

1 Esercizi di Consolidamento

1.1 Sessione suppletiva 2015, Quesito 7

Il testo del quesito è stato modificato per adattarlo al percorso didattico in cui è stato inserito. In particolare nell'originale veniva richiesto di modellizzare la situazione mediante la distribuzione binomiale e successivamente con quella di Poisson.

Qui, invece, è stato considerato solo il modello delle prove ripetute (che si rifà alla distribuzione binomiale), soffermandosi sulle ipotesi da assumere per poterlo utilizzare.

Una fabbrica produce il 3% di prodotti difettosi.

Qual è la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi?

Prima rifletti su come puoi determinare il valore di probabilità richiesto. Poi schematizza la situazione con un opportuno modello e scrivi esplicitamente le ipotesi che assumi sulla situazione affinché abbia senso utilizzare tale modello.

Risoluzione

Per prima cosa è ragionevole assumere che tutti i controlli siano tra loro *indipendenti*, ovvero il giudizio di ogni prodotto del campione (difettoso o meno) non sia influenzato dagli altri controlli. Inoltre tutti i controlli vengano effettuati nelle *medesime condizioni*.

La situazione in esame si può, dunque, modellizzare con lo schema delle prove ripetute¹. Precisamente si ha:

- una sequenza di $n = 100$ prove, una per ogni prodotto del campione,
- ciascuna prova ha due soli esiti possibili: *il prodotto è difettoso, il prodotto non è difettoso*; la probabilità p che il pezzo sia difettoso è $p = 0,03$. Quindi la probabilità q che il pezzo non sia difettoso è $q = 1 - p = 0,97$.

La richiesta è determinare la probabilità di avere *esattamente* 2 pezzi difettosi. Procediamo per passi.

1. Una possibile sequenza di 2 pezzi difettosi (D) su 100 è

$$\underbrace{DD}_{2 \text{ volte}} \underbrace{NNN\dots N}_{98 \text{ volte}}$$

Per la legge della moltiplicazione la probabilità di tale sequenza è

$$0,03^2 \cdot (0,97)^{98}$$

2. Contiamo, ora, il numero di tutte le sequenze di 2 D e 98 N .
Esso è il numero di modi di scegliere 2 posizioni (occupate dai prodotti difettosi) sulle 100 disponibili. Ovvero:

$$\binom{100}{2}$$

Quindi possiamo concludere che:

$$P(2 \text{ pezzi difettosi}) = \binom{100}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^{98} \simeq \boxed{0,225}.$$

¹Esso si indica spesso come “schema di Bernoulli” o “schema successo-insuccesso”.