6 Applicazioni

6.1 Bombe su Londra - video

*Nel video "**Bombe su Londra**" viene proposto un episodio storico, accaduto durante la Seconda Guerra Mondiale.*[46] *Potrai saggiare l'efficacia del modello di Poisson nell'affrontare la questione che si ponevano gli inglesi: il bombardamento era mirato?*
Lo schema di ragionamento che seguiamo costituisce un valido riferimento per altre attività del nostro percorso.

Trovi il video al link seguente: *www.youtube.com/watch?v=gfAreJzx5O0&feature=youtu.be*.

[46] Un riferimento sintetico, in forma scritta, dei contenuti affrontati nel video si può trovare anche in seguito, nel paragrafo 6.4.

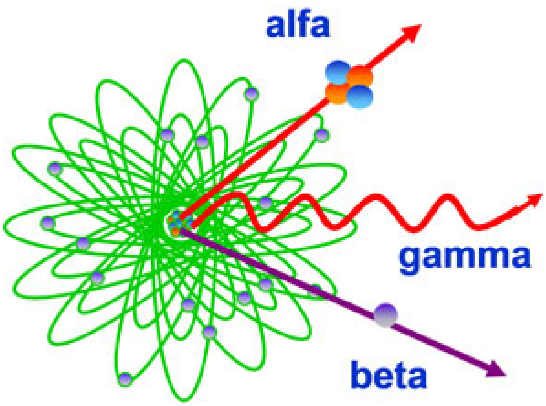
6.2 Un esperimento storico: il decadimento radioattivo - attività

L'intento dell'attività è quello di investigare il fenomeno del decadimento radioattivo mediante il modello di Poisson. Lo faremo seguendo, essenzialmente, l'approccio seguito da Rutherford all'inizio del Novecento.

Leggi il testo proposto e poi rispondi ai quesiti che seguono aiutandoti con un foglio elettronico. Può esserti d'aiuto esaminare prima il video "Bombe su Londra".

I fisici Ernest Rutherford (1871-1937) e Johannes Wilhelm Geiger (1882-1945) assieme ai loro collaboratori James Chadwick (1891-1974) e Charles Drummond Ellis (1895-1980) nei laboratori di Cambridge, studiarono i processi di emissione di particelle da sostanze radioattive.

Essi osservarono che alcune sostanze, come per esempio il radio e l'uranio, cambiano lentamente natura nel tempo. Accade, infatti, che gli atomi si disintegrino ed emettano di conseguenza particelle radioattive che, in seguito, furono classificate in particelle alfa (α), beta (β) e raggi gamma (γ). Ad esempio l'uranio, con un lungo procedimento di decadimento che dura miliardi di anni, si trasforma da uranio-238 (radioattivo) in piombo-206 (non radioattivo).



[47]

Fig.1

Le emissioni di radiazioni, quindi, sono utili segnali dell'avvenuta disintegrazione.
I fisici presentarono i risultati del loro lavoro nel libro "Radiations from Radioactive Substances" (1930). Nel testo viene presentato un esperimento del 1910 in cui essi studiarono le emissioni di un campione di polonio-210. Per farlo si servirono di uno strumento che emetteva un segnale quando captava una particella α proveniente dal campione. Lo strumento, in seguito, prese il nome di contatore di Geiger e viene usato ancora oggi per conteggiare le emissioni radioattive. Gli scienziati divisero il tempo di osservazione totale, pari a circa 5 ore, in 2.608 intervalli di 7,5 secondi ciascuno e contarono il numero di particelle α emesse in ogni intervallo: nel complesso registrarono 10.097 emissioni. Poi elaborarono tali dati, contando il numero di intervalli in cui nessun atomo si era disintegrato, il numero di intervalli in cui era avvenuta una sola disintegrazione, il numero di intervalli in cui ne erano avvenute due, poi tre, quattro e così via.
La distribuzione delle emissioni è descritta dalla seguente tabella.

Numero particelle emesse	Frequenze osservate
0	57
1	203
2	383
3	525
4	532
5	408
6	273

[47] Fonte dell'immagine: www.passionescienza.it/la-radioattivita/.

7	139
8	45
9	27
10 o più	16

6.2.1 Quesiti

1. *Il matematico Harry Bateman propose di modellizzare il fenomeno mediante la distribuzione di Poisson. Stabilisci il valore del parametro della distribuzione e calcola mediante tale distribuzione le probabilità di avere* $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ *o più emissioni nell'intervallo di ampiezza 7,5 secondi. Approssima alla quarta cifra decimale.*

2. *Confronta i valori di probabilità forniti dal modello di Poisson con i dati osservati. Allo scopo realizza una tabella e un grafico opportuno.*

3. *Quali ipotesi sul fenomeno è opportuno assumere affinché abbia senso modellizzarlo mediante la distribuzione di Poisson?*

4. *Tramite questo esperimento, Rutherford e Geiger, intendevano sondare l'ipotesi che le emissioni fossero processi "casuali" e uniformi. Quali conclusioni a tale proposito permette di trarre l'esperimento? Argomenta. (Suggerimento: quali assunzioni sono alla base del modello utilizzato? Ripensa al ragionamento seguito per esaminare il bombardamento di Londra durante la Seconda Guerra Mondiale[a].)*

5. *Il modello proposto è analogo a quello utilizzato per rappresentare il bombardamento su Londra nella Seconda Guerra Mondiale. Indica quali elementi dei due modelli sono in corrispondenza.*

[a] Qui si fa riferimento a quanto presentato nel video "Bombe su Londra".

