

Un percorso: il punto di vista del docente

1 Motivazioni alla normale

1.1 I sondaggi

Cosa. I sondaggi sono la **situazione motivante** con cui abbiamo scelto di introdurre il percorso sulla distribuzione normale. Iniziare un percorso didattico con uno stimolo serve da una parte per muovere l'impegno degli studenti e dall'altra per fornire loro situazioni concrete in cui contestualizzare i nuovi oggetti matematici. La scelta è caduta sui sondaggi perché comprenderne le modalità di conduzione e la portata dei dati numerici forniti permette di formarsi un'idea più precisa di ciò che accade in vari contesti e dunque consente di prendere decisioni più consapevoli.

Come. Proponiamo dunque un contesto reale, in accordo con le indicazioni fornite nelle Linee guida della provincia di Trento per i Licei [2]:

[...] l'insegnamento della matematica, a partire dai saperi disciplinari e da un costante riferimento al contesto quotidiano, allo studio e al lavoro, [...] sviluppa forme specifiche di pensiero e assicura gli strumenti necessari ad affrontare i problemi della vita quotidiana e la descrizione scientifica del mondo.

Per contro, si ha l'impressione che molte questioni che si pongono a scuola e che compaiono sui libri di testo siano artificiali, o almeno siano percepite come tali dagli studenti: hanno quasi sempre soluzione, questa è unica e il testo contiene tutti e soli i dati strettamente indispensabili per determinarla. Ciò comporta il rischio di portare gradualmente gli studenti a pensare che ciò che si affronta a scuola sia altro rispetto alla realtà. Pertanto vogliamo iniziare il percorso da un **contesto ricco**, quello dei sondaggi, secondo l'accezione di Freudenthal e con le attenzioni che egli suggerisce [14, pag. 104-105]:

"Creare, rinforzare, e mantenere i legami con la realtà". Questo è ciò che i contesti ricchi debbono fare [...]. Ma in ogni caso occorre sempre ricordare che il contesto non è semplicemente il vestito con il quale si riveste la matematica [...] il contesto è il messaggio, e la matematica è lo strumento per decodificarlo.

E per attuare tale proposito mostriamo il sito ministeriale www.sondaggipoliticoelettorali.it. In particolare facciamo osservare ai ragazzi che l'importanza dei sondaggi è stabilita *per legge*, non è solo una questione matematica, dato che essi devono essere riportati su un sito gestito dallo Stato. In quest'ottica è importante illustrare il significato dei termini e dei dati presenti.

D'altra parte, però, è bene tener presente che proprio la ricchezza del contesto potrebbe diventare un problema, come evidenzia Rosetta Zan [23, pag. 54]:

il contesto scelto [...] spinge verso una particolare interpretazione dell'implicazione tipica del linguaggio quotidiano che facilita la risposta corretta, ma modifica strutturalmente il compito di partenza [...] che era invece "neutrale". L'approccio [...] è tipico della pragmatica, disciplina che mette al centro dell'attenzione il contesto e gli scopi.

In altre parole, il contesto potrebbe condizionare fortemente la risposta, al punto da costituire il criterio principale sul quale essa si basa, facendo passare in secondo piano l'aspetto logico¹.

Uso. Il materiale costituisce un riferimento per la lezione, che può essere condotta in modalità partecipata. Ulteriori approfondimenti possono essere condotti sfruttando il link al sito ministeriale, che raccoglie i sondaggi.

Ancor più motivante sarebbe effettuare un sondaggio all'interno della scuola, per esempio prima delle elezioni dei rappresentanti d'istituto per valutare quanti sono favorevoli o meno ad un certo gruppo di candidati (o solo ad un candidato).

La questione

Cosa. Una volta presentato il (ricco) contesto, conviene focalizzare l'attenzione su un quesito specifico: determinare la probabilità che la frequenza relativa dell'evento "la persona vota A" rilevata sul campione sia una "buona" stima della probabilità che l'individuo della popolazione voti A. Esso costituirà il nostro **problema guida** per l'intero percorso. Tale situazione di apprendimento viene indicata da B. D'Amore, in [12, pag.285], come *situazione problema*.

Si tratta di una questione "semplice" per l'intero nostro percorso sulla distribuzione normale e il TLC. Invece il problema inverso (determinare la dimensione del campione per avere una "buona" stima della probabilità sulla popolazione), pur molto interessante, è assai complesso per una classe della scuola secondaria.

Uso. Prima di discutere in classe un possibile approccio risolutivo, conviene lasciare spazio alle proposte di soluzione degli studenti.

1.2 Un modello binomiale

Cosa. È una prima schematizzazione della situazione in esame, che permette agli studenti di iniziare ad affrontare il problema mediante gli strumenti matematici in loro possesso e poi constatarne i limiti per affrontare efficacemente la situazione in esame.

