3 Una famiglia di funzioni: interpretazione probabilistica

3.1 Funzione di densità

Aspetti didattici

Cosa. La famiglia di funzioni, fino a qui studiata dal punto di vista analitico, viene adesso interpretata in termini probabilistici. In questa sezione si inizia a farlo approfondendo il ruolo della funzione f quale densità di probabilità.

Come. Solo dopo le diverse attività esplorative che abbiamo proposto nei paragrafi precedenti, arriviamo a precisare la definizione di densità normale e variabile aleatoria normale. Riteniamo, infatti, che in questo modo lo studente possa prendere confidenza con l'oggetto studiato, senza che esso venga prima costretto dentro un'etichetta. In altre parole, vogliamo che le cose arrivino prima dei nomi. Del resto è dello stesso avviso Lang [15, pag. 254] quando afferma che

> [...] il vocabolario si può sviluppare via via che se ne sente il bisogno. Se si sprecano settimane o mesi a costruire un bagaglio di vocaboli fine a sé stesso, che non verrà usato subito, allora è di nuovo una cosa senza senso. [...] Il nome dovrebbe venire dopo l'idea, perché il nome è stato usato soltanto per evocare l'idea.

Di più, non ci preoccupiamo troppo di assegnare un nome ad ogni oggetto matematico che si incontra. Spesso, invece, i libri di testo presentano un verboso elenco di nomi, che difficilmente lo studente arriverà a gestire e ad apprezzare, almeno a lungo termine. All'opposto riteniamo abbia più senso attribuire un nome solo nel momento in cui questo assume un ruolo *davvero* significativo nell'ambito del percorso: ossia semplifica la comunicazione (dello studente, non solo del docente[4]), oppure ha rilevanza culturale. Proprio come avviene per la curva "a campana", che interviene in così tanti campi.

Uso. Questo materiale costituisce un riferimento per la lezione e pertanto si può indicare come dispensa.

Approfondimenti teorici - l'integrale su $\mathbb{R}$ della densità normale

La funzione densità normale non ha una primitiva esprimibile elementarmente, ma per altre vie è possibile calcolare il valore dell'integrale su $\mathbb{R}$.

Proposizione. *Sia X una v.a. normale di parametri reali μ e σ^2, dove $\sigma > 0$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = 1$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che tutti gli integrali al variare di μ e σ^2 hanno lo stesso valore, che denotiamo con I. Infatti attraverso la sostituzione $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, \mathrm{d}z = I$$

[4] Perfino la telecronaca di una partita di calcio risulterebbe di una noia mortale se il commentatore non si servisse di termini specifici, quali corner.

Sapendo che $I > 0$, possiamo equivalentemente calcolare I^2

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

L'integrale doppio che compare si determina, per esempio, passando a coordinare polari, ossia con la trasformazione $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \, r\mathrm{d}r = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$$

Possiamo allora concludere che $I = 1$.

$\square$

3.2 Significato probabilistico dei parametri

Aspetti didattici

Cosa. Proseguiamo l'attività interpretativa, passando a sondare il significato probabilistico dei parametri. Le conclusioni a cui giungeremo rappresentano il punto d'arrivo del segmento di percorso relativo all'esame della nostra famiglia di funzioni.

Come. Il materiale è strutturato in modo che gli studenti, con la guida accorta del docente, arrivino a congetturare il contenuto della proposizione finale, cioè che μ e σ^2 sono rispettivamente la media e la varianza della variabile aleatoria normale. Infatti, la dimostrazione di tale risultato (che comunque discutiamo nel paragrafo 3.3) non è importante quanto comprendere il significato della tesi. Come sostiene De Finetti[5],

> [...] occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza [...] Per lo stesso motivo l'importanza delle formule e dei calcoli risulta in tale trattazione diminuita in confronto a quella data ai concetti e alle immagini, perché l'importanza dell'imparare vi è sempre, come dev'essere, subordinata a quella di capire.

Nella situazione in esame gli studenti fondano la loro congettura sul significato di valore atteso e varianza e sull'interpretazione geometrica dei parametri. Certo tale approccio comporta un notevole dispendio di tempo, ma d'altra parte si rivela un fruttuoso investimento per il mantenimento dei saperi a lungo termine e per lo sviluppo di competenze trasversali.