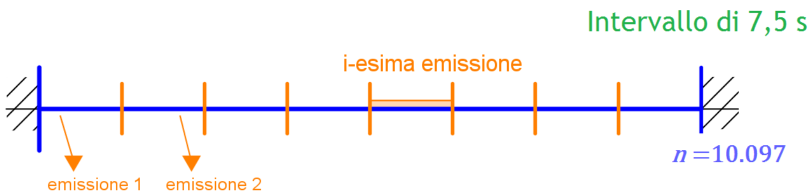
6.2.2 Risoluzione

1. *Il matematico Harry Bateman propose di modellizzare il fenomeno mediante la distribuzione di Poisson. Stabilisci il valore del parametro della distribuzione e calcola mediante tale distribuzione le probabilità di avere* $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ *o più emissioni nell'intervallo di ampiezza 7,5 secondi. Approssima alla quarta cifra decimale.*

   Vogliamo stabilire il parametro λ della distribuzione di Poisson: esso rappresenta il numero medio di emissioni (successi) dell'intero campione di polonio nell'intervallo di 7,5 s. Possiamo calcolarlo, allora, dividendo il numero totale di emissioni osservate per il numero di intervalli temporali:

$$\lambda = \frac{10.097}{2.608} \simeq 3,87.$$

Osservazione
Fissato un intervallo di durata 7,5 s, possiamo schematizzare la situazione come segue:



- si considera una sequenza di $n = 10.097$ prove, una per ogni emissione;
- ciascuna prova può avere due soli esiti: nel fissato intervallo l'emissione si verifica (successo), l'emissione non si verifica in esso;
- la probabilità che una data emissione avvenga nell'intervallo fissato è[48] $p = \frac{1}{2.608}$ dato che gli intervalli sono 2.608.

Anche considerando lo schema grafico proposto, osserviamo che si può esprimere λ nella forma:

$$\lambda = np = 10.097 \cdot \frac{1}{2.608} = \frac{10.097}{2.608}.$$

Sia ora X la variabile aleatoria che conta il numero di emissioni nell'intervallo di 7,5 s. Secondo il modello di Poisson la probabilità di avere k emissioni nell'intervallo è[49] $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ dove $\lambda \simeq 3,87$.

[48] Per determinare tale valore stiamo assumendo l'ipotesi che l'emissione sia "casuale" e uniforme, ma di questo ci occuperemo in dettaglio nel quesito 3.

[49] Per effettuare i calcoli può essere utile utilizzare un foglio Excel. Per calcolare $P(X = k)$ si utilizza la funzione di Excel "=Poisson(k;λ,0)" dove $\lambda \simeq 3,87$.

Allora, al variare di k, otteniamo:

k	**P(X=k)**
0	0,0209
1	0,0807
2	0,1562
3	0,2015
4	0,1949
5	0,1509
6	0,0973
7	0,0538
8	0,0260
9	0,0112
10 o più	0,0065

2. *Confronta i valori di probabilità forniti dal modello di Poisson con i dati osservati. Allo scopo realizza una tabella e un grafico opportuno.*

   Vogliamo confrontare le previsioni del modello con i dati osservati. Possiamo procedere in uno dei modi seguenti.

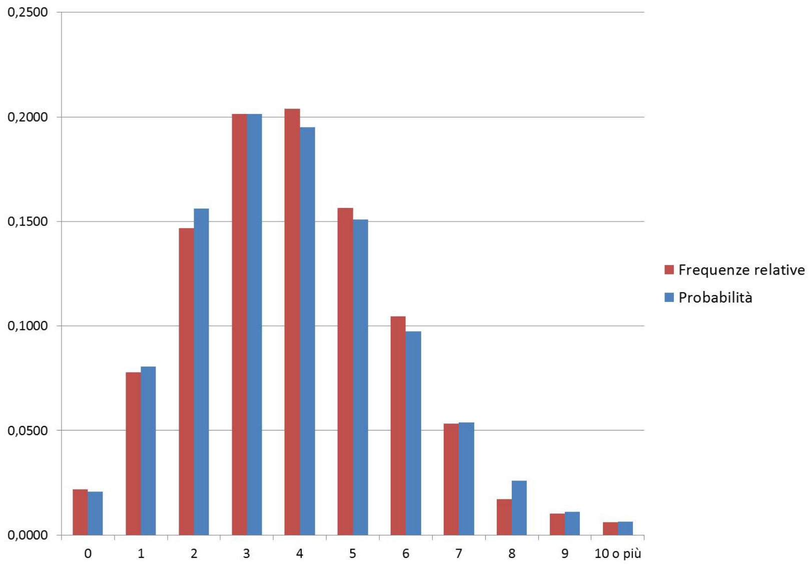
   a) Calcolare le frequenze relative osservate (dividendo ogni frequenza per il numero totale degli intervalli) e confrontarle con le probabilità calcolate.

   b) Confrontare le frequenze osservate con le frequenze teoriche (che possiamo ottenere moltiplicando le probabilità calcolate per il numero totale di intervalli e poi approssimando all'intero più vicino).

