

6.2 Un esperimento storico: il decadimento radioattivo - attività

L'intento dell'attività è quello di investigare il fenomeno del decadimento radioattivo mediante il modello di Poisson. Lo faremo seguendo, essenzialmente, l'approccio seguito da Rutherford all'inizio del Novecento.

Leggi il testo proposto e poi rispondi ai quesiti che seguono aiutandoti con un foglio elettronico. Può esserti d'aiuto esaminare prima il video "Bombe su Londra".

I fisici Ernest Rutherford (1871-1937) e Johannes Wilhelm Geiger (1882-1945) assieme ai loro collaboratori James Chadwick (1891-1974) e Charles Drummond Ellis (1895-1980) nei laboratori di Cambridge, studiarono i processi di emissione di particelle da sostanze radioattive.

Essi osservarono che alcune sostanze, come per esempio il radio e l'uranio, cambiano lentamente natura nel tempo. Accade, infatti, che gli atomi si disintegrino ed emettano di conseguenza particelle radioattive che, in seguito, furono classificate in particelle alfa (α), beta (β) e raggi gamma (γ). Ad esempio l'uranio, con un lungo procedimento di decadimento che dura miliardi di anni, si trasforma da uranio-238 (radioattivo) in piombo-206 (non radioattivo).

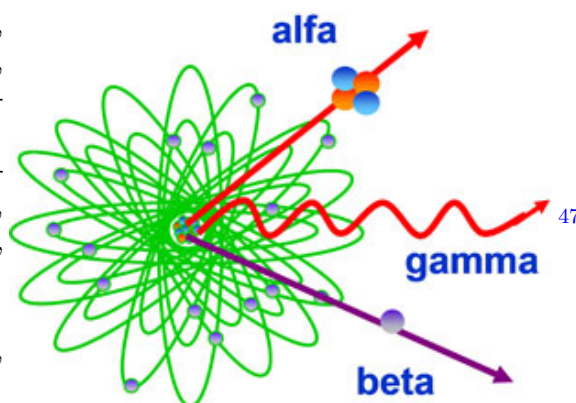


Fig.1

Le emissioni di radiazioni, quindi, sono utili segnali dell'avvenuta disintegrazione.

I fisici presentarono i risultati del loro lavoro nel libro "Radiations from Radioactive Substances" (1930). Nel testo viene presentato un esperimento del 1910 in cui essi studiarono le emissioni di un campione di polonio-210. Per farlo si servirono di uno strumento che emetteva un segnale quando captava una particella α proveniente dal campione. Lo strumento, in seguito, prese il nome di contatore di Geiger e viene usato ancora oggi per conteggiare le emissioni radioattive. Gli scienziati divisero il tempo di osservazione totale, pari a circa 5 ore, in 2.608 intervalli di 7,5 secondi ciascuno e contarono il numero di particelle α emesse in ogni intervallo: nel complesso registrarono 10.097 emissioni. Poi elaborarono tali dati, contando il numero di intervalli in cui nessun atomo si era disintegrato, il numero di intervalli in cui era avvenuta una sola disintegrazione, il numero di intervalli in cui ne erano avvenute due, poi tre, quattro e così via.

La distribuzione delle emissioni è descritta dalla seguente tabella.

Numero particelle emesse	Frequenze osservate
0	57
1	203
2	383
3	525
4	532
5	408
6	273

⁴⁷Fonte dell'immagine: www.passionescienza.it/la-radioattivita/.

7	139
8	45
9	27
10 o più	16

6.2.1 Quesiti

1. Il matematico Harry Bateman propose di modellizzare il fenomeno mediante la distribuzione di Poisson. Stabilisci il valore del parametro della distribuzione e calcola mediante tale distribuzione le probabilità di avere $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ o più emissioni nell'intervallo di ampiezza 7,5 secondi. Approssima alla quarta cifra decimale.
2. Confronta i valori di probabilità forniti dal modello di Poisson con i dati osservati. Allo scopo realizza una tabella e un grafico opportuno.
3. Quali ipotesi sul fenomeno è opportuno assumere affinché abbia senso modellizzarlo mediante la distribuzione di Poisson?
4. Tramite questo esperimento, Rutherford e Geiger, intendevano sondare l'ipotesi che le emissioni fossero processi "casuali" e uniformi. Quali conclusioni a tale proposito permette di trarre l'esperimento? Argomenta. (Suggerimento: quali assunzioni sono alla base del modello utilizzato? Ripensa al ragionamento seguito per esaminare il bombardamento di Londra durante la Seconda Guerra Mondiale^a.)
5. Il modello proposto è analogo a quello utilizzato per rappresentare il bombardamento su Londra nella Seconda Guerra Mondiale. Indica quali elementi dei due modelli sono in corrispondenza.

