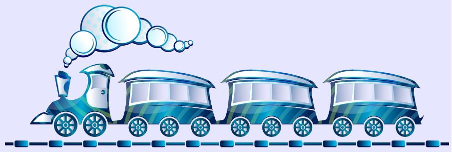
5.2.2 Seconda simulazione ministeriale 2015, Quesito 10

In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino arrivano in media ogni 20 minuti due treni. Determina la probabilità che in 20 minuti :

a) non arrivi nessun treno;

b) ne arrivi uno solo;

c) al massimo ne arrivino 4.



Decidiamo di utilizzare il modello di Poisson per modellizzare la situazione. Affinché ciò abbia senso assumiamo[40] che l'arrivo di un treno sia un evento "casuale" e uniforme[41]. Osserviamo, inoltre, che esso si verifica "raramente", visto che nei 20 minuti considerati arrivano solo 2 treni.

Pertanto proseguiamo indicando con X la variabile aleatoria che conta i treni che arrivano nei 20 minuti in esame.
Il prossimo passo consiste nello stabilire il valore del parametro λ, ossia del numero medio di realizzazioni dell'evento (in questo caso l'arrivo del treno) nell'intervallo considerato (in questo caso 20 minuti). Il testo afferma proprio quanto ci serve: in media, arrivano 2 treni in 20 minuti. Quindi stabiliamo che il parametro λ che caratterizza le distribuzione sia 2.

a) b) Possiamo così calcolare le due probabilità richieste:

$$\boxed{\cdot \frac{2}{1}}$$

$$\mathrm{P}(X=0) = e^{-2} \approx 0{,}135$$

$$\mathrm{P}(X=1) = \boxed{\frac{2}{1}} \cdot \mathrm{P}(X=0) = 2\,e^{-2} \approx 0{,}271$$

c) Conviene interpretare l'evento "*arrivano al massimo 4 treni*" come "*non arriva alcun treno, **oppure** arriva 1 treno, **oppure** arrivano 2 treni, **oppure** arrivano 3 treni, **oppure** arrivano 4 treni*".
Pertanto la probabilità richiesta è:

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4).$$

[40]Nel testo del quesito tali ipotesi non erano precisate e non veniva indicata, nemmeno, quale distribuzione usare, pertanto la nostra è una soluzione tra le tante possibili. Ad esempio poteva avere senso modellizzare mediante un'opportuna distribuzione binomiale.

[41]Nel senso indicato nel paragrafo 3.1.

E si può calcolare come segue:

$$
\begin{aligned}
&P(X=0) = e^{-2}\\
&\quad \Big\downarrow \boxed{\cdot \tfrac{2}{1}}\\
&P(X=1) = \boxed{\tfrac{2}{1}} \cdot P(X=0) = 2\,e^{-2}\\
&\quad \Big\downarrow \boxed{\cdot \tfrac{2}{2}}\\
&P(X=2) = \boxed{\tfrac{2}{2}} \cdot P(X=1) = 1 \cdot 2\,e^{-2} = 2\,e^{-2}\\
&\quad \Big\downarrow \boxed{\cdot \tfrac{2}{3}}\\
&P(X=3) = \boxed{\tfrac{2}{3}} \cdot P(X=2) = \tfrac{2}{3} \cdot 2\,e^{-2} = \tfrac{4}{3}\,e^{-2}\\
&\quad \Big\downarrow \boxed{\cdot \tfrac{2}{4}}\\
&P(X=4) = \boxed{\tfrac{2}{4}} \cdot P(X=3) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3}\,e^{-2} = \tfrac{2}{3}\,e^{-2}
\end{aligned}
$$

da cui:

$$P(X \leq 4) = e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4}{3}e^{-2} + \frac{2}{3}e^{-2} = 7e^{-2} \simeq \mathbf{0{,}947}.$$