   Ecco i risultati delle due elaborazioni.

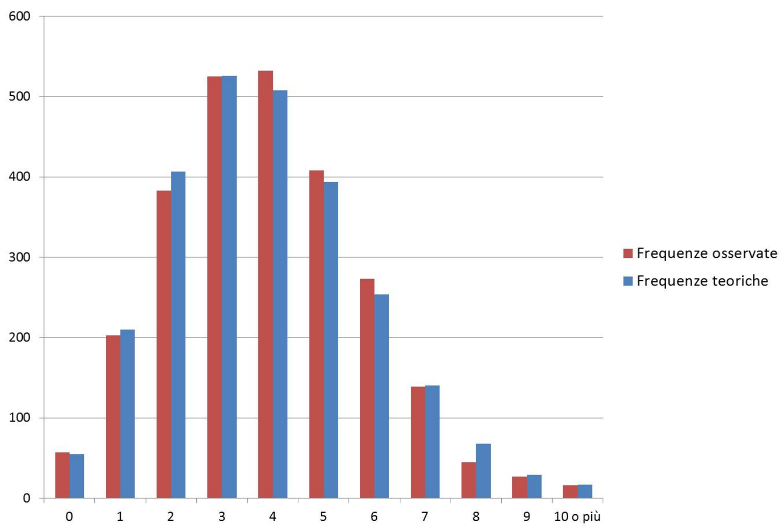
   a) Confronto tra frequenze relative osservate e probabilità.

k	**Frequenze osservate**	**Frequenze relative**	**Probabilità**
0	57	0,0219	0,0209
1	203	0,0778	0,0807
2	383	0,1469	0,1562
3	525	0,2013	0,2015
4	532	0,2040	0,1949
5	408	0,1564	0,1509
6	273	0,1047	0,0973
7	139	0,0533	0,0538
8	45	0,0173	0,0260
9	27	0,0104	0,0112
10 o più	16	0,0061	0,0065



b) Confronto tra frequenze osservate e teoriche.

k	Frequenze osservate	Probabilità	Frequenze teoriche
0	57	0,0209	55
1	203	0,0807	210
2	383	0,1562	407
3	525	0,2015	526
4	532	0,1949	508
5	408	0,1509	394
6	273	0,0973	254
7	139	0,0538	140
8	45	0,0260	68
9	27	0,0112	29
10 o più	16	0,0065	17



Possiamo quindi osservare che le frequenze osservate sono "vicine" a quelle previste dal modello di Poisson. Pertanto il modello di Poisson sembra rappresentare in modo adeguato il fenomeno in esame[50].

3. *Quali ipotesi sul fenomeno è opportuno assumere affinché abbia senso modellizzarlo mediante la distribuzione di Poisson?*

   Le ipotesi che è opportuno assumere per utilizzare il modello di Poisson sono:

   (a) una (ogni) data emissione ha la stessa probabilità di verificarsi in ogni intervallo di 7,5 s;

   (b) le emissioni sono indipendenti, ossia ogni emissione non è influenzata dalle altre[51];

   (c) l'evento è "raro", cioè λ, il numero medio di emissioni nell'intervallo di 7,5 s è "piccolo" rispetto al numero totale di prove.

4. *Tramite questo esperimento, Rutherford e Geiger, intendevano sondare l'ipotesi che le emissioni fossero processi "casuali" e uniformi. Quali conclusioni a tale proposito permette di trarre l'esperimento? Argomenta.*
   (Suggerimento: quali assunzioni sono alla base del modello utilizzato? Ripensa al ragionamento seguito per esaminare il bombardamento di Londra durante la Seconda Guerra Mondiale.)

   Cerchiamo di riassumere ciò che abbiamo fatto finora in questa attività e di riorganizzarlo secondo l'ordine logico che ci è utile.
   In sostanza ciò che abbiamo seguito è lo schema utilizzato nel secolo scorso da Rutherford e Geiger. Ossia:

   (a) abbiamo assunto l'ipotesi che le emissioni siano fenomeni "casuali" e uniformi,

   (b) abbiamo costruito un modello di Poisson per descrivere la situazione il processo,

   (c) abbiamo calcolato le probabilità previste dal modello,

   (d) abbiamo confrontato i dati osservati con quelli forniti dal modello.

   A questo punto, siccome lo scostamento tra i dati osservati e quelli forniti dal modello è "piccolo"[52], possiamo affermare che i dati sono coerenti col modello. Pertanto, come pensavano Rutherford e Giger, è ***plausibile*** che l'emissione radioattiva sia un processo "casuale" e uniforme[53]. Tale conclusione è stata poi confermata da numerosi esperimenti analoghi.

[50] Queste ultime considerazioni sulla "bontà del modello" si possono precisare mediante opportuni strumenti matematici, ma ciò esula dai nostri scopi.