^aQui si fa riferimento a quanto presentato nel video "Bombe su Londra".

6.2.2 Risoluzione

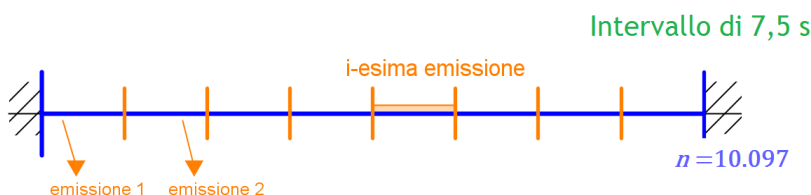
1. Il matematico Harry Bateman propose di modellizzare il fenomeno mediante la distribuzione di Poisson. Stabilisci il valore del parametro della distribuzione e calcola mediante tale distribuzione le probabilità di avere $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ o più emissioni nell'intervallo di ampiezza 7,5 secondi. Approssima alla quarta cifra decimale.

Vogliamo stabilire il parametro λ della distribuzione di Poisson: esso rappresenta il numero medio di emissioni (successi) dell'intero campione di polonio nell'intervallo di 7,5 s. Possiamo calcolarlo, allora, dividendo il numero totale di emissioni osservate per il numero di intervalli temporali:

$$\lambda = \frac{10.097}{2.608} \simeq 3,87.$$

Osservazione

Fissato un intervallo di durata 7,5 s, possiamo schematizzare la situazione come segue:



- si considera una sequenza di $n = 10.097$ prove, una per ogni emissione;
- ciascuna prova può avere due soli esiti: nel fissato intervallo l'emissione si verifica (successo), l'emissione non si verifica in esso;
- la probabilità che una data emissione avvenga nell'intervallo fissato è⁴⁸

$$p = \frac{1}{2.608}$$
 dato che gli intervalli sono 2.608.

Anche considerando lo schema grafico proposto, osserviamo che si può esprimere λ nella forma:

$$\lambda = np = 10.097 \cdot \frac{1}{2.608} = \frac{10.097}{2.608}.$$

Sia ora X la variabile aleatoria che conta il numero di emissioni nell'intervallo di 7,5 s. Secondo il modello di Poisson la probabilità di avere k emissioni nell'intervallo è⁴⁹ $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ dove $\lambda \simeq 3,87$.

⁴⁸Per determinare tale valore stiamo assumendo l'ipotesi che l'emissione sia "casuale" e uniforme, ma di questo ci occuperemo in dettaglio nel quesito 3.

⁴⁹Per effettuare i calcoli può essere utile utilizzare un foglio Excel. Per calcolare $P(X = k)$ si utilizza la funzione di Excel "=Poisson(k;λ,0)" dove $\lambda \simeq 3,87$.

Allora, al variare di k , otteniamo:

k	$P(X=k)$
0	0,0209
1	0,0807
2	0,1562
3	0,2015
4	0,1949
5	0,1509
6	0,0973
7	0,0538
8	0,0260
9	0,0112
10 o più	0,0065

2. *Confronta i valori di probabilità forniti dal modello di Poisson con i dati osservati. Allo scopo realizza una tabella e un grafico opportuno.*

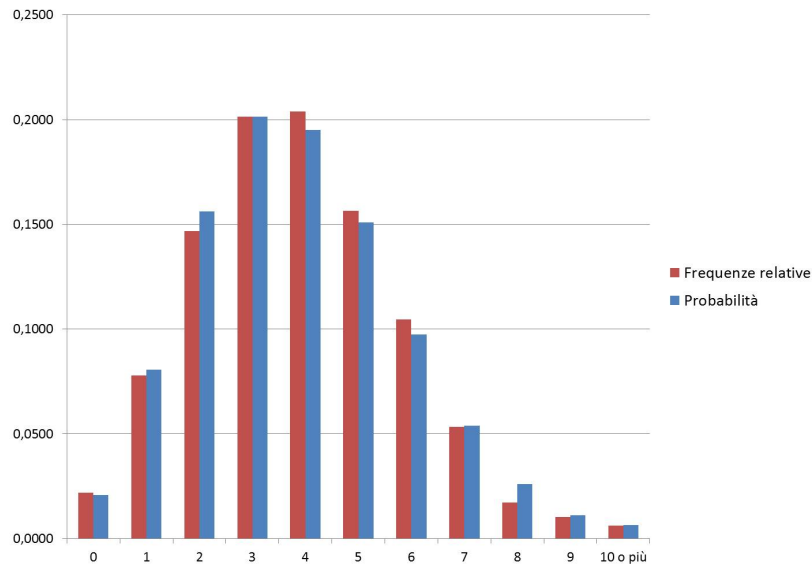
Vogliamo confrontare le previsioni del modello con i dati osservati. Possiamo procedere in uno dei modi seguenti.