¹Significativo a tal proposito è l'esempio che riporta R. Zan [23, pag. 47], basato su uno studio classico: *Linda ha 31 anni, non è sposata, è schietta e molto vivace. È laureata in filosofia. Quando era studentessa, si interessava molto ai temi della discriminazione e della giustizia sociale, e prendeva parte a manifestazioni antinucleari.*

Quale di queste due affermazioni su Linda è più probabile?

A. *Linda è un'impiegata di banca.*

B. *Linda è un'impiegata di banca attiva nel movimento femminista.*

In un campione piuttosto numeroso di studenti che avevano seguito corsi di statistica, più dell'80% dei soggetti valuta l'opzione B più probabile dell'opzione A. Da ciò emerge che nel rispondere non sono stati seguiti i criteri formali (di cui effettivamente disponevano), ma sono stati predominanti altri criteri relativi al contesto. Infatti, formulando la domanda in termini insiemistici, il secondo evento è strettamente contenuto nel primo, perciò la sua probabilità di realizzarsi è evidentemente minore.

In questo modo si possono **radicare con continuità i saperi** nuovi sui progressi: se non si forniscono agli studenti le occasioni per prendere consapevolezza dei limiti delle procedure di cui dispongono, essi difficilmente potranno cogliere la necessità e il ruolo degli oggetti matematici che si introducono. Pertanto i nuovi saperi non saranno disponibili per essere utilizzati in altri contesti e a lungo termine. Di questo avviso è A. Sfard [21, pag.294]:

[...] sembra che la via più sicura per arrivare a nuove esplorazioni sia quella di presentarle come (possibili) miglioramenti di atti familiari.

Come. Questa attività sviluppa la capacità di costruire e valutare **modelli matematici**, in coerenza con le Indicazioni nazionali [1] e le Linee guida della provincia di Trento [2].

Lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

In quest'ottica riserviamo una speciale attenzione al modello binomiale che poniamo alla base del percorso sulla probabilità nella classe quinta. In particolare, esaminiamo le ipotesi da assumere affinché abbia senso modellizzare la situazione con tale distribuzione. Inoltre discutiamo un modo di ricavare, per passi, l'espressione analitica della distribuzione di probabilità discreta binomiale. Vogliamo così mostrare allo studente come ricostruirla volta per volta, senza doverla ritenere a memoria. Nel fare ciò seguiamo un approccio indicato da Freudenthal [14, pag. 74-75] come "**reinvenzione guidata**": ossia lo studente prova a costruire la formula come se la inventasse lui stesso, ma nel farlo può contare sulle indicazioni e la guida accorta e discreta del docente.

Il discente deve essere libero di trovare il proprio livello, e di esplorare i cammini che vi conducono, con il minimo di guida richiesta per ogni caso particolare. [...] Gli educatori hanno la responsabilità di aiutarli, non con prescrizioni, ma permettendo loro di reinventare la matematica che dovrebbero imparare.

Tra l'altro, questa modalità contribuisce a rendere i saperi disponibili a lungo termine che, ricordiamo, è uno dei criteri sottesi al nostro percorso.

Uso. Il materiale è pensato come dispensa a supporto di una lezione partecipata, ma si può eventualmente proporre come traccia per un lavoro guidato che lo studente prova a svolgere autonomamente. Questa forma offre l'indubbio vantaggio di far scontrare i ragazzi con la complessità del calcolo, in modo più diretto.

1.3 Un nuovo modello: verso il TLC

Cosa. Attraverso un approccio grafico, viene discussa l'idea di approssimare la distribuzione binomiale mediante un nuovo modello e si precisa tale approssimazione in una prima elementare formulazione del teorema limite centrale. Ciò permette di esprimere il problema guida in una nuova forma che prevede il ricorso alla curva "a campana" e, come si vedrà, comporta una notevole semplificazione computazionale.

Come. Passare all'**approccio grafico** permette di visualizzare con immediatezza la questione e dunque di mettere in evidenza il filo logico del procedimento. Come controparte si deve però accettare di perdere in rigore e in precisione. Questo va esplicitato allo studente, in modo che non confonda l'esame di singoli casi, per quanto suggestivi, con una dimostrazione. Ciò non significa che, in un secondo momento, non si possa proporre una formalizzazione più precisa, ma ora riteniamo sia più utile investigare sul significato profondo della questione.

Del resto, l'affrontare lo stesso argomento in momenti e modi diversi è un'indicazione presente nelle Linee guida della provincia di Trento [2].

Non si dovrà dimenticare l'importanza di ritornare a più riprese sugli argomenti trattati, in un percorso a spirale che approfondisca a più livelli e da più punti di vista i concetti portanti della disciplina.