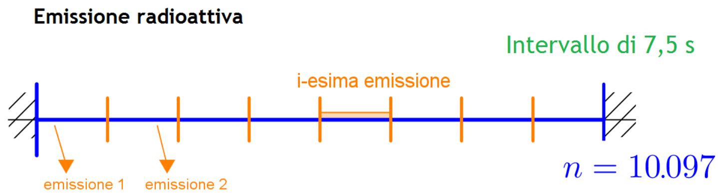
[51] Possiamo esprimere sinteticamente le ipotesi (a) e (b) parlando di emissione "causale" e uniforme, come indicato nel paragrafo 3.1.

[52] Precisamente lo abbiamo osservato, in modo qualitativo, nella domanda 2 tramite i grafici.

[53] Utilizzando il linguaggio statistico, possiamo concludere che tale ipotesi "non viene rifiutata". In altre parole, non si è così dimostrato che il fenomeno del decadimento radioattivo è "causale" e uniforme, ma si è giunti ad una conclusione più debole: cioè che tale ipotesi sia plausibile.

5. *Il modello proposto è analogo a quello utilizzato per rappresentare il bombardamento su Londra nella Seconda Guerra Mondiale. Indica quali elementi dei due modelli sono in corrispondenza.*

La corrispondenza tra i due modelli è suggerita dal confronto tra gli espressivi schemi grafici che abbiamo proposto in precedenza.



Precisamente, la corrispondenza tra i due modelli di Poisson si può così sintetizzare.

	Bombe su Londra	**Emissione radioattiva**
Suddivisione	settore della città (576) bomba (537)	intervallo di tempo (2.608) particella α (10.097)
Evento conteggiato	esplosione bomba sul settore	emissione particella α nell'intervallo

Inoltre:

# medio realizzazioni (λ)	0,93	3,87
# prove (n)	537	10.097
probabilità realizzazione evento (nella prova) (p)	$\frac{1}{576}$	$\frac{1}{2.608}$

Osserviamo infine che alla base di entrambi i modelli si ha l'ipotesi di "casualità" e uniformità del bombardamento oppure dell'emissione.

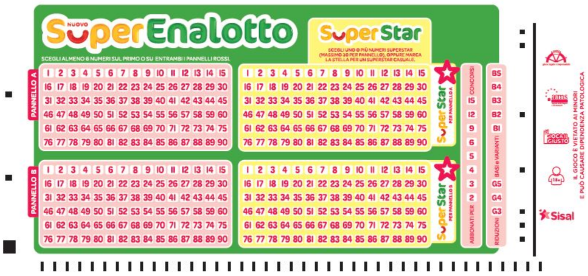
6.3 Prevedere il numero di vincitori al SuperEnalotto - attività

L'intento dell'attività è quello di costruire dei modelli probabilistici che permettano di affermare qualcosa sul numero di vincitori ad un dato concorso del SuperEnalotto.

Leggi il testo proposto e poi rispondi ai quesiti che seguono aiutandoti con un foglio elettronico. Può esserti d'aiuto esaminare prima il video "Bombe su Londra".

Per giocare al SuperEnalotto si devono scegliere 6 numeri interi compresi tra 1 a 90. Si vince se una delle combinazioni giocate contiene 2, 3, 4, 5, o 6 numeri uguali ai 6 numeri estratti[54].

Il gioco è gestito dalla società Sisal sul sito della quale si possono [55] trovare tutte le informazioni utili al riguardo.



In particolare sono indicati i modi (detti categorie) in cui si può vincere: indovinare tutti e sei i numeri estratti (categoria 6), indovinare 5 numeri più il jolly (categoria 5+1)...

Categorie	Probabilità di Vincita	Vincite
6 PIÙ RICCO	1 su 622.614.630	Jackpot milionario
5+1	1 su 103.769.105	311.000€
5	1 su 1.250.230	32.000€
4	1 su 11.907	300€
3 PIÙ RICCO	1 su 327	25€
2 NOVITÀ	1 su 22	5€

Inoltre, per ogni categoria, sono riportate le **probabilità** di vincita e la cifra che viene pagata in caso di vincita.

Il sito non fornisce il numero n di combinazioni giocate. Però esso si può ricavare in modo indiretto osservando che:

- il montepremi di ogni concorso è il 60% delle quote giocate[56];
- il costo di ogni combinazione giocata è 1 euro.

Pertanto n si può ricavare dall'uguaglianza:

$$\text{montepremi concorso} = \frac{60}{100} \cdot n.$$

[54] In realtà ci sono altre combinazioni che portano alla vittoria, per esempio quelle che utilizzano il numero jolly o il superstar, ma per semplicità non ce ne occuperemo in questa attività.

[55] Il sito a cui ci si riferisce è *http : //www.sisal.it/superenalotto* e da esso sono state tratte le immagini di questa scheda.

[56] Dal regolamento del SuperEnalotto (Decreto 109175 dell'Agenzia delle Dogane e dei Monopoli del 15/11/2015) in vigore dal 31 gennaio 2016.