- Calcolare le frequenze relative osservate (dividendo ogni frequenza per il numero totale degli intervalli) e confrontarle con le probabilità calcolate.
- Confrontare le frequenze osservate con le frequenze teoriche (che possiamo ottenere moltiplicando le probabilità calcolate per il numero totale di intervalli e poi approssimando all'intero più vicino).

Ecco i risultati delle due elaborazioni.

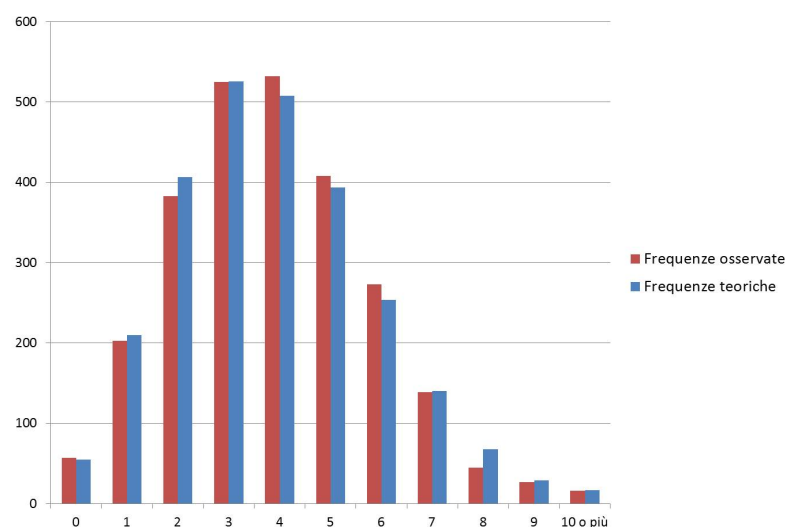
- Confronto tra frequenze relative osservate e probabilità.

k	Frequenze osservate	Frequenze relative	Probabilità
0	57	0,0219	0,0209
1	203	0,0778	0,0807
2	383	0,1469	0,1562
3	525	0,2013	0,2015
4	532	0,2040	0,1949
5	408	0,1564	0,1509
6	273	0,1047	0,0973
7	139	0,0533	0,0538
8	45	0,0173	0,0260
9	27	0,0104	0,0112
10 o più	16	0,0061	0,0065



b) Confronto tra frequenze osservate e teoriche.

k	Frequenze osservate	Probabilità	Frequenze teoriche
0	57	0,0209	55
1	203	0,0807	210
2	383	0,1562	407
3	525	0,2015	526
4	532	0,1949	508
5	408	0,1509	394
6	273	0,0973	254
7	139	0,0538	140
8	45	0,0260	68
9	27	0,0112	29
10 o più	16	0,0065	17



Possiamo quindi osservare che le frequenze osservate sono “vicine” a quelle previste dal modello di Poisson. Pertanto il modello di Poisson sembra rappresentare in modo adeguato il fenomeno in esame⁵⁰.

3. *Quali ipotesi sul fenomeno è opportuno assumere affinché abbia senso modellizzarlo mediante la distribuzione di Poisson?*

Le ipotesi che è opportuno assumere per utilizzare il modello di Poisson sono:

- (a) una (ogni) data emissione ha la stessa probabilità di verificarsi in ogni intervallo di 7,5 s;
- (b) le emissioni sono indipendenti, ossia ogni emissione non è influenzata dalle altre⁵¹;
- (c) l'evento è “raro”, cioè λ , il numero medio di emissioni nell'intervallo di 7,5 s è “piccolo” rispetto al numero totale di prove.

