1.2 Sessione ordinaria 2016, Quesito 4

Al testo originale del quesito è stata aggiunta la domanda a.

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta.

a) Rispondendo a caso al test, qual è la probabilità che la prima risposta sbagliata sia quella relativa alla terza domanda?

b) Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Risoluzione

Assumiamo che le prove siano tra loro *indipendenti*, ovvero che si risponda a caso a ciascuna domanda senza tener conto delle altre, e che le prove avvengano nelle *medesime condizioni.*
Dal testo del quesito deduciamo che la probabilità di rispondere correttamente ad una generica domanda, scegliendo a caso la risposta, è $\boldsymbol{p = \frac{1}{4}}$, mentre quella di sbagliare è $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

a) Sbagliare per la prima volta la risposta relativa alla terza domanda equivale a rispondere correttamente alle prime due e sbagliare la successiva. Pertanto, per la legge della moltiplicazione (eventi indipendenti), la probabilità di tale evento è

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4^3} \simeq \boxed{0{,}047}$$

b) Utilizziamo lo schema delle prove ripetute per modellizzare la situazione. Precisamente si ha:

- una sequenza di $\boldsymbol{n = 10}$ prove, una per ogni domanda del test;
- la probabilità di successo nella singola prova è $p = \frac{1}{4}$.

Nel quesito è richiesta la probabilità di superare il test, ovvero di rispondere correttamente ad *almeno* 8 domande. Ciò significa che il test viene superato con 8 risposte corrette, *oppure* con 9 risposte corrette, *oppure* con 10 risposte corrette.

Invece di applicare la formula generale per determinare le probabilità di questi tre eventi, conviene ragionare direttamente nel caso specifico.
Iniziamo osservando che c'è solo un modo per rispondere correttamente a tutte le domande del test (ovvero la sequenza $\underbrace{SS...S}_{10 \text{ volte}}$). Pertanto[2]:

$$\text{P(10 successi)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

Mentre, rispondere correttamente a 9 domande equivale a sbagliarne solo una: tale risposta errata può essere quella relativa alla prima domanda, o alla seconda, ..., o alla decima. Ciò significa che ci sono 10 sequenze del tipo richiesto ciascuna con probabilità $\left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right)$. Pertanto:

$$\text{P(9 successi)} = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{30}{4^{10}}$$

[2]Per la legge della moltiplicazione (eventi indipendenti).

Rimane da calcolare la probabilità di rispondere correttamente a 8 domande. Applichiamo in questo caso la formula generale[3]:

$$\mathrm{P}(8 \text{ successi}) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{405}{4^{10}}$$

A questo punto, per ottenere la probabilità richiesta dal quesito, basta sommare le probabilità dei tre eventi in questione:

$$\mathrm{P}(\text{superare il test}) = \frac{405}{4^{10}} + \frac{30}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} = \frac{436}{4^{10}} \simeq \boxed{4 \cdot 10^{-4}}.$$

[3] Ricordiamo che, in generale, la probabilità di ottenere k successi su n prove è

$$\mathrm{P}(k \text{ successi}) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$$