Il montepremi di ogni concorso è riportato sul sito.
Ad esempio, quello relativo al "Concorso 22" del 20/02/2016 è indicato nel rettangolo evidenziato in figura.

Estrazione del 20/2/2016
CONCORSO NUMERO 22

Combinazione vincente: 29 32 33 49 54 85
Jolly: 16
SuperStar: 44
Video estrazione

Montepremi

del concorso	4.471.671,00€
Riporto Jackpot concorso precedente	47.181.750,01€
Attribuzione da D.D. 2011/49938/Giochi/Ena del 16/12/11 art. 2 comma 2	4.058,48€
Montepremi totale del concorso	51.657.479,49€

Quote SuperEnalotto

Categoria	N. Vincite	Euro
Punti 6	0	0,00€
Punti 5+1	0	0,00€
Punti 5	5	37.562,04€
Punti 4	472	402,20€
Punti 3	18854	30,46€
Punti 2	301445	5,93€

Se a questo punto ti stai chiedendo quali siano stati gli esiti del concorso 22, basta consultare il sito (figura a lato).

6.3.1 Quesiti

1. *Consideriamo un concorso del SuperEnalotto. Indichiamo con Y_6 e Y_5 le variabili aleatorie che contano rispettivamente il numero di vincitori nelle categorie "6 punti" e "5 punti". Qual è una distribuzione di probabilità adeguata per tali variabili aleatorie? Spiega le ragioni della tua scelta.*

2. *Considera ora il concorso n.22 del 20/02/2016.*

   a. *Determina il valore dei parametri delle due distribuzioni in esame. (Suggerimento: trova prima il numero n di combinazioni giocate e la probabilità p di vincita qualora si giochi una sola schedina.)*

   b. *Al variare del numero di vincitori k (dove $k = 0, 1, 2, \ldots$) qual è la probabilità di avere k vincitori nella categioria "6"? E nella categoria "5"? Utilizza un foglio elettronico.*

3. *Confronta il modello probabilistico che hai realizzato con il numero effettivo di vincitori al concorso n.22 riportato nella tabella precedente. Il modello ti sembra coerente con le osservazioni?*

4. *Analizziamo, ora, la categoria "4" del concorso e proviamo a modellizzare la situazione mediante la distribuzione di Poisson. Mediante il foglio elettronico determina per quanti valori di k la probabilità che vi siano k vincitori è maggiore di 0,01. E maggiore di 0,02?*

5. *Confronta il modello probabilistico che hai realizzato con il numero effettivo di vincitori al concorso n.22. Cosa osservi?*

6. *Sulla base dei valori di probabilità nelle tabelle, su quale numero di vincitori al prossimo concorso scommetteresti per ciascuna delle tre categorie analizzate? Ritieni che tutti e tre i modelli siano utili per prevedere il numero di vincitori ad un dato concorso del SuperEnalotto? Giustifica.*

Approfondimento

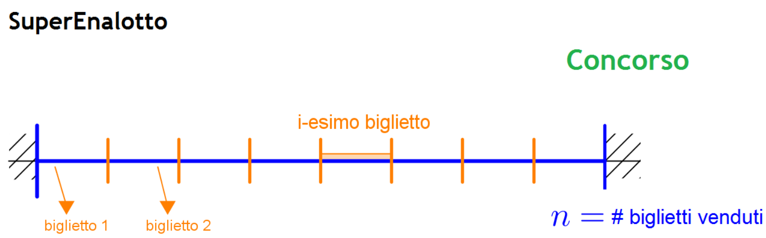
Considera più concorsi (per esempio quelli di un mese specifico), calcola i parametri λ relativi alla vincita nelle tre categorie considerate.
(Attenzione: il valore del parametro λ cambia da concorso a concorso!)
Confronta i valori di probabilità calcolati con il numero effettivo di vincitori. Tale confronto ti suggerisce conclusioni analoghe a quelle a cui eri giunto relativamente alla domanda 6? Ossia tutti e tre i modelli sono utili per la previsione del numero di vincitori in un dato concorso? [57]

[57] Nella risoluzione riportiamo, a titolo di esempio, i dati relativi a tutti i concorsi del febbraio 2016.

6.3.2 Risoluzione

1. *Consideriamo un concorso del SuperEnalotto. Indichiamo con Y_6 e Y_5 le variabili aleatorie che contano rispettivamente il numero di vincitori nelle categorie "6 punti" e "5 punti". Qual è una distribuzione di probabilità adeguata per tali variabili aleatorie? Spiega le ragioni della tua scelta.*

   La distribuzione di probabilità di Poisson è un modello sensato per descrivere la situazione in esame, visto che, almeno in prima approssimazione, possiamo assumere che l'estrazione sia "casuale" e uniforme[58]. E inoltre per un giocatore che punta su una sola combinazione, vincere nelle categorie "5" punti o "6" punti è un evento ragionevolmente "raro"[59].
   La situazione si può schematizzare nel modo seguente.

   Osserviamo che il fenomeno considerato si può modellizzare anche con la distribuzione binomiale. In tal caso però i calcoli sono più articolati[60].