Uso. Il materiale è pensato a supporto di una lezione condotta in modalità partecipata dal docente. In particolare, i riquadri verdi vogliono evidenziare la rilevanza di quanto contengono: ciò che vorremmo lo studente ricordi e sappia poi esporre in modo analogo. Ossia le conclusioni presentate sono quelle che riteniamo *essenziali* e sono intenzionalmente curate in modo da venir esposte in una forma adeguata per lo studente del quinto anno della scuola secondaria.

[5] Bruno de Finetti, *Matematica logico intuitiva, Cremonese, 1959, p.XIII*

Approfondimenti teorici - perché usare σ^2 e non σ

Per lo studente risulta spesso più semplice riferirsi alla deviazione standard invece che alla varianza, specialmente nel considerare esempi in cui si tiene conto delle unità di misura[6]. Dal punto di vista formale, però, è più indicato considerare come parametri della variabile aleatoria normale μ e σ^2, non σ. Il motivo principale di ciò risiede nella validità del risultato seguente, che qui non dimostriamo[7].

Proposizione. *Siano X e Y due v.a. normali indipendenti, rispettivamente di media μ_X e μ_Y e varianza σ_X^2 e σ_Y^2.*
Allora $X+Y$ è ancora una v.a. normale. Inoltre, $X+Y$ ha media e varianza rispettivamente uguali a

$$\mu = \mu_X + \mu_Y \quad e \quad \sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Osserviamo che tale risultato non vale per la deviazione standard, ossia $\sigma \neq \sigma_X + \sigma_Y$. Questa è essenzialmente la ragione per cui è conveniente lavorare con σ^2 e non con σ.

3.3 Media e varianza della distribuzione normale standard -attività-

Aspetti didattici

Cosa. Dopo aver formulato una congettura sui valori della media e della varianza della variabile aleatoria normale standard Z, puntiamo a dimostrarne la validità. Ci soffermiamo sul caso speciale standard poiché la dimostrazione per una generica variabile normale X è solo più complessa computazionalmente, ma non più istruttiva, almeno se condotta secondo l'approccio proposto. In alternativa, si potrebbe pensare di esprimere la variabile X in termini di Z mediante la relazione che caratterizza la standardizzazione e poi utilizzare le proprietà algebriche di media e varianza; ma non possiamo proporre tale approccio nel nostro percorso, dato che abbiamo deciso di di fondare il procedimento di standardizzazione proprio sul valore atteso e sulla varianza della variabile normale, come vedremo nella sezione successiva.

Come. Al di là del risultato, l'attività è utile perché prevede di utilizzare in modo significativo l'integrale come strumento in vista di un obiettivo e in un preciso contesto, non semplicemente per effettuare un calcolo in astratto. Il valore formativo della dimostrazione è poi arricchito dalla possibilità di sfruttare le simmetrie del problema, evitando così di ricorrere al calcolo brutale. Del resto, questa metodologia risolutiva è proprio quella indicata in generale sulle Linee guida provinciali [2].

> Si dovrà ridurre la tendenza a ricercare procedimenti risolutivi standardizzati [...] e si cercherà anche di evitare il più possibile l'uso di formule risolutive da applicare in modo meccanico.

In tal senso l'attività permette di affinare la competenza di dimostrare: con l'intento di verificare un risultato, gli studenti usano strumenti matematici in vista di un obiettivo.

Uso. Il materiale è strutturato nella forma di quesito, suggerimento e risoluzione. Perciò può essere proposto per il lavoro individuale, sempre che gli studenti dispongano con sicu-

[6] Ad esempio, se X rappresenta l'altezza di un individuo in una popolazione, μ e σ hanno la stessa dimensione (ad esempio centimetri), mentre σ^2 ha dimensione di un'area.

[7] Per approfondimenti si veda [30, pag.92].

rezza dello strumento integrale.

Approfondimenti sul ruolo didattico della dimostrazione

Dimostrare è una delle abilità matematiche il cui sviluppo è promosso dalle Indicazioni nazionali e a cui perciò riserviamo particolare attenzione. Del resto l'importanza di tale attività è ampiamente sostenuta da G. Lolli in [16, pag.11]:

> A tenere insieme e dare un senso a tutto è la dimostrazione. Non si deve imparare (e insegnare) *la* matematica, ma *a fare* matematica, e non si fa matematica senza produrre teoremi.

