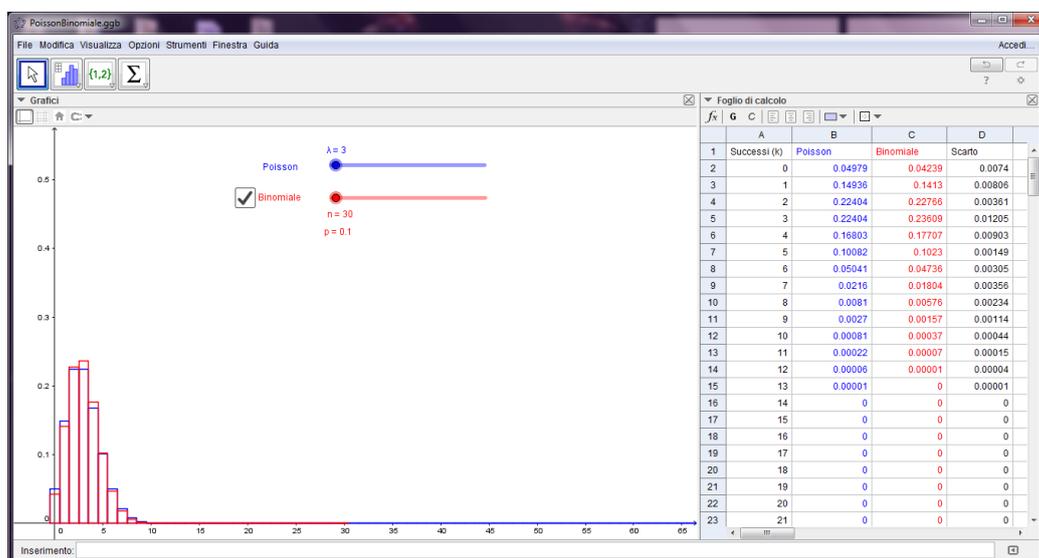
---

<sup>a</sup>Lo scarto è il valore assoluto della differenza tra i corrispondenti valori di probabilità ottenuti mediante la distribuzione binomiale e la distribuzione di Poisson.

### 4.3.1 Come utilizzare il file *PoissonBinomiale.ggb*

Oltre allo slider relativo al parametro  $\lambda$ , il file ha anche uno slider relativo al parametro  $n$  della binomiale.

Puoi confrontare i grafici delle due distribuzioni (identificati mediante il colore dei rispettivi slider), ma puoi osservare anche gli scarti tra esse (nel foglio di calcolo<sup>25</sup>).



*Attenzione:* per visualizzare il grafico della distribuzione binomiale, oltre a quello della distribuzione di Poisson, si deve cliccare sull’opzione “binomiale”.

<sup>25</sup>Il foglio di calcolo può essere attivato dal menù “visualizza”.

### 4.3.2 Risoluzione

1. Nel caso  $\lambda = 2$  il più piccolo  $n$  per cui è minore di 0,01 *ogni* scarto tra i corrispondenti valori di probabilità delle due distribuzioni, è  $n = 29$ .
2. La domanda è qualitativa, quindi il risultato non è univoco, dato che non abbiamo precisato cosa intendiamo per “buona” approssimazione.  
Possiamo dire che si ottiene una “buona” approssimazione<sup>26</sup>:
  - nel caso  $\lambda = 2$  per valori di  $n$  intorno a 30;
  - nel caso  $\lambda = 10$  per valori di  $n$  intorno a 75;
  - nel caso  $\lambda = 0,1$  per valori di  $n$  intorno a 2;
  - nel caso  $\lambda = 100$  per valori di  $n$  intorno a 300.
 Pertanto nei quattro casi considerati, più  $\lambda$  è grande e più  $n$  deve essere grande, se si vuole ottenere una “buona” approssimazione.

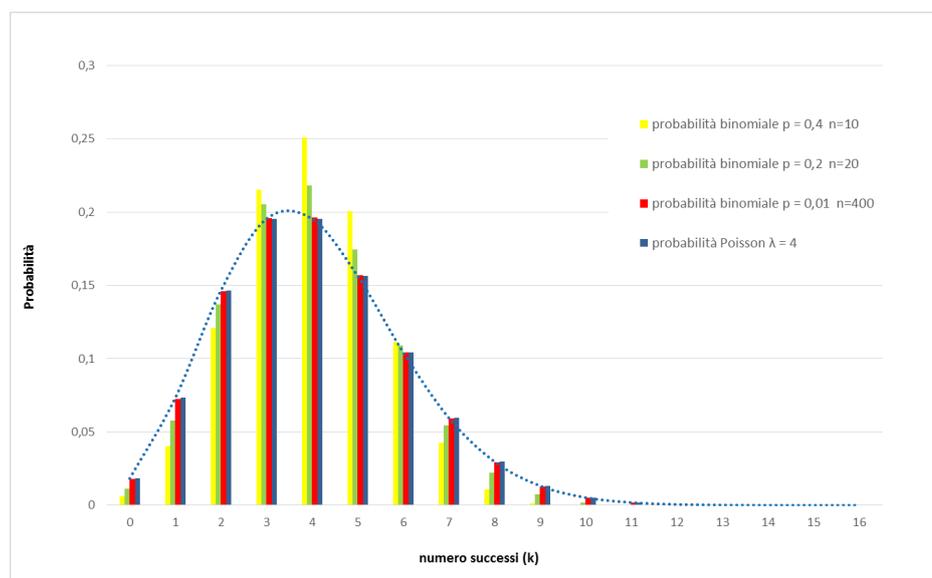
### 4.3.3 Conclusione

In generale:

la distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$  approssima la distribuzione binomiale per  $n$  “grande” nell’ipotesi  $\lambda = np$ . E dunque  $p$  “piccolo”.

Tale risultato<sup>27</sup> è conseguenza del fatto che la Poisson è il limite della distribuzione binomiale per  $n$  che tende all’infinito, nell’ipotesi  $\lambda = np$  costante.

Con questa attività abbiamo precisato, in alcuni casi, tale approssimazione. Spesso si considera accettabile l’approssimazione per  $n > 50$  e  $np \leq 10$ <sup>28</sup>. In figura<sup>29</sup> vediamo che l’approssimazione con la binomiale è migliore per valori di  $n$  più grandi (nell’ipotesi  $\lambda = np = 4$ ).



<sup>26</sup>Per indicare i valori abbiamo seguito il seguente criterio: ogni scarto tra i corrispondenti valori di probabilità nei due modelli è minore di 0,01.

<sup>27</sup>Già presentato nel paragrafo 4.

<sup>28</sup>Vedi quanto esposto nel paragrafo 4.

<sup>29</sup>Nel grafico il tratteggio è stato aggiunto solo per dare l’idea dell’andamento della distribuzione di Poisson che è, comunque, una distribuzione discreta.