2. *Considera ora il concorso n.22 del 20/02/2016.*

   a. *Determina il valore dei parametri delle due distribuzioni in esame. (Suggerimento: trova prima il numero n di combinazioni giocate e la probabilità p di vincita qualora si giochi una sola schedina.)*

   Categoria "6"
   Per determinare il valore del parametro λ, conviene trovare:
   - il numero n di combinazioni giocate;
   - la probabilità p di vincita, qualora si giochi una sola combinazione.

   Potremmo così ricavare il valore di λ dato che vale $\lambda = np$.

   Ora, nella tabella "categorie/probabilità di vincita" che si può trovare nelle pagine precedenti, leggiamo direttamente

   $$p = \frac{1}{622.614.630}$$

   per trovare il numero di giocate, invece, basta ricorrere all'uguaglianza illustrata in precedenza:

   $$\text{montepremi} = \frac{60}{100} \cdot n$$

[58] Nel senso indicato nel paragrafo 3.1.
[59] Come risulta dal numero di vincitori nella categoria "5 punti" del concorso n.22 e da quello dei vincitori degli altri concorsi nella stessa categoria.
[60] Come osservato, in generale, nel paragrafo 2.2.

Mentre il valore del montepremi si deduce dalla tabella "montepremi" riportata nelle pagine precedenti da cui si ricava:

$$n = 7.452.785.$$

Concludiamo così che $\lambda = np \simeq$0,0120.
Tale valore rappresenta il numero medio di vincitori della categoria "6".

Categoria "5"
In questo caso la tabella fornisce il valore $p = \dfrac{1}{1.250.230}$.
Visto che il concorso è lo stesso della categoria precedente abbiamo ancora $n = 7.452.785$.
Otteniamo, quindi, che il numero medio di vincitori della categoria "5" è $\lambda = np \simeq$ 5,9611.

b. *Al variare del numero di vincitori k (dove $k = 0, 1, 2, ...$) qual è la probabilità di avere k vincitori nella categioria "6"? E nella categoria "5"? Utilizza un foglio elettronico.*

Categoria "6"
Utilizzando la distribuzione di Poisson per $\lambda \simeq$ 0,0120 abbiamo:

k	$\mathbf{P(Y_6=}k\mathbf{)}$
0	0,9881
1	0,0118
2	0,0001
3	0,0000
4	0,0000
5	0,0000

I valori che seguono nella tabella sono praticamente nulli. La probabilità di avere più di un vincitore è molto piccola.

Categoria "5"
Utilizzando la distribuzione di Poisson per $\lambda \simeq$ 5,9611 abbiamo:

k	$\mathbf{P(Y_5=}k\mathbf{)}$
0	0,0026
1	0,0154
2	0,0458
3	0,0910
4	0,1356

k	$\mathbf{P(Y_5=}k\mathbf{)}$
5	0,1617
6	0,1606
7	0,1368
8	0,1019
9	0,0675

k	$\mathbf{P(Y_5=}k\mathbf{)}$
10	0,0402
11	0,0218
12	0,0108
13	0,0050
14	0,0021

k	$\mathbf{P(Y_5=}k\mathbf{)}$
15	0,0008
16	0,0003
17	0,0001
18	0,0000
19	0,0000

3. *Confronta il modello probabilistico che hai realizzato con il numero effettivo di vincitori al concorso n.22 riportato nella tabella precedente. Il modello ti sembra coerente con le osservazioni?*

Nel concorso n.22 vi sono 0 vincitori per la categoria "6" e 5 vincitori per la categoria "5". Per quanto calcolato nel quesito 2 la probabilità di non avere vincitori nella categoria "6" è circa del 98,8%, quindi il risultato è coerente con la previsione. E la probabilità di avere 5 vincitori nella categoria "5" è del 16,2% ed è il valore di probabilità maggiore tra tutti quelli calcolati. I dati osservati, pertanto, sembrano essere coerenti con quelli forniti dal modello.

4. *Analizziamo, ora, la categoria "4" del concorso e proviamo a modellizzare la situazione mediante la distribuzione di Poisson. Mediante il foglio elettronico determina per quanti valori di k la probabilità che vi siano k vincitori è maggiore di 0,01. E maggiore di 0,02?*

Nella tabella "categoria/vincitori," leggiamo che per la categoria "4" la probabilità p di vincita, giocando un solo biglietto, è $p = \dfrac{1}{11.907}$.
Visto che il concorso è lo stesso delle categorie precedenti abbiamo ancora $n = 7.452.785$.
Otteniamo quindi $\lambda = np \simeq 626$. Esso è il numero medio di vincitori della categoria "4".
Utilizzando la distribuzione di Poisson abbiamo allora[61]

$\boldsymbol{k}$	$\mathbf{P(Y_4 = \boldsymbol{k})}$
0	$1,4724 \cdot 10^{-272}$
...	...
10	$3,7447 \cdot 10^{-251}$
...	...
100	$7,0736 \cdot 10^{-151}$
...	...
500	$2,1864 \cdot 10^{-8}$
...	...
600	$9,4510 \cdot 10^{-3}$
601	$9,8428 \cdot 10^{-3}$
602	$1,0234 \cdot 10^{-2}$
603	$1,0623 \cdot 10^{-2}$
604	$1,1008 \cdot 10^{-2}$
605	$1,1389 \cdot 10^{-2}$
...	...
646	$1,1410 \cdot 10^{-2}$
647	$1,1038 \cdot 10^{-2}$
648	$1,0662 \cdot 10^{-2}$
649	$1,0283 \cdot 10^{-2}$
650	$9,9016 \cdot 10^{-3}$
...	...