Ma cosa si intende per dimostrazione? In [22, pag.61] è C. Bernardi a indicarlo: "*Una dimostrazione è un ragionamento mediante il quale si stabilisce la correttezza dell'enunciato di un teorema; più precisamente, il ragionamento con cui si deduce quell'enunciato da quanto già conosciamo*". L'autore prosegue distinguendo tra la dimostrazione che si fa nell'ambito della logica e quella in altri contesti matematici: "*Nei manuali di logica si trova una definizione precisa di dimostrazione: un elenco di passaggi elementari, ciascuno giustificato da una regola di deduzione. Questa definizione è inattaccabile, ma nei libri di matematica le dimostrazioni sono scritte in altro modo! Se davvero si dovessero scrivere tutti i passaggi, anche le dimostrazioni più semplici occuperebbero varie pagine*".
Bernardi continua sottolineando l'utilità didattica di tale attività [22, pag.63]:

> [...] una dimostrazione serve a spiegare e a convincere, ma serve anche a organizzare e trasmettere quanto conosciamo su certi oggetti. L'importanza di una dimostrazione non consiste solo nella sua generalità, ma anche nel fatto (significativo sul piano didattico) che *una dimostrazione aiuta a ricordare l'enunciato, a capire le proprietà coinvolte, a porre il discorso nel giusto contesto.*

In realtà, Härting in [12, pag.337] si spinge oltre sostenendo che: "*È consigliabile concepire il concetto DIMOSTRARE nel modo più ampio possibile. Non bisogna collegarlo soltanto ad affermazioni, che espressamente vengono chiamate TEOREMI, ma bisogna che esso includa in sé ogni lavoro deduttivo del pensiero, ivi compresa l'attività di calcolo fino all'esecuzione di algoritmi*".

Un'attività prossima alla dimostrazione è l'argomentazione e anch'essa viene citata nelle Indicazioni nazionali. Entrambe hanno grande rilevanza didattica, ma presentano delle caratteristiche proprie, come precisa Duval in [12, pag.351]:

- *argomentazione*: "fornire argomenti, cioè ragioni a favore o contro una determinata tesi";
- *dimostrazione*: tratta della "verità di una conclusione, o per lo meno il suo rapporto necessario con le premesse".

La tabella seguente [12, pag.336] mette ancor più in evidenza il carattere proprio delle due attività: nell'argomentazione pesa maggiormente l'analisi semantica, nella dimostrazione quella sintattica.

	Argomentazione	**Dimostrazione**
Passaggio da una proposizione ad un'altra	Si usano regole implicite che dipendono dalle strutture linguistiche e dalle rappresentazioni scelte; entra in gioco il metalinguaggio ed il significato delle singole proposizioni; siamo dunque in piena fase semantica	Si usano regole di derivazione che devono (dovrebbero) essere state esplicitate in precedenza o concordate; le proposizioni non veicolano contenuti semantici particolari, ma intervengono per il loro ruolo (esempio: premessa, conseguenza) passo dopo passo, nel corso della dimostrazione

Preso atto di tale distinzione, rimane da considerare quali accorgimenti didattici è opportuno adottare affinché tali attività risultino realmente formative. A tal proposito è determinante la riflessione di Perelman in [12, pag.343]:

> Se c'è un punto di sostanziale accordo tra tutti i ricercatori, è che lo studente deve essere coinvolto sia sul piano della produzione di dimostrazioni, sia sul piano della riflessione su quel che si fa quando si fa una dimostrazione, anche in base alle ricerche condotte da Galbraith con le quali si dimostra l'enorme divario che c'è tra le attese dell'insegnante e le reali consapevolezze critiche degli allievi.

Egli chiarisce tale posizione discutendo di un caso specifico: "*Il controesempio di un enunciato, che nella mente dell'insegnante ha un ben preciso scopo dimostrativo, non viene recepito come tale dallo studente che non ne coglie il senso ma si limita a considerarlo come un'informazione in più*".