4. *Tramite questo esperimento, Rutherford e Geiger, intendevano sondare l'ipotesi che le emissioni fossero processi “casuali” e uniformi. Quali conclusioni a tale proposito permette di trarre l'esperimento? Argomenta.*

(Suggerimento: quali assunzioni sono alla base del modello utilizzato? Ripensa al ragionamento seguito per esaminare il bombardamento di Londra durante la Seconda Guerra Mondiale.)

Cerchiamo di riassumere ciò che abbiamo fatto finora in questa attività e di riorganizzarlo secondo l'ordine logico che ci è utile.

In sostanza ciò che abbiamo seguito è lo schema utilizzato nel secolo scorso da Rutherford e Geiger. Ossia:

- (a) abbiamo assunto l'ipotesi che le emissioni siano fenomeni “casuali” e uniformi,
- (b) abbiamo costruito un modello di Poisson per descrivere la situazione del processo,
- (c) abbiamo calcolato le probabilità previste dal modello,
- (d) abbiamo confrontato i dati osservati con quelli forniti dal modello.

A questo punto, siccome lo scostamento tra i dati osservati e quelli forniti dal modello è “piccolo”⁵², possiamo affermare che i dati sono coerenti col modello. Pertanto, come pensavano Rutherford e Geiger, è **plausibile** che l'emissione radioattiva sia un processo “casuale” e uniforme⁵³. Tale conclusione è stata poi confermata da numerosi esperimenti analoghi.

⁵⁰Queste ultime considerazioni sulla “bontà del modello” si possono precisare mediante opportuni strumenti matematici, ma ciò esula dai nostri scopi.

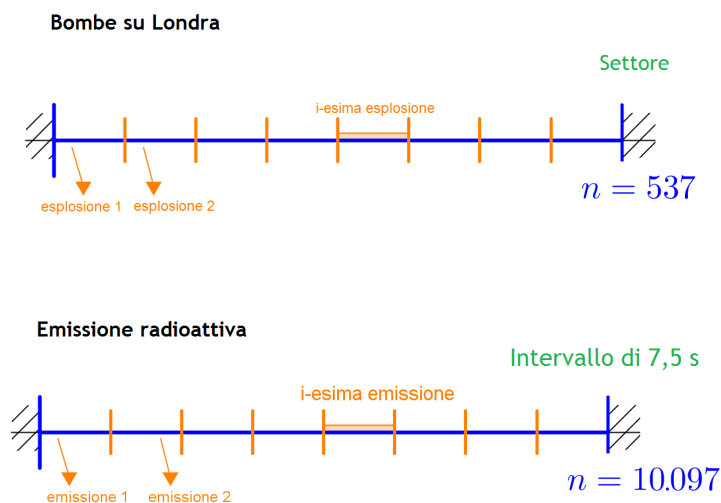
⁵¹Possiamo esprimere sinteticamente le ipotesi (a) e (b) parlando di emissione “causale” e uniforme, come indicato nel paragrafo 3.1.

⁵²Precisamente lo abbiamo osservato, in modo qualitativo, nella domanda 2 tramite i grafici.

⁵³Utilizzando il linguaggio statistico, possiamo concludere che tale ipotesi “non viene rifiutata”. In altre parole, non si è così dimostrato che il fenomeno del decadimento radioattivo è “causale” e uniforme, ma si è giunti ad una conclusione più debole: cioè che tale ipotesi sia plausibile.

5. Il modello proposto è analogo a quello utilizzato per rappresentare il bombardamento su Londra nella Seconda Guerra Mondiale. Indica quali elementi dei due modelli sono in corrispondenza.

La corrispondenza tra i due modelli è suggerita dal confronto tra gli espressivi schemi grafici che abbiamo proposto in precedenza.



Precisamente, la corrispondenza tra i due modelli di Poisson si può così sintetizzare.

	Bombe su Londra	Emissione radioattiva
<i>Suddivisione</i>	settore della città (576) bomba (537)	intervallo di tempo (2.608) particella α (10.097)
<i>Evento conteggiato</i>	esplosione bomba sul settore	emissione particella α nell'intervallo

Inoltre:

<i># medio realizzazioni</i> (λ)	0,93	3,87
<i># prove</i> (n)	537	10.097
<i>probabilità realizzazione</i> <i>evento (nella prova)</i> (p)	$\frac{1}{576}$	$\frac{1}{2.608}$

Osserviamo infine che alla base di entrambi i modelli si ha l'ipotesi di "casualità" e uniformità del bombardamento oppure dell'emissione.