Quindi vale $P(Y_4 = k) > 0{,}01$ per tutti i valori di k nell'intervallo $\forall k \in [602, 649]$, ovvero in ben 48 casi.
Non ci sono, invece, valori di k tali che probabilità $P(Y_4 = k) > 0{,}02$.

[61] Indichiamo con Y_4 la variabile aleatoria che conta il numero di vincitori nella categoria "4".

Possiamo dunque sintetizzare la situazione dicendo che, a differenza delle due categorie “5” e “6”, per la categoria “4” non vi sono valori di probabilità “grandi”, ma ve ne sono “molti” non troppo “piccoli” (come i 48 compresi tra 0,01 e 0,02).

5. *Confronta il modello probabilistico che hai realizzato con il numero effettivo di vincitori al concorso n.22. Cosa osservi?*

   Nel concorso n.22 ci sono 472 vincitori nella categoria “4”, mentre la probabilità teorica di avere $k = 472$ vincitori è $1,88 \cdot 10^{-11}$. Un valore decisamente piccolo. D’altronde, come visto relativamente alla domanda 4, la distribuzione di Y_4 non ha valori di probabilità “grandi”; ad esempio, non vi sono valori di probabilità maggiori di 0,02.

6. *Sulla base dei valori di probabilità nelle tabelle, su quale numero di vincitori al prossimo concorso scommetteresti per ciascuna delle tre categorie analizzate? Ritieni che tutti e tre i modelli siano utili per prevedere il numero di vincitori ad un dato concorso del SuperEnalotto? Giustifica.*

   In base ai valori di probabilità calcolati, ci aspettiamo ragionevolmente che nel prossimo concorso vi siano 0 o 1 vincitori nella categoria “6”, da 3 a 9 (non troppi di meno, non troppi di più) nella categoria “5”. Invece, per quanto osservato nella risposta al quesito 4, non possiamo fare previsioni così precise per la categoria “4”, dato che vi sono “molti” valori di probabilità “non troppo” piccoli.

   Quindi per quanto riguarda le prime due categorie il modello di Poisson è utile per prevedere il numero di vincitori; infatti in questi casi vi sono pochi valori di k che hanno probabilità “non troppo piccola”. Nella categoria “4”, invece, questo non succede; pertanto non è utile modellizzarla mediante la distribuzione di Poisson.

Approfondimento

Considera più concorsi (per esempio quelli di un mese specifico), calcola i parametri λ relativi alla vincita nelle tre categorie considerate. (Attenzione: il valore del parametro λ cambia da concorso a concorso!)
Confronta i valori di probabilità calcolati con il numero effettivo di vincitori. Tale confronto ti suggerisce conclusioni analoghe a quelle a cui eri giunto relativamente alla domanda 6? Ossia tutti e tre i modelli sono utili per la previsione del numero di vincitori in un dato concorso?

Analizziamo, ad esempio, i concorsi del mese di febbraio 2016.

Concorso n.	$\boldsymbol{\lambda_6}$	**Vincite "6"**	$\boldsymbol{\lambda_5}$	**Vincite "5"**	$\boldsymbol{\lambda_4}$	**Vincite "4"**
14	0,0101	0	5,0272	7	527,8591	463
15	0,0097	0	4,8125	2	505,3131	552
16	0,0123	0	6,1259	9	643,2146	515
17	0,0098	0	4,8621	2	510,5178	454
18	0,0097	0	4,8176	6	505,8482	629
19	0,0120	0	5,9942	0	629,3922	456
20	0,0097	0	4,8450	8	508,7186	552
21	0,0096	0	4,7730	3	501,1604	445
22	0,0120	0	5,9611	5	625,9163	472
23	0,0097	0	4,8254	1	506,6631	420
24	0,0095	0	4,7399	4	497,6911	385
25	0,0120	0	5,9545	3	625,2194	589

A questo punto si può ripetere, per ogni singolo concorso, l'intera analisi effettuata per in concorso n.22 secondo lo schema delle domande precedenti.

6.4 Simulazione di eventi "rari" - attività con GeoGebra

Vogliamo investigare ulteriormente la situazione, riguardante il bombardamento di Londra durante la Seconda Guerra Mondiale, discussa nel video "Bombe su Londra".
Ti consigliamo di esaminarlo.
Leggi il testo seguente e utilizza il file GeoGebra Simulazione.ggb per rispondere ai quesiti che seguono. L'uso del file è spiegato in dettaglio nel video "Simulazione bombardamento".

