7 Indici della distribuzione - attività

Leggi la questione e poi segui il procedimento che ti viene proposto per affrontarla. Per farlo dovrai anche rispondere ad una domanda.

7.0.1 La questione

Consideriamo la variabile aleatoria di Poisson X che ha parametro λ. Vogliamo esprimere valore atteso e varianza di X in termini del parametro della distribuzione.

In realtà, dall'intrepretazione di λ come numero medio di realizzazioni dell'evento nell'intervallo, ci aspettiamo che la media della distribuzione sia proprio λ. Proviamo, però, a dedurre il risultato per un'altra via.

7.0.2 Costruzione

L'idea è di ricondursi alla *distribuzione binomiale*.

Infatti:

- conosciamo le espressioni degli indici di tale variabile aleatorie in termini dei parametri[63] n, p;
- la distribuzione di X è il limite delle binomiali per $n \to \infty$, nell'ipotesi np costante[64].

Pertanto ci *aspettiamo* che anche gli indici di X siano il limite per $n \to \infty$ dei corrispondenti indici delle variabili aleatorie binomiali approssimanti.

Valore atteso

Il valore atteso della variabile aleatoria binomiale è np, dunque esso è costantemente uguale a λ per ogni variabile aleatoria binomiale approssimante.
Pertanto il suo limite per $n \to \infty$ è proprio λ.
Dunque ci aspettiamo che anche il valore atteso di X sia $\boldsymbol{\lambda}$[65].

Varianza

Prova ad esprimere la varianza di X in termini del parametro λ.
Suggerimento
Segui il procedimento illustrato per il valore atteso e osserva che la varianza della variabile aleatoria binomiale è $np(1-p)$.

[63] Precisamente essi rappresentano rispettivamente il numero di prove del processo e la probabilità di realizzazione dell'evento (spesso indicato come "successo") nella singola prova.
[64] Nel senso indicato nel paragrafo 3.1.
[65] Si può dimostrare formalmente che la nostra congettura è vera.

7.0.3 Risoluzione

1. Il primo passo consiste nell'esprimere la varianza della variabile aleatoria binomiale approssimante in termini di λ e di n.
   Per farlo sfruttiamo l'ipotesi $\lambda = np$; si ottiene così

$$\boxed{\boldsymbol{np(1-p) = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}} \tag{6}$$

2. Ci aspettiamo che la varianza di X sia il limite per $n \to \infty$ dell'espressione appena trovata. Per determinare tale limite è utile tenere presente che esso va effettuato nell'ipotesi λ costante. In definitiva:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = \lambda(1-0) = \boldsymbol{\lambda}} \tag{7}$$

7.0.4 Conclusione

Abbiamo così congetturato che:

> la variabile aleatoria di Poisson di parametro λ ha **valore atteso $\boldsymbol{\lambda}$** e **varianza $\boldsymbol{\lambda}$**.

Si può dimostrare che tale congettura è vera.

Osservazione

In generale il valore atteso di una variabile aleatoria si può interpretare come "centro della distribuzione" e la varianza come "dispersione della distribuzione".

Per la distribuzione di Poisson, tali indici valgono λ, pertanto l'interpretazione geometrica del valore atteso e della varianza ci fornisce anche il significato geometrico del parametro λ: al crescere del parametro λ aumentano anche il punto di massimo e l'apertura del grafico della distribuzione.

E con questo abbiamo giustificato intuitivamente quanto già discusso nel paragrafo 4.2; ciò è visualizzato in modo espressivo nella figura a pagina 21.