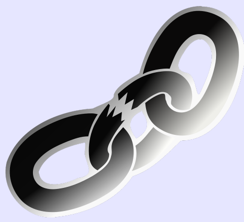
5.2 Dall'Esame di Stato del Liceo Scientifico

5.2.1 Sessione suppletiva 2015, Quesito 7

Una fabbrica produce il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:

a) *la distribuzione binomiale;*

b) *la distribuzione di Poisson.*



a) **Modello binomiale**

Interpretiamo la situazione in questo modo:

- una sequenza[35] di $\boldsymbol{n = 100}$ **prove**, una per ogni prodotto del campione,
- ciascuna prova ha due soli esiti possibili: "il prodotto è difettoso", "il prodotto non è difettoso"; la probabilità p che il pezzo sia difettoso è $\boldsymbol{p = 0{,}03}$.

Inoltre dobbiamo assumere che tutti i controlli siano tra loro *indipendenti* e vengano effettuati nelle stesse condizioni.

Dunque la richiesta si può così riformulare:

nel modello ora descritto, qual è la probabilità di avere esattamente[36] *2 pezzi difettosi?*

Quindi secondo tale modello binomiale si ha che la probabilità richiesta è[37]:

$$\binom{100}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{98} \simeq \mathbf{0{,}225}.$$

b) **Modello della distribuzione di Poisson**

Affinché abbia senso modellizzare con la distribuzione di Poisson assumiamo che la produzione del pezzo difettoso avvenga in modo "casuale" e uniforme[38].
Per costruire il modello dobbiamo determinare il parametro λ: esso è il numero medio di prodotti difettosi, nel campione considerato.
Dato che il campione è composto da 100 prodotti, si ha

$$\boldsymbol{\lambda = 3}$$

[35] Tale sequenza si indica spesso come "schema di Bernoulli" o "schema successo-insuccesso".
[36] Interpretiamo in questo modo la richiesta "2 pezzi difettosi" formulata nel testo del quesito. Un'altra possibile interpretazione poteva essere "**almeno** 2 pezzi difettosi".
[37] Ricordiamo che la distribuzione di una variabile aleatoria binomiale S è data da

$$P(S = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Discuteremo, alla fine della risoluzione, un modo per ricostruire tale formula, volta per volta.
[38] Nel senso indicato nel paragrafo 3.1.

In alternativa si poteva determinare λ anche mediante l'uguaglianza

$$\lambda = np.$$

In ogni caso, per determinare la probabilità richiesta (ossia la probabilità che nel campione vi siano *esattamente* 2 prodotti difettosi) seguiamo l'approccio iterativo illustrato nel paragrafo 3.1.
Precisamente, detta X la variabile aleatoria che conta i pezzi difettosi tra i 100 pezzi del campione, si ha:

$$\begin{aligned} & P(X=0)=e^{-3}\\ \boxed{\cdot\frac{3}{1}}\quad & P(X=1)=\boxed{\frac{3}{1}}\cdot P(X=0)=3\,e^{-3}\\ \boxed{\cdot\frac{3}{2}}\quad & P(X=2)=\boxed{\frac{3}{2}}\cdot P(X=1)=\frac{3}{2}\cdot 3\,e^{-2}=\frac{9}{2}\,e^{-2}\approx 0{,}224\end{aligned}$$

In alternativa usando l'espressione analitica della distribuzione di Poisson[39] si ottiene direttamente che la probabilità richiesta è:

$$P(X=2)=\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}=\frac{9}{2}\cdot e^{-3}\simeq \mathbf{0{,}224}.$$

Osservazioni
- *I modelli a confronto*
I valori ottenuti mediante le due distribuzioni considerate sono "vicini".
Ci si poteva aspettare tale conclusione dato che la distribuzione di Poisson approssima la distribuzione binomiale che ha parametri n, p rispettivamente "grande" e "piccolo". Spesso l'approssimazione è accettabile per $np \leq 10$ e $n > 50$, condizioni che sono appunto verificate nella situazione proposta dal quesito.

- *La formula della binomiale*
Senza ricorrere a formule ritenute a memoria, il valore di probabilità si può ricavare volta per volta in due passi, determinando:

1. la probabilità di una sequenza di 2 pezzi difettosi (D) e 98 non difettosi (N), quale

$$DDNN\ldots N$$

per la legge della moltiplicazione (eventi indipendenti) la probabilità di tale sequenza è

$$0{,}03^2\cdot(1-0{,}03)^{98}$$

2. il numero di tutte le sequenze di 2 D e 98 N
esso è il numero di sottoinsiemi di 2 elementi (posizioni per D), contenuti in un insieme di 100 elementi (posizioni possibili nella sequenza); dunque è

$$\binom{100}{2}$$

[39] La distribuzione della variabile aleatoria di Poisson X è data da

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\quad \text{per } k=0,1,2,\ldots$$