Uso. La questione è delicata, pertanto il materiale è concepito come dispensa per una lezione partecipata.

1.4 Altre motivazioni alla normale

Cosa. L'approccio alla normale che abbiamo seguito è solo *uno* dei possibili. Storicamente il primo lavoro sull'approssimazione della distribuzione binomiale pare esser stato quello di De Moivre, il quale già nel 1733 cercava una via per uscire dai conti "impossibili" a cui conduce l'uso della binomiale. Si tratta dunque di un approccio analogo al nostro.

In seguito, altri problemi hanno condotto alla "curva a campana", tra cui quelli sui quali hanno investigato Gauss e Quételet.

Gauss nel 1809 giunse all'espressione algebrica della curva normale² durante la sua ricerca della legge distributiva degli **errori accidentali** (errori dovuti all'imperfezione dello strumento di misura, alle circostanze ambientali, all'errore del rilevatore...). A tal riguardo, Galton si meravigliò al punto da eleggerla a "suprema legge dell'Assenza di Ragione", come scrive nel noto passo in cui prospetta l'"ordine nel caos"; passo che ci sembra significativo proporre anche agli studenti.

Poi, nella seconda metà dell'Ottocento, la curva normale iniziò ad essere usata per modellizzare le distribuzioni di alcuni caratteri (come la **statura**, il peso ecc.) in popolazioni umane omogenee. Ciò avvenne soprattutto ad opera di Quételet.

Seguendo questo sviluppo storico (come fa ad esempio G. Cicchitelli in [32, pag.86-87]), ci sembra significativo riproporre agli studenti le tre situazioni che lo hanno segnato: approssimazione della binomiale, legge della distribuzione degli errori accidentali nella misura e delle altezze in una popolazione.

Come. L'argomento si presta ad essere affrontato mediante **attività interdisciplinari**, che sono promosse a più riprese nelle Linee generali delle Indicazioni Nazionali [1].

²In suo onore Laplace nel 1811 diede alla curva "a campana" il nome di Gaussiana.

Al termine del percorso del liceo scientifico, lo studente [...] saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico.

In quest'ottica è interessante investigare, ad esempio, il ruolo rivestito dalla curva normale nello sviluppo delle varie discipline nell'Ottocento. Ma anche esaminare, come controparte, alcuni testi quali *Il cigno nero* di N. Taleb³, che demonizzano l'uso indiscriminato del modello normale e la fede cieca nelle sue capacità di previsione.

Una simile ammonizione è presente nel testo di Villani [22, pag. 274]:

il teorema del limite centrale è un risultato teorico che afferisce a un modello matematico e non alla realtà [...]. Henri Poincaré osservava criticamente che "tutti" giuravano sulla distribuzione normale perchè gli sperimentatori assumevano che essa fosse stata dimostrata matematicamente mentre i matematici la ritenevano acquisita sperimentalmente.

Uso. Il materiale proposto è costituito da esempi e spunti non esaustivi che possono essere opportunamente integrati, magari con letture mirate. Ancora più efficace sarebbe far raccogliere i dati direttamente agli studenti, ad esempio le altezze dei ragazzi della scuola (M. Barra in [7] e [11]) oppure le lunghezze degli aghi di uno stesso ramo di pino o ancora le lunghezze dei chiodi di una stessa confezione [25, pag.39-40]. In realtà queste ultime attività si collocano efficacemente nel primo biennio in un'ottica di didattica a spirale. In ogni caso, come osservato più in generale nell'introduzione del capitolo, le situazioni proposte sono ricche e diverse tra loro e forse in numero maggiore a quante si riesce a proporre in classe. Naturalmente non è indispensabile discutere tutte.

1.5 Facciamo il punto

Cosa. Al termine di questo segmento, discutiamo le conclusioni: gli studenti dovrebbero essere ormai convinti dell'importanza di studiare la curva normale, che hanno visto intervenire in contesti così diversi.

Ora ne presentiamo l'espressione analitica, che descriviamo come **famiglia di funzioni**, ovvero un insieme di funzioni ognuna delle quali si ottiene fissando i valori dei parametri reali μ e σ .

Come. È solo a questo punto del percorso che introduciamo l'espressione analitica della funzione che ha come grafico la curva "a campana". D'altra parte, non era fin qui necessaria. È questo un criterio didattico a cui ci ispiriamo anche in altre parti del percorso: **introdurre aspetti formali con gradualità**, solo quando servono, per dar così modo agli studenti di apprezzarne pienamente la portata e il ruolo.

Uso. Tale materiale supporta la lezione e in un certo senso possiamo indicarlo come dispensa. Il significato dell'uso del riquadro verde verrà spiegato nel paragrafo 3.2.

³Sarebbe interessante proporre agli studenti la lettura dei capitoli 15 e 17 di [37], tenendo conto che