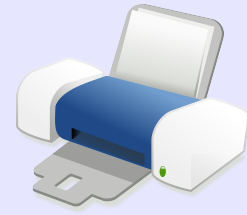


5 Non solo calcoli

5.1 Errori di stampa

Un compositore tipografico commette, in media, un errore di stampa ogni 3000 parole.
Predispone un libro che contiene 300 parole per pagina.
Costruisci un modello probabilistico che descriva gli errori per pagina.



È sensato modellizzare la situazione mediante:

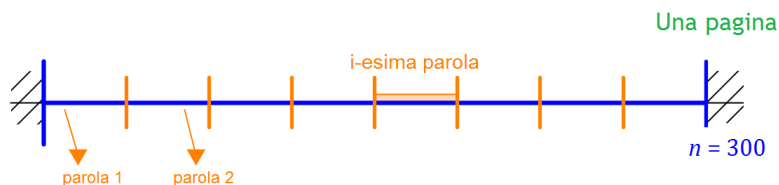
- il modello binomiale;
- il modello di Poisson.

Vediamo allora come costruire ciascuno dei due modelli.

a) Modello binomiale

Possiamo schematizzare la composizione di una pagina del libro, in modo analogo a quanto visto nell'esempio del centralino³⁰.

Ossia interpretiamo la situazione in questo modo:



- una sequenza di $n = 300$ prove, una per ogni parola;
- ciascuna prova può avere due soli esiti (“errore”, “non errore”); la probabilità p di errore è $p = \frac{1}{3.000}$.

Assumiamo, inoltre, che le prove siano indipendenti, cioè che l’errore nel comporre una parola non influenzi la composizione delle altre.

In queste ipotesi³¹ ha senso modellizzare mediante la binomiale.

Precisamente:

indichiamo con S la variabile aleatoria che conta il numero di errori per pagina. Allora, la distribuzione di S è

$$P(S = k) = \binom{300}{k} \left(\frac{1}{3.000}\right)^k \cdot \left(\frac{2.999}{3.000}\right)^{300-k} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

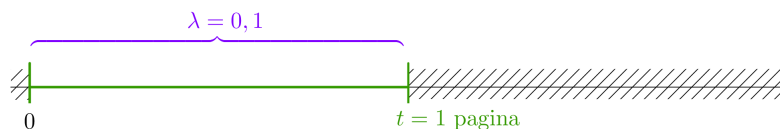
³⁰Vedi il paragrafo 1.2.

³¹Cioè, in sostanza nell’ipotesi che le prove avvengano nelle stesse condizioni e siano indipendenti.

b) Modello di Poisson

Per costruire il modello di Poisson dobbiamo determinare il parametro λ che indica il numero medio di errori per pagina.

Allo scopo decidiamo³² di seguire uno schema proporzionale: su 3.000 parole si ha, in media, 1 errore, dunque su 300 parole, ossia su 1/10 delle 3.000 parole, ci aspettiamo, in media, 0,1 errori. Quindi poniamo $\lambda = 0,1$.



Affinché abbia senso modellizzare con la distribuzione di Poisson assumiamo che la distribuzione degli errori sia “casuale” e uniforme³³; inoltre osserviamo che l’evento “errore nella parola” è “raro” (il numero di errori per pagina è “piccolo” rispetto al numero di parole in essa contenute).

Sia, ora, X la variabile aleatoria che conta il numero di errori per pagina. Secondo il modello di Poisson, si ha:

$$P(X = k) = \frac{0,1^k}{k!} e^{-0,1} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

Se poi vogliamo determinare il valore di probabilità relativo ad un dato k , ad esempio $k = 3$, possiamo procedere come indicato nel problema del centralino³⁴.

Confrontiamo le due distribuzioni

Confrontiamo i valori di probabilità che forniscono i due modelli. Otteniamo, arrotondando alla quinta cifra decimale:

| # errori (k) | Binomiale $P(S = k)$ | Poisson $P(X = k)$ |
|---------------------|-------------------------|-----------------------|
| 0 | 0,90482 | 0,90484 |
| 1 | 0,09051 | 0,09048 |
| 2 | 0,00451 | 0,00452 |
| 3 | 0,00015 | 0,00015 |
| 4 | 0,00000 | 0,00000 |

per $k \geq 4$ i valori di probabilità sono “praticamente nulli”.

Il modello di Poisson fornisce valori “vicinissimi” a quelli ottenuti tramite il modello della distribuzione binomiale.

Notiamo infine che vale: $np = 300 \cdot \frac{1}{3.000} = 0,1 = \lambda$.

³²In sostanza stiamo assumendo che l’errore si distribuisca in modo omogeneo nel libro. Ribadiamo però che, per quanto ragionevole, si tratta di una nostra decisione, tra altre possibili.

³³Nel senso indicato nel paragrafo 3.1.

³⁴Come abbiamo visto nel paragrafo 3.1.