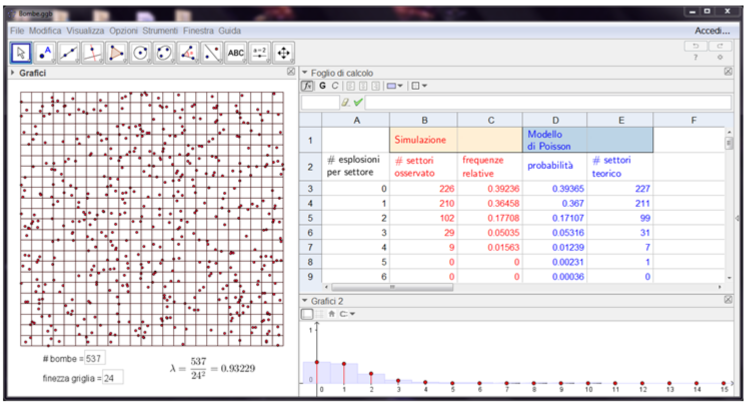
Il modello e la sua storia
Dal giugno del 1944 al marzo del 1945 i tedeschi bombardarono l'Inghilterra con 9.251 bombe volanti V-1 di cui 2.419 raggiunsero Londra. Tra queste 537 caddero nella zona sud di Londra.
Gli analisti inglesi suddivisero in settori l'intera zona interessata, che ha un'estensione di 144 km^2, utilizzando una griglia 24 $\times$ 24 (ossia con 576 quadratini uguali, ciascuno di area pari a 0,25km^2). Poi contarono le bombe esplose in ciascun settore e osservarono che alcuni settori erano stati colpiti anche 4 volte, mentre molti non era mai stati colpiti.
I dati raccolti sono riportati in tabella.

# esplosioni per settore	0	1	2	3	4	5	6	7
frequenza osservata	229	211	93	35	7	0	0	1

Così gli inglesi iniziarono a chiedersi se la tecnologia tedesca fosse tanto avanzata da poter colpire con precisione obiettivi specifici.
L'attuario R.D. Clarke nel 1946 pubblicò[62] i risultati dello studio volto a stabilire se il bombardamento fosse mirato o se le bombe fossero cadute "casualmente".
Utilizzò, in particolare, la distribuzione di Poisson per prevedere le frequenze teoriche di caduta delle bombe e ottenne i dati seguenti.

# esplosioni per settore	0	1	2	3	4	5	6	7
frequenza teorica	227	211	99	31	7	1	0	0

Come utilizzare il file *Simulazione.ggb*
L'utilizzo del file è spiegato in dettaglio nel video "Simulazione bombardamento", che puoi trovare al link www.youtube.com/watch?v=7cLcKSQkMDM&feature=youtu.be.
Ne proponiamo qui una sintesi.



[62] R.D.Clarke, An Application of the Poisson Distribution, Journal of the Institute of Actuaries, vol. 72 (1946), p.481.

Il file *Simulazione.ggb* è stato costruito per permetterti di simulare un bombardamento e confrontare i risultati ottenuti con il modello teorico della distribuzione di Poisson.
In particolare possiamo modificare il numero di bombe e la finezza della griglia.
Per esempio, se vogliamo simulare il lancio di 500 bombe su una griglia 10×10 (100 quadratini) dovremo inserire nelle relative celle i valori dei parametri: "#bombe" = 500; "finezza griglia" = 10. Gli esiti del bombardamento sono rappresentati nel riquadro "Grafici".
Se, invece, vogliamo analizzare la situazione dal punto di vista numerico, allora, possiamo far riferimento al "Foglio di calcolo": in rosso sono riportati i dati riguardanti la simulazione effettuata, mentre nelle adiacenti colonne in blu vengono calcolati i corrispondenti valori teorici previsti dal modello probabilistico di Poisson.
Inoltre la visualizzazione "Grafici2" confronta le frequenze relative osservate nel bombardamento simulato (rappresentate come segmenti rossi) e le frequenze teoriche calcolate col modello (rappresentate come rettangoli blu).

Quesiti

1. *Simula, utilizzando il file "Simulazione.ggb", il bombardamento di Londra del 1944-45 con le V-1: fissa i valori dei parametri come indicato nel testo precedente ed effettua più simulazioni. Confronta i valori osservati nelle simulazioni con quelli previsti dal modello mediante le finestre "Foglio di calcolo" e "Grafico 2" del file. Ti sembra che siano "vicini"?*

2. *Basandoti sugli esiti delle tue prove, spiega perché il bombardamento tedesco poteva essere "casuale" e uniforme.*
   (Suggerimento: segui lo schema di ragionamento adottato nel video "Bombe su Londra" e nell'attività "Un esperimento storico: il decadimento radioattivo", quesito 4.)

Traccia risolutiva

1. La domanda è di tipo qualitativo, pertanto non ammette una risposta univoca. Ci aspettiamo che le simulazioni forniscano dati "vicini" a quelli dei dati previsti dal modello di Poisson.

2. Basta ripercorre il ragionamento seguito nel video *Bombe su Londra.* Esso è riportato in dettaglio anche nelle risposte ai quesiti 4 e 5 dell'attività "Un esperimento storico: il decadimento radioattivo" del paragrafo 6.2.