5.4 Aspetti algebrici

Sappiamo che, per la variabile aleatoria di Poisson X di parametro λ, vale:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad \text{per } k=0,1,2,...$$

Utilizza tale formula per esprimere $P(X=m)$ in funzione di $P(X=m-1)$, dove m è un intero maggiore di 1.

Un modo di affrontare la questione è manipolare l'espressione $P(X=m)$ in modo da poter individuare la sua relazione con l'espressione $P(X=m-1)$.

Ma come conviene manipolare l'espressione $P(X=m)$?
Per comprenderlo iniziamo con l'esplicitare l'espressione $P(X=m-1)$.

$$P(X=m-1)=\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}$$

A questo punto possiamo intravvedere l'approccio da seguire:

- per ricondursi a $(m-1)!$ conviene esprimere $m!$ nella forma

$$m!=m(m-1)!$$

- per ricondursi a λ^{m-1} conviene esprimere λ^m nella forma

$$\lambda^m=\lambda\cdot\lambda^{m-1}.$$

Pertanto concludiamo che vale:

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{\lambda}{m}\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda}{m}P(X=m-1)$$

Osservazioni

Abbiamo ottenuto la stessa uguaglianza discussa nel paragrafo 3.1 e dimostrata, per altra via, nel paragrafo 3.2.

Inoltre quello proposto è solo uno dei modi per risolvere la questione.
Ad esempio, dopo le considerazioni iniziali, si poteva pensare di considerare direttamente il rapporto

$$\frac{P(X=m)}{P(X=m-1)}=\frac{\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}\cdot e^{-\lambda}}=\frac{\frac{\lambda}{m}\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}\cdot e^{-\lambda}}=\frac{\lambda}{m}$$

Infine, questo ultimo approccio è simile a quello utilizzato nella dimostrazione presentata al paragrafo 3.2, pertanto potrebbe essere utile affrontare questo esercizio prima di analizzare la dimostrazione.